কোর গণিত

[COMPLETE CORE MATHEMATICS]

মধ্যশিক্ষা-পর্ষদ্ কর্তৃক ১৯৬৩ সাল হইতে প্রবর্তিত নূতন সিলেবাস (Syl/1/62)
অনুসারে লিখিত হায়ার-সেকেণ্ডারী ও সেকেণ্ডারী স্কুলসমূহের
নবম ও দশম শ্রেণীর জন্য আবশ্যিক পাঠ্য কোর গণিত

কোর গণিত

[COMPLETE CORE MATHEMATICS]

(পাটীগণিত ও রাশিবিজ্ঞান, বীজগণিত, জ্যামিতি ও পরিমিতি)

[নবম ও দশম শ্রেণীর জন্য]

শ্রীকেশবচন্দ্র নাগ

অবসরপ্রাপ্ত প্রধান শিক্ষক, মিত্র ইন্‌ষ্টিট্যুশন্ (ভবানীপুর),
গ্রন্থকার পাটীগণিত (৭ম, ৮ম) ও নব পাটীগণিত,
স্কুল ফাইন্যাল ঐচ্ছিক গণিত, H. S. Elective Math. I—III,
S. F. & H. S. Core Math. & S. F. Addl. Math.

সংশোধিত সংস্করণ

ক্যালকাটা বুক হাউস
১/১, বঙ্কিম চ্যাটার্জি ষ্ট্রীট :: কলিকাতা-১২

প্রকাশক :
শ্রীপরেশচন্দ্র ভাওয়াল
ক্যালকাটা বুক হাউস
১/১, বঙ্কিম চ্যাটার্জি স্ট্রীট,
কলিকাতা-১২

প্রথম সংস্করণ—নভেম্বর, ১৯৬২
দ্বিতীয় সংস্করণ—ফেব্রুয়ারী, ১৯৬৩
সংশোধিত তৃতীয় সংস্করণ—নভেম্বর, ১৯৬৩
চতুর্থ সংস্করণ— নভেম্বর, ১৯৬৪
পঞ্চম সংস্করণ—ফেব্রুয়ারী, ১৯৬৫
ষষ্ঠ সংস্করণ—সেপ্টেম্বর, ১৯৬৬
সপ্তম সংস্করণ—নভেম্বর, ১৯৬৭
অষ্টম সংস্করণ—অক্টোবর, ১৯৬৮
নবম সংস্করণ—এপ্রিল, ১৯৬৯
দশম সংস্করণ—নভেম্বর, ১৯৬৯
একাদশ সংস্করণ—জুলাই, ১৯৭০

মূল্য—সাত টাকা পঁচাত্তর পয়সা মাত্র

মুদ্রাকর :
শ্রীপরেশচন্দ্র ভাওয়াল
মুদ্রণ ভারতী প্রাইভেট লিঃ
২, রামনাথ বিশ্বাস লেন,

BOARD OF SECONDARY EDUCATION
WEST BENGAL
SYLLABUS FOR

MATHEMATICS (COMPULSORY)

Vide Notification No. Syl/1/62 dated 30th March

(This course is intended to be mainly a revision of the work done in earlier classes and reoriented to the use of Mathematics in daily life. The teacher is only expected to define the various terms used in the course-content and show their practical utility. It is not desired that he should burden the student with too many mathematical details, methods and problems.)

CLASS IX

Unit 1—ARITHMETIC

All questions should be straightforward. Application of Algebra should be permitted in Arithmetic.

Revision of previous work—Vulgar and Decimal Fractions including Recurring Decimals ; Extraction of Square Root ; Square and Cubic measures ; Simple examples of Unitary Method including Time and Work, Time and Distance ; Percentages and easy cases of Simple Interest. Simple ideas of Approximation (excluding Contracted Method and Infinite Series).

Compound Interest (calculation of interest only) ; Profit and Loss.

Unit 3—ALGEBRA

Revision of previous work—Directed Numbers ; Fundamental Laws ; Problems and Simple Equations ; the following formulæ with their applications : $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, a^2-b^2, $(a+b)^3$, $(a-b)^3$; a^3+b^3, a^3-b^3 ;

Easy Factors ; H. C. F. ; L. C. M. ; Easy Fractions.

Simple simultaneous Equations involving two unknowns ;

Problems leading to Equations, Simple and Simultaneous ; Graphs of Simple Equations.

THEORETICAL

Unit 4—GEOMETRY

Revision of previous work as in The Board's Syllabus up to Class VIII.

To prove—

1. The opposite sides and angles of a parallelogram are equal, each diagonal divides the parallelogram into congruent triangles, and diagonals of a parallelogram bisect one another.

2. A quadrilateral is a parallelogram if—

(*i*) both pairs of opposite sides are equal, *or*

(*ii*) both pairs of opposite angles are equal, *or*

(*iii*) one pair of opposite sides are equal and parallel, *or*

(*iv*) its diagonals bisect one another.

3. If there are three *or* more parallel straight lines, and the intercepts made by them on any one straight line that cuts them are equal, then the corresponding intercepts on any other straight line that cuts them are also equal.

The straight line drawn through the middle point of one side of a triangle parallel to another side bisects the third side and is equal to half of it.

The straight line joining the middle points of two sides of a triangle is parallel to the third side and equal to half of it.

4. The formula proof should be preceded by practical work with squared paper in all cases of this paragraph.

(*i*) Parallelogram on the same base and between the same parallels are equal in area.

(*ii*) Triangles on the same base (*or* on equal bases) and between the same parallels (*or* of the same altitude) are equal in area.

(*iii*) Equal triangles on the same base and on the same side of it are between the same parallels.

(*iv*) If a triangle and a parallelogram stand on the same base and are between the same parallels, the area of the triangle is half that of the parallelogram.

(*i*) In a right-angled triangle the square on the hypotenuse is equal to the sum of the squares on the sides containing the

(*vi*) If a triangle is such that the square on one side is equal to the sum of the squares on the other two sides, then the angle contained by these two sides is a right angle.

5. To prove—

This locus of points which are equidistant from two fixed points is the perpendicular bisector of the straight line joining the two fixed points.

The locus of points which are equidistant from two intersecting straight lines consists of the pair of straight lines which bisect the two angles between the two given lines.

6. (*i*) The perpendiculars drawn to the sides of a triangle from their middle points are concurrent.

(*ii*) The bisectors of the angles of a triangle are concurrent.

(*iii*) The medians of a triangle are concurrent.

PRACTICAL

1. Revision of previous work.

(*i*) Bisection of angles and straight lines.

(*ii*) Construction of a perpendicular to a straight line.

(*iii*) Construction of an angle equal to a given angle.

(*iv*) Construction of parallels to given straight lines.

(*v*) Construction of triangles with given parts.

(*vi*) Division of a straight line into a given number of equal parts.

2. Construction of quadrilaterals.

3. Construction of a parallelogram equal to a given triangle and having one of its angles equal to a given angle.

4. Construction of a triangle equal in area to a given rectilineal figure.

CLASS X

Unit 1—ARITHMETIC

All questions should be straightforward. Applications of Algebra should be premitted in Arithmetic.

Ratio and Proportion ; simple examples of Unitary Method including direct Problems of Income-tax, Foreign Exchange and Draft ; Metric system dealing with topics of conversion. (Adequate practice should be given in the use of the metric system of weights and measures including area and volume).

Unit 2—STATISTICS

Frequency Tables ; Averages—Mean, Median and Mode ; Mean and Standard Deviations ; Graphical representations—Histogram, Frequency polygon.

(All data used for imparting the above-mentioned rudiments of Statistics should be collected by the pupils themselves. Examples : Weights, heights, ages of pupils, their school attendance and progress in studies, etc.)

Unit 3—ALGEBRA

Simple quadratic equations as can be solved by easy factorisation.

Graphical solutions of simultaneous Equations of the first Degree ; Ratio and Proportion.

Unit 4—GEOMETRY

THEORETICAL

1. **To Prove**

Their is one circle, and only one, which passes through three given points not in a straight line.

2. **Axioms—**

In equal circles (*or*, in the same circle) equal chords cut off equal arcs and subtend equal angles at the centre and conversely.

To prove

3. A straight line, drawn from the centre of a circle to bisect a chord which is not a diameter, is at right angles to the chord and conversely.

4. In equal circles (*or*, in the same circle) equal chords are equidistant from the centres and conversely.

5. The angle which an arc of a circle subtends at the centre is double that which it subtends at any point on the remaining part of the circumference.

6. Angles in the same segment of a circle are equal, and if the line joining two points subtends equal angles at two other points on the same side of it, the four points lie on a circle.

7. The angle in a semi-circle is a right angle ; the angle in a segment greater than a semi-circle is less than a right angle ; and the angle in a segment less than a semi-circle is greater than a right angle.

8. The opposite angles of any quadrilateral inscribed in a circle are supplementary and the converse.

The following theorems are also to be included :—

(i) The tangent at any point of a circle and its radius through the point are perpendicular to one another.

(ii) The two tangents to a circle from an external point are equal and they subtend equal angles at the centre.

(iii) If two circles touch, the point of contact lies in the straight line through the centres.

PRACTICAL

Simple cases of construction of circles ; construction of Designs with Geometrical Figures.

Unit 5. (a)—MENSURATION

Area of a Triangle ; Circumference and Area of a Circle. Surface and Volume of Rectangular parallelopiped, Cylinder and Sphere.

Unit 5 (b)—GEOMETRY OF SPHERE

Elementary ideas of Geometry of a Sphere leading to the definition of Latitude, Longitude.

The following demonstrations and experiments are suggesred for Class X, in connection with the different units, as indicated below :—

1. DEMONSTRATIONS & EXPERIMENTS

(Note :—'D" stands for *demonstration* and 'E" for *experiment*).

Unit 1—ARITHMETIC

D. Explanation of Specimen Cheques ; Drafts ; Bills ; Foreign Currencies ; etc.

Unit 2—STATISTICS

E. Determination of weights, heights and ages of pupils and their Graphical Representations.

Unit 4—GEOMETRY

D. Explanation of Models of Geometrical Figures.

Unit 5 (a)—MENSURATION

E. Measurement of Areas of Rectangular Figures and Triangles ; Circumference and Area of a Circle.

Unit 5 (b)—GEOMETRY OF SPHERE

D. Geometry of sphere.

সূচীপত্র

পাটীগণিত

[নবম শ্রেণী]

[দশম শ্রেণী]

জ্যামিতি

[নবম শ্রেণী]

বিভিন্ন দেশে প্রচলিত প্রধান মুদ্রা

দেশ	প্রধান মুদ্রা	দেশ	প্রধান মুদ্রা
ইংল্যাণ্ড, অস্ট্রেলিয়া, নিউজিল্যাণ্ড	…1 পাউণ্ড (£)	আমেরিকা, কানাডা	…1 ডলার (=100 সেণ্ট)
ফ্রান্স, সুইজারল্যাণ্ড, বেলজিয়াম	…1 ফ্রাঙ্ক	জাপান	…1 ইয়েন (=100 সেন)
রাশিয়া	…1 রুবল (=100 কোপেক)	চীন	…1 টেল
জার্মানী	……1 মার্ক	সিংহল	…1 টাকা (=100 সেণ্ট)
ইটালী	…1 লিরা	পাকিস্তান	…1 টাকা (=100 পয়সা)
		ভারতবর্ষ	…1 টাকা (=100 পয়সা, আগে ইহাকে নয়া পয়সা বলা হইত)

[**দ্রষ্টব্য :** এই পুস্তকের 108 পৃষ্ঠায় Foreign Exchange-এ এইগুলির প্রয়োজন হইবে।]

কতিপয় এককাবলী

1. মুদ্রাবিভাগ

দেশীয়

3 ক্রান্তি = 1 কড়া
4 কড়া = 1 গণ্ডা
5 গণ্ডা = 1 পয়সা
4 পয়সা বা 20 গণ্ডা = 1 আনা
4 আনা = 1 সিকি
16 আনা বা 4 সিকি = 1 টাকা
12 পাই = 1 আনা
3 পাই = 1 পয়সা
[বর্তমানে 1 টাকা = 100 পয়সা]

ইংলণ্ডীয়

4 ফার্দিং (q.) = 1 পেনি (d.)
12 পেনি = 1 শিলিং (s.)
20 শিলিং = 1 পাউণ্ড বা সভারিণ (£)
5 শিলিং = 1 ক্রাউন
21 শিলিং = 1 গিনি
2 শিলিং = 1 ফ্লোরিন

আমেরিকায় প্রচলিত

100 সেণ্ট = 1 ডলার ($)

2. দেশীয় বাজার ওজন

5 তোলা বা 4 কাঁচ্চা = 1 ছটাক
4 ছটাক = 1 পোয়া
16 ছটাক বা 4 পোয়া = 1 সের
40 সের = 1 মণ

3. ইংলণ্ডীয় বাজার ওজন

16 ড্রাম (dram) = 1 আউন্স (oz.)
16 আউন্স = 1 পাউণ্ড (lb.)
28 পাউণ্ড = 1 কোয়ার্টার (qr.)
4 কোয়ার্টার = 1 হন্দর বা হাণ্ড্রেড ওয়েট্ (cwt.)

20 হন্দর = 1 টন
1 পাউণ্ড (এভর্ডুপয়েজ) = 700 গ্রেণ (ট্রয়)
1 স্টোন = 14 পাউণ্ড
1 টন = 27 মণ 9 সের (প্রায়)

4. স্বর্ণরৌপ্যাদির ওজন

দেশীয়

4 ধান = 1 রতি
6 রতি = 1 আনা
8 রতি = 1 মাসা
12 মাসা বা 16 আনা = 1 ভরি

ইংলণ্ডীয়

24 গ্রেণ = 1 পেনিওয়েট (dwt.)
20 পেনিওয়েট = 1 আউন্স
12 আউন্স = 1 পাউণ্ড
1 পাউণ্ড (ট্রয়) = 5760 গ্রেণ

5. ঔষধাদির ওজন

দেশীয়

4 ধান = 1 রতি
10 রতি = 1 মাসা
8 মাসা = 1 তোলা
64 তোলা = 1 সের

ইংলণ্ডীয়

20 গ্রেণ = 1 স্ক্রুপল্
3 স্ক্রুপল্ = 1 ড্রাম
8 ড্রাম = 1 আউন্স
12 আউন্স = 1 পাউণ্ড
60 ফোঁটা = 1 ড্রাম

6. ইংলণ্ডীয় রৈখিক মাপ

12 ইঞ্চি (ই.) = 1 ফুট (ফু.)
3 ফুট = 1 গজ (গ.)
1760 গজ = 1 মাইল (মা.)
$5\frac{1}{2}$ গজ = 1 পোল

40 পোল বা 220 গজ = 1 ফার্লং
8 ফার্লং = 1 মাইল
3 মাইল = 1 লীগ
[1 গজ = এদেশীয় 2 হাত]

7. ইংলণ্ডীয় সময় বা কাল পরিমাণ

60 সেকেণ্ড (সে.) = 1 মিনিট (মি.)
60 মিনিট = 1 ঘণ্টা (ঘ.)
24 ঘণ্টা = 1 দিন (দি.)
30 দিন (সাধারণতঃ) = 1 মাস (মা.)
12 মাস = 1 বৎসর (ব.)

365 দিন = 1 বৎসর
7 দিন = 1 সপ্তাহ (স.)
52 সপ্তাহ = 1 বৎসর
100 বৎসর = 1 শতাব্দী

দ্রষ্টব্য ঃ সাধারণতঃ 30 দিনে একমাস ধরা হয়, কিন্তু ইংরাজী ও বাংলা অনেক মাস ঠিক 30 দিনে হয় না। ভিন্ন ভিন্ন মাস 31, 30, 29, 28 দিনে হয়। যথা :—

ত্রিশ দিনেতে হয় মাস সেপ্টেম্বর।
সেইরূপ এপ্রিল, জুন আর নভেম্বর॥
আটাশ দিনেতে সবে ফেব্রুয়ারী ধরে।
বাড়ে তার একদিন চতুর্থ বৎসরে॥
অবশিষ্ট মাস হয় একত্রিশ দিনে।
ইংরাজী মাসের দিন এইরূপে গণে॥

8. দেশীয় কাল পরিমাণ

60 অনুপল = 1 বিপল
60 বিপল = 1 পল
60 পল = 1 দণ্ড
60 দণ্ড = 1 দিন

30 দিন = 1 মাস
12 মাস = 1 বৎসর
7 দিন = 1 সপ্তাহ

7½ দণ্ড = 1 প্রহর, 8 প্রহর = 1 দিন; 15 দিন = 1 পক্ষ।

9. কাগজের সংখ্যার হিসাব

24 তা = 1 দিস্তা
20 দিস্তা = 1 রিম

10. ভূমির মাপ

দেশীয়

4 হাত বা 16 ছটাক = 1 কাঠা
20 কাঠা = 1 বিঘা

ইংলণ্ডীয়

1000 লিঙ্ক = 1 চেন
10 চেন = 1 ফার্লং

11. দ্রব্যের গণনা

ইংলণ্ডীয়

12 টা = 1 ডজন
12 ডজন = 1 গ্রোস
12 গ্রোস = 1 গ্রেট্ গ্রোস
20 টা = স্কোর।

পাটীগণিত

নবম শ্রেণী

পূর্বপাঠের পুনরালোচনা (বিবিধ সমাধান)

উদাহরণ 1. কোন সংখ্যাকে 35 দিয়া ভাগ করিলে 26 ভাগশেষ থাকে ; ঐ সংখ্যাকে 7 দিয়া ভাগ করিলে কত ভাগশেষ থাকিবে ?

এখানে সংখ্যাটি = 35এর কোন গুণিতক + 26 ; এবং 7-এর গুণিতক 35, সুতরাং সংখ্যাটির যে অংশটুকু 35 দ্বারা বিভাজ্য তাহা 7 দ্বারাও বিভাজ্য। অতএব, 26কে 7 দ্বারা ভাগ করিলে যে ভাগশেষ থাকে সমগ্র সংখ্যাটিকে 7 দিয়া ভাগ করিলেও তাহাই ভাগশেষ থাকিবে।

```
7 ) 26 ( 3
    21
    --
     5
```

∴ নির্ণেয় ভাগশেষ = 5.

উদাহরণ 2. 10842কে কোন সংখ্যা দ্বারা ভাগ করায় ভাগফল 46 এবং ভাগশেষ 46 অপেক্ষা বেশী কিন্তু 92 অপেক্ষা কম হইয়াছে। ভাজকটি কত ?

```
46 ) 10842 ( 235
     92
     ---
     164
     138
     ---
      262
      230
      ---
       32
```

এখানে দেখা যাইতেছে যে, 32 ভাগশেষ হইলে ভাজক 235 হইত। কিন্তু প্রশ্নে বলা আছে ভাগশেষ 46 অপেক্ষা বেশী ও 92 অপেক্ষা কম। এখানে ভাগফল 235-এর শেষ অঙ্ক 1 কমাইয়া 4 করিলে তখন ভাগশেষ হইবে 32 + একবার 46 অর্থাৎ 78, ইহা 46 অপেক্ষা বেশী, কিন্তু 92 অপেক্ষা কম। ∴ নির্ণেয় ভাজক = 234.

উদাহরণ 3. 53246 হইতে কোন্ বৃহত্তম সংখ্যা বিয়োগ করিলে অন্তরটি 325 দ্বারা বিভাজ্য হইবে ?

এখানে বুঝা যাইতেছে যে, অন্তরটি 325 দ্বারা বিভাজ্য হইতে হইলে অন্তরটি অন্ততঃ 325 হওয়া চাই, উহার কম হইলে 325 দ্বারা ভাগ করা যাইবে না। সুতরাং 53246 হইতে এমন সংখ্যা বিয়োগ করিতে হইবে যেন 325 অবশিষ্ট থাকে। ∴ নির্ণেয় সংখ্যা = 53246 − 325 = 52921.

উদাহরণ 4. চার অঙ্কের কোন্ বৃহত্তম সংখ্যা 514 দ্বারা বিভাজ্য ?

4 অঙ্কের বৃহত্তম সংখ্যা = 9999.

```
514 ) 9999 ( 19
      514
      4859
      4626
      ----
       233
```

এখানে 233 ভাগশেষ থাকায় বিভাজ্য হয় নাই, সুতরাং 9999 হইতে 233 কমাইয়া দিলে বিভাজ্য হইবে।

∴ নির্ণেয় সংখ্যা = 9999 − 233 = 9766.

উদাহরণ 5. 5 অঙ্কের কোন্ ক্ষুদ্রতম সংখ্যা 623-এর গুণিতক ?

623-এর গুণিতক অর্থাৎ 623 দ্বারা বিভাজ্য।

5 অঙ্কের ক্ষুদ্রতম সংখ্যা = 10000.

```
623 ) 10000 ( 16
       623
      -----
       3770
       3738
       ----
         32
```

623 − 32 = 591

এখানে 32 ভাগশেষ থাকায় বিভাজ্য হয় নাই, 32-এর সহিত আর (623 − 32) বা 591 যোগ করিলে বিভাজ্য হইত ; সুতরাং 10000-এর সহিত 591 যোগ করিয়া নির্ণেয় সংখ্যা পাওয়া যাইবে।

∴ নির্ণেয় সংখ্যা = 10000 + 591 = 10591.

[**দ্রষ্টব্য :** এখানে ভাগশেষ 32কে 10000 হইতে বিয়োগ করিলেও 623 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা পাওয়া যাইত, কিন্তু তাহা 4 অঙ্কের সংখ্যা হইয়া যাইত, 5 অঙ্কের হইত না। সেইজন্য কি যোগ করিয়া বিভাজ্য হয় তাহাই দেখিতে হইয়াছে।]

উদাহরণ 6. দুইটি সংখ্যাকে কোন ভাজক দ্বারা ভাগ করিলে যথাক্রমে 208 ও 233 ভাগশেষ থাকে, কিন্তু ঐ সংখ্যাদ্বয়ের সমষ্টিকে ঐ ভাজক দ্বারা ভাগ করিলে 66 ভাগশেষ থাকে। ভাজকটি কত ?

সংখ্যা দুইটিকে পৃথক্‌ভাবে ভাজকটি দ্বারা ভাগ করিলে যথাক্রমে 208 ও 233 বাকি থাকে। ∴ উহাদের সমষ্টিকে ঐ ভাজক দিয়া ভাগ করিলে (233 + 208) বা 441 বাকি থাকিবার কথা, এখানে কিন্তু 66 বাকি আছে। অতএব বুঝিতে হইবে যে, 441 সংখ্যাটি ভাজকটি অপেক্ষা 66 বেশী (অর্থাৎ ভাগে 441-এর মধ্যে ভাজকটি একবার গিয়া 66 বাকি থাকে)।

∴ নির্ণেয় ভাজক = 441 − 66 = 375.

উদাহরণ 7. ক ও খ-কে 35 টাকা 7 পয়সা এরূপে ভাগ করিয়া দাও যেন ক-এর টাকার 3 গুণ খ-এর টাকার 4 গুণের সমান হয়।

3 + 4 = 7 ; 7 ভাগের মধ্যে ক যদি 4 ভাগ পায়, তবে খ 3 ভাগ পাইবে ;

সুতরাং 35 টাকা 7 পয়সা-কে মোট 7 ভাগ করিতে হইবে।

1 ভাগের টাকা = 35 টা. 7 প. ÷ 7 = 5 টা. 1 প.

∴ ক পাইবে 5 টা. 1 প. × 4 বা 20 টাকা 4 পয়সা
এবং খ পাইবে 5 টা. 1 প. × 3 বা 15 টাকা 3 পয়সা } উঃ।

উদাহরণ 8. এক কারিকরকে এই চুক্তিতে নিযুক্ত করা হইল যে, সে যতদিন কাজ করিবে ততদিন 2 টা. 50 প. করিয়া মজুরী পাইবে এবং যতদিন অনুপস্থিত থাকিবে ততদিন 87 পয়সা করিয়া জরিমানা দিবে। 26 দিন পরে সে সর্বশুদ্ধ 31 টাকা 30 পয়সা পাইল। কতদিন সে কাজে অনুপস্থিত ছিল?

26 দিনের পূর্ণ মজুরী = 2 টা. 50 প. × 26 = 65 টাকা; কিন্তু কারিকর পাইয়াছে 31 টা. 30 প.। অতএব অনুপস্থিতির জন্য তাহার মোট কাটা গিয়াছে (65 টা. − 31 টা. 30 প.) বা 33 টাকা 70 পয়সা।

1 দিন অনুপস্থিতির জন্য জরিমানা সমেত কাটা যায় (2টা. 50প. + 87 প.) বা 3 টা. 37 প.।

∴ সে অনুপস্থিত ছিল (33 টা. 70 প. ÷ 3 টা. 37 প.) দিন
= (3370 প. ÷ 337 প.) দিন = 10 দিন।

প্রশ্নমালা 1

(পূর্বপাঠ-সংক্রান্ত)

1. দুইটি সংখ্যার সমষ্টি 166302 এবং অন্তর 6616; সংখ্যা দুইটির গুণফল কত? [ঢা. বো. 1925]

2. কোন্ সংখ্যাকে 372 দিয়া ভাগ করিলে ভাগফল 273 এবং ভাগশেষ 237 হয়? [ক. প্র. 1917]

3. 37, 131 এবং আর একটি সংখ্যার ক্রমিক গুণফল 697968, সেই সংখ্যাটি কত?

4. কোন্ সংখ্যাকে 965 দিয়া গুণ করিয়া সেই গুণফলের সহিত 476005 যোগ করিলে যোগফল এক নিযুত হইবে? [পা. প্র. 1931]

5. একটি ভাগে ভাজক ভাগফলের 25 গুণ এবং ভাগশেষের 15 গুণ। ভাগশেষ যদি 375 হয়, তবে ভাজ্য কত? [পা. প্র. 1929]

6. ভাগশেষের 7 গুণ ভাজক, ভাজকের 7 গুণ ভাগফল এবং উহাদের সমষ্টি 741 হইলে ভাজ্য কত?

7. কোন সংখ্যাকে 56 দিয়া ভাগ করিলে 29 ভাগশেষ থাকে। সেই সংখ্যাকে 8 দিয়া ভাগ করিলে কত ভাগশেষ থাকিবে? [ক. প্র. 1927]

8. যদি ভাজ্য 37693, ভাগফল 52 এবং ভাগশেষ 52 অপেক্ষা বেশী কিন্তু 104 অপেক্ষা কম হয়, তবে ভাজক কত ? [ক. প্র. 1935]

9. একটি বালক 7865321কে 254 দিয়া ভাগ করিতে গিয়া ভাজক সংখ্যাটির একটি অঙ্ক ভুল লেখায় ভাগফল 33612 ও ভাগশেষ 113 হইল। সে কি ভুল করিয়াছিল ?

10. এক ব্যক্তি দুই মাসের আয় তিন মাসে ব্যয় করে। বৎসরে তাহার 1500 টাকা সঞ্চয় হইলে, তাহার মাসিক আয় কত ?

11. 7862 হইতে কোন্ ক্ষুদ্রতম সংখ্যা বিয়োগ করিলে অন্তরটি 73 দ্বারা বিভাজ্য হইবে ?

12. 7532-এর সহিত কোন্ লঘিষ্ঠ সংখ্যা যোগ করিলে যোগফল 73 দ্বারা বিভাজ্য হইবে ?

13. 723597 হইতে কোন্ বৃহত্তম সংখ্যা বিয়োগ করিলে অন্তরফলটি 316 দ্বারা বিভাজ্য হইবে ?

14. 5 অঙ্কের কোন্ বৃহত্তম সংখ্যা 315 দ্বারা বিভাজ্য ?

15. 6 অঙ্কের কোন্ ক্ষুদ্রতম সংখ্যা 219 দ্বারা বিভাজ্য ?

16. 5 অঙ্কের কোন্ ক্ষুদ্রতম সংখ্যার একটি উৎপাদক 53 ?

17. 8750কে 635 দিয়া গুণ করিতে গিয়া কোন বালক গুণকের একটি অঙ্ক ভুল লিখিয়া 5993750 গুণফল পাইল। সে লিখিতে কি ভুল করিয়াছিল ? [ক. প্র. 1949]

18. ক্রিকেট খেলায় **ক**, **খ** ও **গ** একত্রে 108 রাণ করে, **খ** ও **গ** একত্রে 90 রাণ এবং **ক** ও **গ** একত্রে 51 রাণ করিয়াছিল। কে কত রাণ করিয়াছিল ? [ক. প্র. 1929]

19. **ক** ও **খ**-এর একত্রে 134 টাকা, **খ** ও **গ**-এর একত্রে 100 টাকা এবং **গ** অপেক্ষা **খ**-এর 58 টাকা বেশী আছে। প্রত্যেকের কত টাকা আছে ? [পূ. ব. বো. 1948]

20. দুইটি সংখ্যার যোগফল 60, ছোটটির 3 গুণ লইলে বড়টি অপেক্ষা 12 বেশী হয়। সংখ্যা দুইটি কত ? [ছাত্র, 1933]

21. 3 বৎসর পূর্বে **ক**-এর বয়স **খ**-এর বয়সের দ্বিগুণ ছিল। 7 বৎসর পরে **ক** ও **খ**-এর বয়সের সমষ্টি 83 বৎসর হইবে। এখন প্রত্যেকের বয়স কত ?

22. 225 মিটার দীর্ঘ একটি স্থানের উপর সমান দূরে দূরে মোট 26টি গাছ বসান হইল। যদি উহার দুই প্রান্তে 2টি গাছ বসান হইয়া থাকে, তবে পর পর যে-কোন দুইটি গাছের মধ্যে দূরত্ব কত ?

23. কোন্ সংখ্যাকে ক্রমান্বয়ে 3, 7 ও 8 দিয়া ভাগ করিলে যথাক্রমে 2, 4 ও 3 ভাগশেষ এবং শেষ ভাগফল 13 হয় ?

*24. একটি গুণে কতকগুলি অঙ্ক মুছিয়া গিয়াছে। গুণ্যটি 999 এবং গুণফলের ডানদিকের শেষ তিনটি অঙ্ক 193, অন্য কিছু পড়া যায় না। সমগ্র গুণটি লিখিয়া দাও। [এ. প্র. 1894]

25. দুইটি সংখ্যাকে কোন ভাজক দ্বারা ভাগ করিলে যথাক্রমে 580 ও 475 ভাগশেষ থাকে, কিন্তু সংখ্যা দুইটির সমষ্টিকে ঐ ভাজক দ্বারা ভাগ করিলে 255 ভাগশেষ থাকে। ভাজকটি কত ?

26. আমার নিকট 1230 টাকা আছে। ন্যূনপক্ষে আর কত টাকা হইলে সমস্ত টাকা 91 জনকে সমানভাবে ভাগ করিয়া দেওয়া যায় ?

27. 3টি 25 পয়সা মুদ্রার বদলে আমি এক পয়সা ও ডবল পয়সায় মোট 56টি মুদ্রা পাইলাম। প্রত্যেক রকম মুদ্রা কয়টি পাইলাম ?

28. সমান পরিমাণ টাকা দিয়া **ক** ও **খ** কতকগুলি ছাগল কিনিল। উহার মধ্যে **খ** 35টি ছাগল লইল এবং **ক** 55টি ছাগল লইয়া **খ**কে 20 টাকা দিল। প্রত্যেক ছাগলের মূল্য কত ?

29. আমার কাছে যে টাকা আছে তাহা কতিপয় বালককে ভাগ করিয়া দিতে গিয়া দেখা গেল যে, প্রত্যেককে 6 টাকা করিয়া দিলে 18 টাকা উদ্বৃত্ত থাকে, কিন্তু প্রত্যেককে 10 টাকা করিয়া দিলে 22 টাকার অভাব হয়। আমার কাছে কত টাকা আছে এবং বালকের সংখ্যা কত ?

30. কোন মিস্ত্রীকে যে মাসে কাজ করিবার জন্য এই সর্তে নিযুক্ত করা হইল যে, যেদিন কাজ করিবে সেদিন সে 1 টা. 60 প. হিসাবে পাইবে এবং যে দিন অনুপস্থিত হইবে সেদিন 40 পয়সা জরিমানা দিবে। মাসের শেষে সে 33 টাকা 60 পয়সা পাইল। সে কতদিন অনুপস্থিত ছিল ?

*31. রাম ও হরির 16 দিনের আয় রামের 24 দিনের আয়ের সমান। উহা হরির কত দিনের আয়ের সমান ?

32. 5501 টাকা 50 পয়সা 4 জন পুরুষ, 6 জন স্ত্রীলোক ও 8 জন বালককে এরূপে ভাগ করিয়া দাও যেন প্রত্যেক পুরুষ প্রত্যেক স্ত্রীলোকের 2 গুণ ও প্রত্যেক স্ত্রীলোক প্রত্যেক বালকের 3 গুণ পায়।

*33. 32 টাকা গ্যালন দরে তৈল ক্রয় করিলে আমি যত তৈল পাই, 8 টাকা গ্যালন দরে কিনিলে তদপেক্ষা 5 গ্যালন বেশী পাই। আমার নিকট কত টাকা আছে ?

34. **ক** ও **খ**-কে 28 টাকা 84 পয়সা এরূপে ভাগ করিয়া দাও যেন **ক**-এর টাকার 6 গুণ **খ**-এর টাকার 8 গুণ হয়।

গ. সা. গু. ও ল. সা. গু. সম্বন্ধীয় বিবিধ সমাধান

[পূর্বপাঠ]

[নিম্নের উদাহরণগুলিতে গ. সা. গু. বা ল. সা. গু. যেখানে যাহা প্রয়োজন তাহা করিয়া দেখাইবে।]

উদাহরণ 1. বৃহত্তম কোন্ সংখ্যা দ্বারা 211 ও 939কে ভাগ করিলে প্রত্যেক স্থলে 3 ভাগশেষ থাকে ?

[এখানে বুঝিতে হইবে যে, 211 ও 939কে নির্ণেয় বৃহত্তম সংখ্যাটি দ্বারা ভাগ করিলে যখন 3 ভাগশেষ থাকে, তখন (211 – 3) বা 208 এবং (939 – 3) বা 936 ঐ সংখ্যাটি দ্বারা অবশ্যই বিভাজ্য হইবে। অতএব, নির্ণেয় সংখ্যা 208 ও 936-এর গ. সা. গু. হইবে।]

$$211-3=208,\ 939-3=936.$$

```
2 | 208 | 936 | 4
  | 208 | 832 |
        | 104
```

208 ও 936-এর গ. সা. গু. = 104.

∴ নির্ণেয় সংখ্যা = 104.

[**দ্রষ্টব্য :** যদি এখানে দুইটি ভাগশেষ ভিন্ন ভিন্ন হইত, যথা 3 ও 5 হইত, তবে (211 – 3) ও (939 – 5)এর গ. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইত।]

উদাহরণ 2. কোন্ ক্ষুদ্রতম সংখ্যাকে 12, 16 ও 18 দ্বারা ভাগ করিলে প্রত্যেকবার 7 ভাগশেষ থাকিবে ?

[আমরা জানি যে, 12, 16 ও 18-র ল. সা. গু.-ই উহাদের দ্বারা বিভাজ্য ক্ষুদ্রতম সংখ্যা। সুতরাং ঐ ল. সা. গু.-র সহিত 7 যোগ করিয়া দিলেই প্রত্যেকবার ঐ 7 ভাগশেষ থাকিবে।]

12, 16, 18 দ্বারা বিভাজ্য ক্ষুদ্রতম সংখ্যা = 12, 16, 18-র ল. সা. গু. = 144 ; ∴ নির্ণেয় সংখ্যা = 144 + 7 = 151.

উদাহরণ 3. 5 অঙ্কের কোন্ ক্ষুদ্রতম সংখ্যা 12, 18 ও 21 দ্বারা বিভাজ্য ?

[12, 18, 21-এর ল. সা. গু. দ্বারা যে সংখ্যা বিভাজ্য সেই সংখ্যাটি 12, 18 ও 21 দ্বারাও বিভাজ্য ; সুতরাং 5 অঙ্কের যে ক্ষুদ্রতম সংখ্যাটি ঐ ল. সা. গু. দ্বারা বিভাজ্য তাহাই নির্ণেয় সংখ্যা।]

12, 18 ও 21-এর ল. সা. গু. = 252 [ল. সা. গু. অঙ্কে কষিয়া দেখাইবে]

5 অঙ্কের ক্ষুদ্রতম সংখ্যা = 10000 ;

```
252 ) 10000 ( 39
       756
      ----
       2440
       2268
      ----
        172
```

252 – 172 = 80

∴ নির্ণেয় সংখ্যা = 10000 + 80 = 10080.

উদাহরণ 4. 4 অঙ্কের কোন্ বৃহত্তম সংখ্যা. 12, 18, ও 21-এর গুণিতক ?
12, 18 ও 21-এর ল. সা. গু. = 252, 4 অঙ্কের বৃহত্তম সংখ্যা = 9999 ;

```
252 ) 9999 ( 39
      756
      ----
      2439
      2268
      ----
       171
```

∴ নির্ণেয় সংখ্যা = 9999 − 171 = 9828.

উদাহরণ 5. তিনটি ঘণ্টা প্রথমে একসঙ্গে বাজিয়া তারপর যথাক্রমে 8, 12, ও 18 মিনিট অন্তর বাজিতে লাগিল। ন্যূনপক্ষে কতক্ষণ পরে উহারা পুনরায় একসঙ্গে বাজিবে ?

[এখানে বুঝা যায় যে, যে সময় পরে উহারা আবার একসঙ্গে বাজিবে সে সময়টিকে অবশ্যই 8, 12 ও 18 দ্বারা বিভাজ্য হইতে হইবে।]

নির্ণেয় সময় = 8, 12 ও 18 মিনিটের ল. সা. গু. = 72 মিনিট
= 1 ঘণ্টা 12 মিনিট।

[**দ্রষ্টব্য :** দুইটি চাকার পরিধি যথাক্রমে 8 মিটার ও 12 মিটার, কোন্ লঘিষ্ঠ দূরত্বের মধ্যে উহারা পূর্ণসংখ্যক বার ঘুরিবে ? এইরূপ প্রশ্নও উদাহরণ 5-এর মত করিতে হইবে।]

উদাহরণ 6. 2 কি. লি. 52 লিটার ও 1 কি. লি. 5 হে. লি. দুধ মাপিতে বৃহত্তম কি আয়তনের পাত্র ব্যবহার করা যাইবে ?

[যে পাত্র দ্বারা দুধ মাপা হইবে তাহার মাপের দ্বারা 2 কি. লি. 52 লি. ও 1 কি. লি. 5 হে. লি. বিভাজ্য হওয়া চাই। অতএব প্রদত্ত রাশি দুইটির গ. সা. গু.-ই নির্ণেয় পাত্রের মাপ হইবে।]

2 কি. লি. 52 লি. = 2052 লি. এবং 1 কি. লি. 5 হে. লি. = 1500 লি. ;
2052 লিটার ও 1500 লিটারের গ. সা. গু. = 12 লিটার।

∴ 12 লিটার দুধ ধরে এরূপ বৃহত্তম পাত্র ব্যবহার করা যাইবে।

[**দ্রষ্টব্য :** 5 টাকা 50 পয়সা ও 3 টাকা 52 পয়সার দুইটি বিলের টাকা একই প্রকার মুদ্রায় দিতে হইবে। কত ঊর্ধ্বতম মূল্যের মুদ্রা ব্যবহার করা যায় ? এরূপ প্রশ্নের সমাধানও উদাহরণ 6-এর মত হইবে।]

উদাহরণ 7. দুইটি সংখ্যার গ. সা. গু. 12 এবং ল. সা. গু. 336 ; একটি সংখ্যা 48 হইলে অপরটি কত ?

যে-কোন দুইটি সংখ্যার গুণফল = উহাদের গ. সা. গু. × ল. সা. গু.

∴ এখানে সংখ্যা দুইটির গুণফল = 12 × 336, কিন্তু একটি সংখ্যা = 48,

∴ নির্ণেয় অপর সংখ্যা $= \frac{12 \times 336}{48} = 84.$

উদাহরণ 8. কোন্ বৃহত্তম সংখ্যা দ্বারা 82, 104 ও 148কে ভাগ করিলে প্রত্যেকবার একই ভাগশেষ থাকে ?

82 = নির্ণেয় সংখ্যাটির কোন গুণিতক + ঐ ভাগশেষ,

104 = ,, ,, অপর কোন গুণিতক + ঐ ভাগশেষ,

এবং 148 = ,, ,, অন্য কোন গুণিতক + ঐ ভাগশেষ।

অতএব, দেখা যাইতেছে যে 82, 104 ও 148-এর যে কোন দুইটির অন্তর ঐ নির্ণেয় সংখ্যার কোন গুণিতক অর্থাৎ উহা দ্বারা অন্তরগুলিকে ভাগ করিলে কোন ভাগশেষ থাকিবে না। $104-82=22$, $148-104=44$, $148-82=66$; এই 22, 44 ও 66 নির্ণেয় সংখ্যাটি দ্বারা বিভাজ্য।

$\therefore$ নির্ণেয় বৃহত্তম সংখ্যাটি = 22, 44 ও 66-এর গ. সা. গু. = 22.

উদাহরণ 9. কোন্ ক্ষুদ্রতম সংখ্যাকে 24, 30 ও 36 দ্বারা ভাগ করিলে যথাক্রমে 21, 27 ও 33 ভাগশেষ থাকে ?

$24-21=3$, $30-27=3$, $36-33=3$; এখানে দেখা যাইতেছে যে, প্রত্যেক ভাগশেষ ভাজক অপেক্ষা 3 কম। অতএব বুঝা যাইতেছে যে নির্ণেয় সংখ্যাটি 24, 30 ও 36 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা অপেক্ষা 3 কম।

24, 30 ও 36 দ্বারা বিভাজ্য ক্ষুদ্রতম সংখ্যা = 24, 30 ও 36-এর ল. সা. গু. = 360. $\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $=360-3=357$.

উদাহরণ 10. 1000 ও 2000-এর মধ্যবর্তী কোন্ সংখ্যা 30, 36 ও 80 দ্বারা বিভাজ্য ?

30, 36 ও 80-র ল. সা. গু. = 720 ; এখন দেখিতে হইবে 720-র কোন্ গুণিতক 1000 ও 2000-এর মধ্যবর্তী, তাহাই নির্ণেয় সংখ্যা হইবে। $720\times 2 = 1440$, ইহা 1000 ও 2000-এর মধ্যবর্তী। $\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা = 1440.

[**দ্রষ্টব্য :** 1000 ও 2000-এর মধ্যবর্তী কোন্ সংখ্যাকে 30, 36 ও 80 দ্বারা ভাগ করিলে প্রত্যেকবার 11 ভাগশেষ থাকে ? এইরূপ প্রশ্ন থাকিলে $1440+11=1451$ উত্তর হইত, ইহা বুঝা সহজ।]

উদাহরণ 11. 252টি লেবু ও 360টি লিচু কতকগুলি বালককে সমান ভাগ করিয়া দেওয়া হইল। বালক-সংখ্যা কত ? যতগুলি সম্ভব উত্তর দাও।

যখন 252টি লেবু ও 360টি লিচু সমান পরিমাণে ভাগ করিয়া দেওয়া যায়, তখন বালকদিগের সংখ্যার দ্বারা উভয় সংখ্যাই বিভাজ্য হওয়া চাই। অতএব 252 ও 360-এর সাধারণ গুণনীয়কগুলি উত্তর হইবে।

$$\begin{array}{r|l} 2 & 36 \\ \hline 2 & 18 \\ \hline 3 & 9 \\ \hline & 3 \end{array}$$

252 ও 360-এর গ. সা. গু. = 36,

$\therefore$ নির্ণেয় বালক-সংখ্যা = 36 এবং 36-এর যে কোন উৎপাদক = 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36.

উদাহরণ 12. দুইটি সংখ্যার গ. সা. গু. 17 এবং উহাদের যোগফল 136 হইলে, সংখ্যা দুইটি কি কি হইতে পারে ?

সংখ্যা দুইটির গ. সা. গু. 17 বলিয়া উহারা 17 দ্বারা বিভাজ্য ; সুতরাং উহাদের যোগফলও 17 দ্বারা বিভাজ্য ; $136 \div 17 = 8$. অতএব বুঝিতে হইবে যে, সংখ্যা দুইটিকে পৃথক্ ভাবে 17 দিয়া ভাগ করিলে যে দুইটি ভাগফল হয় তাহাদের সমষ্টি 8. এখন দেখ, কোন্ কোন্ দুই সংখ্যার যোগফল 8.

$8=1+7$
$8=2+6$
$8=3+5$
$8=4+4$

এই জোড়াগুলির মধ্যে যে জোড়াগুলির সংখ্যাদ্বয় পরস্পর মৌলিক কেবল সেইগুলিই লইতে হইবে। ইহাদের মধ্যে 1 ও 7 এবং 3 ও 5 পরস্পর মৌলিক। সুতরাং দুই জোড়া সংখ্যা হইবে।

∴ এক জোড়া সংখ্যা $=17 \times 1$ ও $17 \times 7 = 17$ ও 119 ;
আর এক জোড়া সংখ্যা $=17 \times 3$ ও $17 \times 5 = 51$ ও 85. } উত্তর।

উদাহরণ 13. দুইটি সংখ্যার গ. সা. গু. 18 এবং ল. সা. গু. 108 হইলে সংখ্যা দুইটি কি কি হইতে পারে ?

এখানে গ. সা. গু. যখন 18, তখন সংখ্যা দুইটিকে 18 দিয়া ভাগ করিলে যে দুইটি ভাগফল পাওয়া যাইবে তাহারা অবশ্য পরস্পর মৌলিক হইবে, নতুবা গ. সা. গু. 18 না হইয়া অন্য হইত। আর আমরা জানি যে গ. সা. গু.-কে ঐ ভাগফল দুইটি দিয়া ক্রমিক গুণ করিলে ল. সা. গু. পাওয়া যায়। এখানে $108 \div 18 = 6$. এখন এই 6-কে দুইটি পরস্পর মৌলিক উৎপাদকে বিভক্ত করিতে হইবে। $6=1 \times 6$, $6=2 \times 3$; 1 ও 6 এবং 2 ও 3 পরস্পর মৌলিক, সুতরাং নির্ণেয় সংখ্যা দুই জোড়া হইবে।

∴ এক জোড়া সংখ্যা $=18 \times 1$ ও $18 \times 6 = 18$ ও 108 ;
আর এক জোড়া সংখ্যা $=18 \times 2$ ও $18 \times 3 = 36$ ও 54. } উত্তর।

উদাহরণ 14. দুইটি সংখ্যার গুণফল 12960 এবং উহাদের গ. সা. গু. 36 ; এইরূপ কয় জোড়া সংখ্যা হইতে পারে ? সংখ্যাগুলি নির্ণয় কর। [ক. প্র. 1946]

∵ গ. সা. গু. × ল. সা. গু. = সংখ্যা দুইটির গুণফল,

∴ 36 × ল. সা. গু. = 12960, ∴ ল. সা. গু. $= 12960 \div 36 = 360$.

[এখন উদা. 13-এর সমাধানের মত কর]

$360 \div 36 = 10$; $10 = 1 \times 10$, $10 = 2 \times 5$; 1 ও 10 এবং 2 ও 5 পরস্পর মৌলিক, সুতরাং দুই জোড়া সংখ্যা হইতে পারে।

∴ এক জোড়া সংখ্যা $=36 \times 1$ ও $36 \times 10 = 36$ ও 360 ;
অন্য জোড়া সংখ্যা $=36 \times 2$ ও $36 \times 5 = 72$ ও 180. } উত্তর।

উদাহরণ 15. কোন্ ক্ষুদ্রতম সংখ্যাকে 6, 8 ও 10 দিয়া ভাগ করিলে 1 ভাগশেষ থাকে, কিন্তু 13 দিয়া ভাগ করিলে কোন ভাগশেষ থাকে না ?

এখানে 6, 8 ও 10এর ল. সা. গু.=120 [ল. সা. গু. করিয়া দেখাইবে]। সুতরাং 120 ও তাহার যে-কোন গুণিতক 6, 8, 10 দ্বারা বিভাজ্য। অতএব বুঝা যাইতেছে যে, নির্ণেয় সংখ্যাটি 120-র কোন গুণিতক অপেক্ষা 1 বেশী। এখন 120-র কত গুণের সহিত 1 যোগ করিলে যোগফলটি 13 দ্বারা বিভাজ্য হয়, তাহা নির্ণয় করিতে হইবে। ইহার জন্য 120কে 13 দিয়া ভাগ করিলে কত ভাগশেষ হয় দেখ। ভাগশেষ হইয়াছে 3. এইবার দেখ 3-এর কত গুণের সহিত 1 যোগ করিলে 13 দ্বারা বিভাজ্য হয়। দেখা যাইতেছে যে, $3\times4+1=13$, ইহা 13 দ্বারা বিভাজ্য। ∴ নির্ণেয় সংখ্যা $=120\times4+1=481$.

```
13) 120 ( 9
    117
    ---
      3
```

উদাহরণ 16. পাঁচ অঙ্কের কোন্ বৃহত্তম সংখ্যা 8509-এর সহিত যোগ করিলে যোগফলটি 20, 27, 32 ও 36 দ্বারা বিভাজ্য হইবে ? [ঢা. বো. 1895]

পাঁচ অঙ্কের বৃহত্তম সংখ্যা = 99999.

20, 27, 32 ও 36-এর ল. সা. গু. দ্বারা যে সংখ্যা বিভাজ্য তাহা এই সংখ্যাগুলির দ্বারাও বিভাজ্য।

```
2 | 20, 27, 32, 36
2 | 10, 27, 16, 18
3 |  5, 27,  8,  9
3 |  5,  9,  8,  3
  |  5,  3,  8,  1
```

20, 27, 32 ও 36-এর ল. সা. গু.
$=2\times2\times3\times3\times5\times3\times8$
$=4320.$

```
         99999
          8509
4320 ) 108508 ( 25
         8640
         22108
         21600
           508
```

∴ নির্ণেয় সংখ্যা $=99999-508$
$=99491.$

[**দ্রষ্টব্য** : এখানে 8509-এর সহিত 5 অঙ্কের বৃহত্তম সংখ্যা 99999 যোগ করিয়া দেখা গেল যে, যোগফলটি 4320 দ্বারা বিভাজ্য হয় নাই। 508 অতিরিক্ত হইয়াছে, সুতরাং 508 কম যোগ করিতে হইবে।

∴ $99999-508=99491$ নির্ণেয় সংখ্যা হইল।]

উদাহরণ 17. 30516কে কোন সংখ্যা দ্বারা ভাগ করিয়া 17, 27 ও 36 যথাক্রমে প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় বা শেষ ভাগশেষ পাওয়া গেল। ভাজকটি কত ?

এখানে 3 বার ভাগশেষ থাকায় বুঝা যাইতেছে যে, ভাগফলে 3টি অঙ্ক আছে। অতএব, ভাজ্যের 305 লইয়া প্রথম ভাগ কার্য আরম্ভ হইয়াছে এবং 17 ভাগশেষ আছে, সুতরাং (305 − 17) বা 288 নির্ণেয় ভাজকটি দ্বারা

অবশ্যই বিভাজ্য। এইবার ভাগশেষ 17-র গায়ে ভাজ্যের 1 নামাইয়া হইল 171 এবং তখন ভাগশেষ 27 থাকায় (171 − 27) বা 144 ভাজক দ্বারা বিভাজ্য। অনুরূপে (276 − 36) বা 240 ঐ ভাজক দ্বারা বিভাজ্য।

এক্ষণে, 288, 144 ও 240-এর প্রত্যেকটি নির্ণেয় ভাজক দ্বারা বিভাজ্য, সুতরাং উহাদের গ. সা. গু. কিংবা তাহার কোন গুণনীয়ক নির্ণেয় ভাজক হইবে।

```
144 ) 288 ( 2          1 | 144 | 240 | 1
      288                |  96 | 144 |
      ---                   48 |  96 | 2
                               |  96 |
```

∴ নির্ণেয় ভাজক = 48.

[দ্রষ্টব্য : 48-এর যে-কোন উৎপাদকের দ্বারাও 288, 144 ও 240 বিভাজ্য, সুতরাং 48 এবং উহার যে কোন উৎপাদক ভাজক হইতে পারিত ; কিন্তু সেই উৎপাদক প্রদত্ত ভাগশেষগুলি অপেক্ষা বৃহত্তর হওয়া আবশ্যক। অতএব, এক্ষেত্রে 48 একমাত্র নির্ণেয় ভাজক।]

উদাহরণ 18. দুইটি সংখ্যার গ. সা. গু. নির্ণয় করিয়া 21 শেষ ভাজক এবং 1, 2 ও 3 পরপর 3টি ভাগফল পাওয়া গেল। সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

[এই প্রকারের অঙ্ক শেষের দিক হইতে করিতে হয়।]

এখানে শেষ ভাজক 21 এবং শেষ ভাগফল 3 হওয়ায়, শেষ ভাজ্যটি হইল (21 × 3) বা 63, সুতরাং এই 63 হইবে দ্বিতীয় ভাজক এবং তখন ভাগফল হইয়াছে 2 এবং ভাগশেষ আছে 21. অতএব, দ্বিতীয় ভাজ্য হইল (63 × 2 + 21) বা 147. এই 147 হইবে প্রথম ভাজক (অর্থাৎ একটি নির্ণেয় সংখ্যা) এবং তখন ভাগফল 1 ও ভাগশেষ ঐ 63 (যাহা দ্বিতীয় ভাজক)। সুতরাং প্রথম ভাজ্য ছিল (147 × 1 + 63) বা 210, ইহাই অপর নির্ণেয় সংখ্যা।

∴ নির্ণেয় সংখ্যাদ্বয় = 147 ও 210.

উদাহরণ 19. এক ব্যক্তি 8 টা. 16 প. মূল্যে কতকগুলি আম কিনিয়া তাহা হইতে 6 টা. 42 প. মূল্যে কতকগুলি আম বিক্রয় করিল। ইহাতে যদি তাহার লাভ বা ক্ষতি না হইয়া থাকে, তাহা হইলে ন্যূনপক্ষে এখনও তাহার কাছে কয়টি আম আছে ?

এখানে দেখা যাইতেছে যে, 8 টা. 16 প. কতকগুলি পূর্ণসংখ্যক আমের ক্রয়মূল্য এবং 6 টা. 42 প. কতকগুলি পূর্ণসংখ্যক আমের ক্রয়মূল্য। অতএব, এক একটি আমের মূল্য দ্বারা উভয় রাশিই বিভাজ্য।

∴ 8 টা. 16 প. ও 6 টা. 42 পয়সার গ. সা. গু. একটি আমের ঊর্ধ্বতম মূল্য হইতে পারে এবং এই মূল্য হিসাবে যতগুলি আম অবশিষ্ট থাকিতে পারে তাহাই ন্যূনপক্ষে অবশিষ্ট আমের সংখ্যা হইবে।

8 টা. 16 প.=816 পয়সা ; 6 টা. 42 পয়সা=642 পয়সা। 816 পয়সা ও 642 পয়সার গ. সা. গু.=6 পয়সা, ইহাই প্রত্যেক আমের উর্ধ্বতম মূল্য।

লোকটির কাছে এখনও (816 প.−642 প.) বা 174 পয়সা মূল্যের আম আছে। ∴ তাহার কাছে ন্যূনপক্ষে এখনও (174÷6) বা 29টি আম আছে।

উদাহরণ 20. এক ব্যক্তি দৈনিক মজুরীতে মোট 29 টা. 25 পয়সায় কিছুদিনের জন্য নিযুক্ত হইল, কিন্তু কয়েকদিন অনুপস্থিত থাকায় সে মোট 22 টাকা 50 পয়সা পাইল। প্রমাণ কর যে, তাহার দৈনিক মজুরী 2 টাকা 25 পয়সার অধিক হইতে পারে না।

22 টা. 50 প. ও 29 টা. 25 প. লোকটির কতকগুলি পূর্ণসংখ্যক দিনের মজুরী বলিয়া একদিনের মজুরী দ্বারা উভয় রাশিই বিভাজ্য হইবে।

∴ 22 টা. 50 প. ও 29 টা. 25 পয়সার গ. সা. গু. তাহার উর্ধ্বতম দৈনিক মজুরী হইবে। 22 টা. 50 প.=2250প., 29টা. 25প.=2925 পয়সা। 2250 প. ও 2925 পয়সার গ. সা. গু.=225 প.=2 টা. 25 পয়সা। অতএব, লোকটির দৈনিক মজুরী 2 টাকা 25 পয়সার অধিক হইতে পারে না।

প্রশ্নমালা 2

1. বৃহত্তম কোন্ সংখ্যা দ্বারা 5191 ও 5854কে ভাগ করিলে প্রত্যেক বার 4 ভাগশেষ থাকে? [ক. প্র. 1931]

2. কোন্ ক্ষুদ্রতম সংখ্যাকে 8, 12, 16 ও 20 দ্বারা ভাগ করিলে প্রত্যেক ক্ষেত্রে 5 অবশিষ্ট থাকে?

3. এমন একটি বৃহত্তম সংখ্যা নির্ণয় কর যাহা দ্বারা 1625, 2281 ও 4218কে ভাগ করিলে যথাক্রমে 8, 4 ও 5 ভাগশেষ থাকে। [ক. প্র. 1930]

4. কোন্ লঘিষ্ঠ সংখ্যার সহিত 1 যোগ করিলে যোগফলটি 12, 16 ও 18 দ্বারা বিভাজ্য হইবে?

5. 4 অঙ্কের কোন্ বৃহত্তম সংখ্যার গুণনীয়ক 125 হইবে?

6. কোন্ লঘিষ্ঠ সংখ্যা হইতে 7 বিয়োগ করিলে বিয়োগফল 48, 64, 90 ও 120 দ্বারা বিভাজ্য হইবে?

7. 5 অঙ্কের কোন্ ক্ষুদ্রতম সংখ্যা 12, 16 ও 28 দ্বারা বিভাজ্য?

8. 4 অঙ্কের কোন্ ক্ষুদ্রতম সংখ্যাকে 12, 16 ও 18 দিয়া ভাগ করিলে প্রত্যেকবার 3 ভাগশেষ থাকে?

9. 4 অঙ্কের কোন্ বৃহত্তম সংখ্যার ও 5 অঙ্কের কোন্ ক্ষুদ্রতম সংখ্যার গ. সা. গু. 248 হইবে? [ক. প্র. 1944]

10. দুইটি সংখ্যার গ. সা. গু. 168 এবং ল. সা. গু. 3060288 ; একটি সংখ্যা 12096, অন্যটি কত ? [সিভিল সার্ভিস]

11. চারিটি ঘণ্টা একবার একসঙ্গে বাজিবার পর যথাক্রমে 12, 18, 24 ও 30 সেকেণ্ড অন্তর বাজিতে লাগিল। কতক্ষণ পরে পুনরায় উহারা একসঙ্গে বাজিবে ? [ক. প্র. 1921]

12. কোন্ বৃহত্তম পাত্র দ্বারা 15 কি. গ্রা. 4 হে. গ্রা. ও 35 কি. গ্রাম দুধকে সম্পূর্ণরূপে মাপা যায় ?

13. 2 টা. 31 পয়সা ও 4 টা. 40 পয়সার দুইটি বিলের টাকা একই প্রকার মুদ্রায় দিতে হইলে সর্বাপেক্ষা কত অধিক মূল্যের মুদ্রা ব্যবহার করা যাইতে পারে ?

14. 100000-এর নিকটতম কোন্ সংখ্যা 2, 3, 4, 5, 6 ও 7 দ্বারা বিভাজ্য ? [এ. প্র. 1918]

15. এক অযুতের নিকটতম কোন্ সংখ্যা 11, 22 ও 33 দ্বারা বিভাজ্য ?

16. এমন কোন সংখ্যা আছে কি যাহা দ্বারা 400 ও 600কে ভাগ করিলে ভাগশেষ যথাক্রমে 9 ও 13 হইবে ?

17. 573, 1364 ও 912কে কোন্ বৃহত্তম সংখ্যা দ্বারা ভাগ করিলে একই ভাগশেষ থাকে ?

18. 300 ও 500-র মধ্যবর্তী কোন্ কোন্ সংখ্যাগুচ্ছের গ. সা. গু. 63 হইতে পারে ?

19. সমান দরে 1 টা. 54 পয়সা ও 3 টা. 22 পয়সা দিয়া কয়েকটি কলম কেনা হইল। প্রত্যেকটি কলমের মূল্য অধিকপক্ষে কত হইতে পারে ?

20. কোন্ ক্ষুদ্রতম সংখ্যাকে 48, 64, 72, 80, 120 ও 140 দিয়া ভাগ করিলে যথাক্রমে 38, 54, 62, 70, 110 ও 130 ভাগশেষ থাকে ? [ক.প্র. 1898]

21. 23759143 হইতে কোন্ ক্ষুদ্রতম ও কোন্ বৃহত্তম সংখ্যা বিয়োগ করিলে অন্তরফলগুলি 24, 35, 91, 130 ও 150 দ্বারা বিভাজ্য হইবে ? [ক. প্র. 1896, 1941]

22. কোন্ ক্ষুদ্রতম সংখ্যাকে 80, 96, 108 ও 128 দ্বারা ভাগ করিলে যথাক্রমে 73, 89, 101 ও 121 ভাগশেষ থাকিবে ?

23. 13000 ও 14000-এর মধ্যবর্তী কোন্ সংখ্যাকে 152 ও 285 দ্বারা ভাগ করিলে প্রত্যেকবার 31 ভাগশেষ থাকে ? [ক. প্র. 1943]

24. দুইটি সংখ্যার সমষ্টি 1212 এবং উহাদের গ. সা. গু. 101. ঐরূপ কয় জোড়া সংখ্যা হইতে পারে ? সেই জোড়াগুলি নির্ণয় কর। [ক. প্র. '45]

25. দুইটি সংখ্যার ল. সা. গু. 2376 ও গ. সা. গু. 132 ; সংখ্যা দুইটি কি কি হইতে পারে ? যতগুলি সম্ভব উত্তর দাও।

26. দুইটি সংখ্যার গুণফল 12960 এবং উহাদের গ. সা. গু. 36 ; সংখ্যা দুইটি কি কি ? যতগুলি সম্ভব উত্তর লিখ।

27. এমন একটি ক্ষুদ্রতম সংখ্যা নির্ণয় কর যাহাকে 11 দিয়া ভাগ করিলে কোন ভাগশেষ থাকে না ; কিন্তু 5, 6 ও 8 দিয়া ভাগ করিলে প্রত্যেকবার ভাগশেষ 1 থাকে। [ছাত্র 1895]

28. কোন্ ক্ষুদ্রতম সংখ্যাকে 12, 18 ও 21 দিয়া ভাগ করিলে 4 ভাগশেষ থাকে ; কিন্তু 22 দিয়া ভাগ করিলে কোন ভাগশেষ থাকে না ?

29. কতকগুলি মার্বেল গণনা করার সময় দেখা গেল একসঙ্গে 3টি করিয়া গণনা করিলে 1টি বাকি থাকিয়া যায়, একসঙ্গে 4টি করিয়া গণনা করিলে 2টি বাকি থাকে, 5টি করিয়া গুণিলে 3টি এবং 6টি করিয়া গুণিলে 4টি বাকি থাকিয়া যায়। ন্যূনপক্ষে মার্বেলের সংখ্যা কত হইতে পারে ?

30. 4 অঙ্কের কোন্ বৃহত্তম সংখ্যা 11, 44, 66, 88 ও 99 দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য ? [ক. প্র. 1935]

31. 91509টি আম ও 83721টি লেবু কতিপয় বালক-বালিকাকে সমান ভাগে ভাগ করিয়া দেওয়া হইল। বালক-বালিকার সংখ্যা কত ? যতগুলি সম্ভব উত্তর দাও। [ঢা. বো. 1930]

32. 11 দ্বারা বিভাজ্য কোন্ ক্ষুদ্রতম সংখ্যাকে 7, 9, 14, 21 ও 35 দ্বারা ভাগ করিলে প্রত্যেকবার 2 ভাগশেষ থাকে ? [ক. প্র. 1942]

33. 5 অঙ্কের কোন্ বৃহত্তম সংখ্যা 8321-এর সহিত যোগ করিলে যোগফল 15, 20, 24, 27, 32 ও 36 দ্বারা বিভাজ্য হইবে ? [ক. প্র. 1906]

34. 6 অঙ্কের কোন্ লঘিষ্ঠ সংখ্যাকে 12, 15 ও 18 দ্বারা ভাগ করিলে যথাক্রমে 9, 12 ও 15 ভাগশেষ থাকে ?

35. 53790823 হইতে কোন্ বৃহত্তম ও কোন্ ক্ষুদ্রতম সংখ্যা বিয়োগ করিলে অন্তরফল 24, 35, 63, 91 ও 520 দ্বারা বিভাজ্য হইবে ? [ঢা.বো.'35]

36. কোন ভাগে ভাজ্য 305165 এবং পর পর ভাগশেষগুলি 17, 27, 36 ও 29 ; ভাজকটি কত ?

37. 64329কে কোন সংখ্যা দ্বারা ভাগ করিয়া 175, 114 ও 213 যথাক্রমে প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় বা শেষ ভাগশেষ থাকিল। ভাগফলটি নির্ণয় কর। [ক. প্র. 1939]

*38. দুইটি সংখ্যার গ. সা. গু. নির্ণয় করিয়া শেষ ভাজক 49 এবং পর পর ভাগফলগুলি যথাক্রমে 17, 3 ও 2 হইল। সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর। [সি. সা.]

39. এক ব্যক্তি 10 টাকা 80 পয়সায় কতকগুলি আম কিনিয়া 8 টাকা 19 পয়সায় উহা হইতে কতকগুলি আম বিক্রয় করিল। ইহাতে যদি

তাহার লাভ বা লোকসান না হইয়া থাকে, তবে তাহার নিকট কমপক্ষে আর কয়টি আম থাকিতে পারে ?

40. এক ব্যক্তি দৈনিক মজুরীতে কয়েকদিন কার্য করিবার জন্য মোট 19 টাকা 80 পয়সায় চুক্তিতে নিযুক্ত হইল, কিন্তু সে কিছুদিন অনুপস্থিত থাকায় মোট 17 টাকা 16 পয়সা পাইল। প্রমাণ কর যে, তাহার দৈনিক মজুরী 1 টাকা 32 পয়সার অধিক হইতে পারে না।

41. একই দরে এক ব্যক্তি 19 টাকা 80 পয়সা ও 34 টাকা 65 পয়সা মূল্যে কতকগুলি করিয়া আম কিনিল, প্রত্যেক আমের মূল্য 24 পয়সার কম নহে এবং 36 পয়সার বেশী নহে। সে দুই দফায় মোট কতগুলি আম কিনিয়াছিল ?

42. তিন অঙ্ক-বিশিষ্ট কোন্ সংখ্যা দ্বারা 7653 ও 11282কে ভাগ করিলে একই ভাগশেষ থাকিবে ?

ভগ্নাংশ

তোমরা পূর্বে ভগ্নাংশের সরলতা সম্পাদন করিতে শিখিয়াছ। নিম্নে জটিল ভগ্নাংশের সরলতা সম্পাদন প্রক্রিয়া দেখান হইতেছে।

উদাহরণ 1. সরল কর : $\dfrac{5\frac{5}{8}}{6\frac{3}{7}}$ এর $\dfrac{6\frac{7}{11}}{9\frac{1}{8}} \div \frac{8}{9}(2\frac{3}{11}+\frac{13}{22})$ এর $\frac{3}{5}$.

প্রদত্ত রাশি $= \dfrac{\frac{45}{8}}{\frac{45}{7}}$ এর $\dfrac{\frac{73}{11}}{\frac{73}{8}} \div \frac{8}{9}(\frac{25}{11}+\frac{13}{22})$ এর $\frac{3}{5}$

$= \dfrac{\cancel{45}\times 7}{\cancel{8}\times\cancel{45}}$ এর $\dfrac{\cancel{73}\times\cancel{8}}{11\times\cancel{73}} \div \frac{8}{9}(\frac{50+13}{22})$ এর $\frac{3}{5}$

$= \dfrac{7}{11} \div \dfrac{\overset{4}{\cancel{8}}\times\overset{7}{\cancel{63}}}{\cancel{9}\times\underset{11}{\cancel{22}}}$ এর $\dfrac{3}{5} = \dfrac{7}{11} \div \dfrac{4\times 7\times 3}{11\times 5}$

$= \dfrac{\cancel{7}}{\cancel{11}} \times \dfrac{\cancel{11}\times 5}{4\times\cancel{7}\times 3} = \dfrac{5}{12}.$

[**দ্রষ্টব্য :** এখানে $\frac{8}{9}(2\frac{3}{11}+\frac{13}{22})$ একটি অংশ, সুতরাং আগে $2\frac{3}{11}+\frac{13}{22}$ যোগ করিয়া যোগফল $\frac{63}{22}$কে $\frac{8}{9}$এর সঙ্গে এক রেখায় লেখা হইয়াছে ; $\frac{8}{9}\times\frac{63}{22}$ লেখা উচিত নহে। ইহা সর্বদা স্মরণ রাখিও। এইরূপ স্থলে ছাত্রদের প্রায়ই ভুল হয়। আবার দেখ, '÷' চিহ্নের পরের অংশ লব ও হরে কাটাকাটি হওয়ার পরে লবের $4\times 7\times 3$ একসঙ্গে গুণ করা হইল না এবং হরের 11×5ও গুণ করা হয় নাই। তাহা না করিয়া উহারা '÷' চিহ্নের পরে থাকায় সমস্তটুকু উল্টাইয়া দেওয়া হইয়াছে, তারপর লব হরে অনেক কাটিয়া ছোট হইয়া গেল।]

উদাহরণ 2. সরল কর :

$$\frac{5\frac{5}{8}}{6\frac{3}{7}} \text{ এর } \frac{6\frac{7}{11}}{9\frac{1}{8}} \div \frac{8}{9}\left(2\frac{3}{11}+\frac{13}{22}\right) \text{ এর } \frac{90 \text{ প.}}{1 \text{ টা. } 50 \text{ প.}}$$

$\left[\frac{90 \text{ প.}}{1 \text{ টা. } 50 \text{ প.}} = \frac{90 \text{ প.}}{150 \text{ প.}} = \frac{3}{5}.\right.$ এরপর উদাহরণ 1-এর মত।]

প্রশ্নমালা 3

সরল কর :

1. $5-5\times\frac{2+1\frac{1}{5}(2+1\frac{1}{5})}{1\frac{1}{5}+2(2+1\frac{1}{5})}$ [এ. প্র. 1896]

2. $(4\frac{2}{3}-1\frac{1}{3})\times(3\frac{1}{2}-\frac{3}{8})\div(13\frac{1}{3}+7\frac{1}{2})$ এর $\frac{3\frac{1}{3}}{1\frac{1}{9}}$ [ক. প্র. 1887]

3. $\frac{2\frac{2}{3}+5\frac{7}{9}}{1\frac{1}{2}-\frac{4}{9}}\div\left(\frac{3\frac{1}{2}}{4} \text{ এর } \frac{5}{8}\right)\times\frac{2\frac{3}{16}}{32}$ [ক. প্র. 1923]

4. $\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\div\frac{4}{7}(\frac{2}{5}+\frac{3}{10})$ এর $\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}$

5. $\frac{1\frac{2}{3}}{\frac{1}{5-1\frac{1}{2}}}\times\frac{2\frac{1}{4}\times1\frac{2}{3}}{2\frac{1}{4}-1\frac{2}{3}}\times\frac{3\frac{1}{2}}{5\frac{7}{8}}\div1\frac{7}{13}$ [এ. প্র. 1917]

6. $\frac{1+2\frac{1}{2}+3\frac{1}{3}}{\frac{1}{1\frac{1}{2}}+\frac{2}{2\frac{1}{3}}+\frac{3}{3\frac{1}{4}}}\times\frac{55\frac{2}{3}\div11}{1\frac{2}{11} \text{ এর } 13\frac{2}{3}}$ [ক. প্র. 1873]

7. $(5\frac{5}{6}-\frac{5}{42})$ এর $\left(\frac{\frac{5}{6}}{3\frac{1}{3}}\div\frac{4}{3} \text{ এর } \frac{7}{8}\right)\div\frac{6 \text{ গ্রা. } 3 \text{ ডেসি গ্রা.}}{9 \text{ ডেসি গ্রাম}}$ এর $\frac{5}{7}$

8. $\frac{3\frac{3}{4}+7\frac{5}{12}}{8\frac{5}{6}-4\frac{2}{3}}-4\frac{1}{5}\div\frac{14 \text{ ডে. মি.}}{9 \text{ ডে. মি. } 9 \text{ মি.}}$ এর $\frac{2\frac{3}{4}}{1\frac{5}{9}}.$

ক্রমিক বা অবিরত ভগ্নাংশ

উদাহরণ। $7-\frac{1\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{1-\frac{1}{3}}}=7-\frac{\frac{5}{4}}{1+\frac{1}{\frac{3-1}{3}}}=7-\frac{\frac{5}{4}}{1+\frac{1}{\frac{2}{3}}}$

$=7-\frac{\frac{5}{4}}{1+\frac{1\times3}{2}}=7-\frac{\frac{5}{4}}{1+\frac{3}{2}}=7-\frac{\frac{5}{4}}{\frac{5}{2}}=7-\frac{5\times2}{4\times5}=7-\frac{1}{2}=6\frac{1}{2}.$

এখানে দেখ, প্রথমে সর্বনিম্ন স্তরের $1-\frac{1}{3}$কে সরল করিয়া $\frac{2}{3}$ হইল, পরে $\frac{1}{\frac{2}{3}}$কে সরল করিয়া $\frac{3}{2}$ হইল, পরে $1+\frac{3}{2}$কে সরল করিয়া $\frac{5}{2}$, তারপর $\frac{\frac{5}{4}}{\frac{5}{2}}$কে সরল করিয়া (এক দাঁড়িতে লিখিয়া) $\frac{1}{2}$ হইল এবং সর্বশেষে $7-\frac{1}{2}$কে সরল করিয়া $6\frac{1}{2}$ উত্তর হইল।

প্রশ্নমালা 4

সরল কর :

1. $\dfrac{1}{10+\dfrac{1}{2+\frac{1}{30}}}$ [ক. প্র. 1859]

2. $6-6\times\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\frac{3}{4}-\frac{1}{8}}}}$

3. $2-1\frac{1}{3}\times\dfrac{2}{4+\dfrac{\frac{1}{3}}{5+1\frac{1}{2}}}$ [বা. ছাত্র. 1890]

4. $8\times\dfrac{4}{1\times\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{1+\frac{3}{4}}}}$

5. $8-8\times\dfrac{2\frac{1}{5}-1\frac{2}{7}}{2-\dfrac{1}{6-\frac{1}{6}}}$ [ক. প্র. 1879]

6. $4-\dfrac{1}{4+\dfrac{1}{4-\dfrac{1}{4+\dfrac{1}{4-\frac{1}{4}}}}}$

7. $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\frac{1}{2}}}}\div\dfrac{2}{3-\dfrac{1}{2-1-\frac{1}{2}}}$

8. $\dfrac{1\frac{1}{2}+2\frac{1}{3}}{2\frac{1}{5}-1\frac{4}{5}}\div\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{1-\frac{1}{6}}}}+2\times\dfrac{1}{3-\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}}$

9. $2-\dfrac{5}{3+\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}}}}$ [ক. প্র. 1915]

10. $11+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{8\frac{1}{11}}}}$ [ক. প্র. 1883]

ভগ্নাংশ সম্বন্ধীয় বিবিধ সমাধান

উদাহরণ 1. জলপূর্ণ একটি বালতির ওজন 9 কি. গ্রা. 750 গ্রা., কিন্তু অর্ধেক জলপূর্ণ থাকিলে উহার ওজন হয় মাত্র 6 কি. গ্রা. 250 গ্রাম। জলশূন্য বালতির ওজন কত ?

প্রথম পক্ষে, বালতির ওজন + পূর্ণ বালতি জলের ওজন = 9 কি. গ্রা. 750 গ্রা.
দ্বিতীয় পক্ষে, " " + অর্ধ " " " = 6 কি. গ্রা. 250 গ্রা.

$\therefore$ (বিয়োগ করিয়া) অর্ধ বালতি জলের ওজন = 3 কি. গ্রা. 500 গ্রা.
$\therefore$ পূর্ণ বালতি জলের ওজন = 3 কি. গ্রা. 500 গ্রাম × 2 = 7 কি. গ্রা.
$\therefore$ নির্ণেয় জলশূন্য বালতিটির ওজন = 9 কি. গ্রা. 750 গ্রা. − 7 কি. গ্রা.
= 2 কিলো গ্রাম 750 গ্রাম।

উদাহরণ 2. এক ব্যক্তি তাঁহার সম্পত্তির $\frac{3}{5}$ অংশ পুত্রকে এবং অবশিষ্টাংশ কন্যাদিগকে সমান ভাগ করিয়া দেওয়ায় দেখা গেল যে, পুত্রের অংশ প্রত্যেক কন্যার অংশের 6 গুণ হইয়াছে। কন্যাদিগের সংখ্যা কত ?

পুত্র পাইয়াছে $\frac{3}{5}$ অংশ ; বাকি $1-\frac{3}{5}$ বা $\frac{2}{5}$ অংশ সকল কন্যা মিলিয়া পাইয়াছে।

আবার, 1 জন কন্যার অংশ = পুত্রের অংশের $\frac{1}{6} = \frac{3}{5}$ এর $\frac{1}{6}$ অংশ $= \frac{1}{10}$ অংশ
$\therefore$ নির্ণেয় কন্যার সংখ্যা $= (\frac{2}{5} \div \frac{1}{10})$ জন $= \frac{2 \times 10}{5}$ জন = 4 জন।

প্রশ্নমালা 5

1. কোন সম্পত্তির $\frac{2}{5}$এর $\frac{3}{4}$ অংশ আমি কিনিয়া আমার অংশের $\frac{5}{6}$ অংশ 400 টাকায় বিক্রয় করিলাম। ঐ দরে সমস্ত সম্পত্তির মূল্য কত ?

2. একটি সংখ্যায় তাহার $\frac{1}{4}$ যোগ করিলে 45 হয়। সেই সংখ্যাটি কত ?

3. একটি বাঁশের $\frac{2}{5}$ অংশ কাদায় পোঁতা ছিল, $\frac{3}{10}$ অংশ জলে এবং 6 হাত জলের উপরে ছিল। বাঁশটি মোট কত হাত লম্বা ? [উ. প্র. 1929]

4. কোন লোক একটি বাড়ীর $\frac{4}{11}$ অংশের অধিকারী। তাহার অংশের $(\frac{1}{3}+\frac{2}{5})$-এর মূল্য 112 টাকা হইলে, সমস্ত বাড়ীটির মূল্য কত ? [পা.প্র. 1922]

5. কোন নগরের লোকসংখ্যার $\frac{1}{60}$ অংশ পরিমাণ প্রতি বৎসরে জন্মগ্রহণ করে এবং $\frac{1}{90}$ অংশ পরিমাণ মারা যায়। কত বৎসরে সেই নগরের লোকসংখ্যা দ্বিগুণ হইবে ? [ছাত্র. 1894]

6. একটি কলসীর $\frac{7}{8}$ অংশ জলপূর্ণ থাকিলে 31 কিলোগ্রাম এবং $\frac{4}{5}$ অংশ জলপূর্ণ থাকিলে 29 কিলো গ্রাম 5 হে. গ্রাম ওজন হয়। শূন্য কলসীর ওজন কত ?

7. কোন ব্যক্তি স্বীয় সম্পত্তির $\frac{1}{2}$ অংশ স্ত্রীকে, $\frac{1}{3}$ অংশ পুত্রকে এবং অবশিষ্ট চারি কন্যাকে সমানভাবে ভাগ করিয়া দিলেন। পুত্রের অংশ এক কন্যার অংশ অপেক্ষা 656 টাকা 25 পয়সা অধিক হইলে ঐ ব্যক্তির সম্পত্তির মূল্য কত ?

8. ক তাহার টাকার $\frac{2}{7}$ অংশ খকে দিল, খ যাহা পাইল তাহার $\frac{1}{3}$ গকে দিল এবং গ তাহার টাকার $\frac{3}{4}$ ঘকে দিল। ঘ যদি 10 টাকা পাইয়া থাকে, তবে ক-এর কত টাকা ছিল ?

9. একটি সৈন্যদলে যত সৈন্য ছিল তাহার $\frac{2}{7}$ অংশ অসুখে মারা গেল, অবশিষ্টের $\frac{3}{20}$ অংশ যুদ্ধে নিহত হইল এবং বাকি 3400 জন পলায়ন করিল। সেই দলে মোট কত সৈন্য ছিল ?

10. এক ব্যক্তি মৃত্যুকালে আপন বিষয়ের এক-তৃতীয়াংশ স্ত্রীকে এবং অবশিষ্টাংশ সন্তানগণকে সমান ভাগ করিয়া দেওয়ায় দেখা গেল যে, স্ত্রীর প্রাপ্ত অংশ প্রত্যেক সন্তানের প্রাপ্ত অংশের 3 গুণ হইয়াছে। সন্তানের সংখ্যা কত ?
[বৃত্তি. 1924]

11. এক ব্যক্তি প্রথম দিন তাহার টাকার অর্ধেক, দ্বিতীয় দিন অবশিষ্টের অর্ধেক এবং তৃতীয় দিন অবশিষ্ট টাকার অর্ধেক দান করিয়া দেখিল তাহার কাছে আর 3 টাকা 25 পয়সা আছে। প্রথমে তাহার কত টাকা ছিল ?

দশমিক ভগ্নাংশের সরলতা সম্পাদন

উদাহরণ 1. $(\cdot438\times\cdot15)+\frac{\cdot063}{\cdot28}$কে সরল কর। [ক. প্র. 1913]

প্রথম প্রণালী :—

```
   ·438          ·28 ) ·063 ( ·225
  × ·15          28  )  6·3
  -----                 5 6
   2190                 ---
   438                   70
  -----                  56
  ·06570                 ---
                         140
                         140
```

∴ প্রদত্ত রাশি $=\cdot0657+\cdot225=\cdot2907$.

উদাহরণ 2. $\frac{\cdot625\div\cdot375}{\cdot003\times2\cdot5}$কে সরল কর (3 দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত)।

দ্বিতীয় প্রণালী (ভগ্নাংশে পরিণত করিয়া) :—

প্রদত্ত রাশি $=\frac{\frac{625}{1000}\div\frac{375}{1000}}{\frac{3}{1000}\times\frac{25}{10}}=\frac{\frac{625}{1000}\times\frac{1000}{375}}{\frac{3}{400}}=\frac{\frac{5}{3}}{\frac{3}{400}}=\frac{5\times400}{3\times3}$

$=\frac{2000}{9}=222\cdot222\ldots$।

প্রশ্নমালা 6

সরল কর :—

1. $\cdot2\{13\cdot15-15\times(\cdot25\times\cdot7-\overline{2\cdot075-2\cdot07})\}$

2. $\cdot25\times(\cdot4)^2\times12-(\cdot2)^3\times60$

3. $\cdot75\times\cdot75+\cdot25\times\cdot25+2\times\cdot75\times\cdot25$ [ক. প্র. 1940]

4. $(\cdot379\times\cdot379-\cdot021\times\cdot021)\div(\cdot379-\cdot021)$

5. $\dfrac{(6\cdot5)^2-(3\cdot15)^2}{6\cdot5+3\cdot15}$ 6. $\dfrac{2\cdot79\times2\cdot79-\cdot21\times\cdot21}{2\cdot79-\cdot21}$

7. $\dfrac{1\cdot49\times14\cdot9-\cdot41\times4\cdot1}{14\cdot9-4\cdot1}$ 8. $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{3+\frac{1}{4}}}\div\dfrac{5\cdot2}{\cdot051}$ [ঢা. প্র. '28]

9. $\dfrac{\cdot0075\times2\cdot1}{\cdot0175}+\dfrac{4\cdot2255\times\cdot064}{\cdot00032}$ 10. $\dfrac{\cdot7\times\cdot7\times\cdot7-\cdot3\times\cdot3\times\cdot3}{\cdot7\times\cdot7+\cdot7\times\cdot3+\cdot3\times\cdot3}$

11. $\dfrac{22\cdot5}{1\cdot5}\times\dfrac{10\cdot5}{\cdot35}\times\dfrac{79\cdot2}{13\cdot2}$ এর $\dfrac{8\cdot52}{2\cdot13}\div3$ এর $\dfrac{7\cdot5}{\cdot15}$

তিন দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত ফল নির্ণয় কর :—

12. $\dfrac{2\cdot5\times3\cdot7}{\cdot03+\cdot1}$ 13. $\dfrac{3\cdot75\div6\cdot25}{\cdot89-\cdot19}$ 14. $\dfrac{2\cdot02\times2\cdot08}{2\cdot16}$

মান নির্ণয় কর :—

15. 1 টাকা 25 পয়সার $\dfrac{(3\cdot47)^2-(2\cdot53)^2}{\cdot94}$

16. $\dfrac{2\frac{1}{5}-1\frac{2}{3}}{3\frac{1}{3}+1\frac{2}{5}}\div\dfrac{\frac{2}{7}-\frac{1}{8}}{\frac{2}{7}+\frac{1}{8}}+\dfrac{\cdot05\times\cdot7}{\cdot071}$ এর $\dfrac{3\text{ মি. }9\text{ ডেসি মি.}}{2\text{ মি. }7\text{ ডেসি মি.}}$ ।

আবৃত্ত বা পৌনঃপুনিক দশমিক
(Recurring Decimals)

পূর্ব শ্রেণীতে তোমরা আবৃত্ত দশমিক শিখিয়াছ। এখানে ঐ সম্বন্ধে আরও আলোচনা করা হইতেছে।

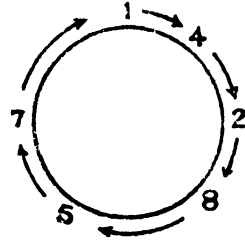
সামান্য ভগ্নাংশকে আবৃত্ত দশমিকে প্রকাশ : কোন ভগ্নাংশকে দশমিকে পরিণত করিবার জন্য ভাগকার্য (লবকে হর দিয়া ভাগ) করিবার সময় যখনই কোন ভাগশেষ পূর্বের কোন ভাগশেষের সমান হইবে, তখনই ভাগকার্য বন্ধ করিতে হয়। পূর্বের সেই ভাগশেষটির পরই ভাগফলে যে অঙ্ক হইয়াছে তাহার উপর এবং ভাগফলের শেষ অঙ্কের উপর আবৃত্তিসূচক বিন্দু বসাইলে নির্ণেয় দশমিক ভগ্নাংশ হইবে।

উদাহরণ। $\frac{5}{37}$কে দশমিকে প্রকাশ কর।

```
37 ) 5·00··· ( ·135
     37
     ---
     130
     111
     ---
      190
      185
      ---
        5
```
$\therefore \frac{5}{37} = \cdot\dot{1}3\dot{5}$.

[এখানে, তৃতীয় ভাগশেষ 5 পূর্বের 5-এর সঙ্গে মিলিয়া যাওয়ায় ভাগকার্য বন্ধ করা হইল এবং 1 ও 5-এর উপর বিন্দু বসাইয়া $\cdot\dot{1}3\dot{5}$ উত্তর হইল।]

[**দ্রষ্টব্য:** যদি অঙ্কে $3\frac{5}{37}$ থাকিত, তবে প্রথমে $\frac{5}{37}$কে দশমিকে পরিণত করিয়া $\cdot\dot{1}3\dot{5}$ হইত ; সুতরাং $3\frac{5}{37} = 3\cdot\dot{1}3\dot{5}$ হইত।]

'7' হরবিশিষ্ট ভগ্নাংশের তুল্যমান আবৃত্ত দশমিক: যে সকল ভগ্নাংশের হর 7, তাহাদের তুল্যমান দশমিক-গুলি বিশুদ্ধ আবৃত্ত দশমিক হয় এবং উহাদের আবৃত্তাংশে 1, 4, 2, 8, 5, 7 এই অঙ্ক কয়টি থাকে। ঐ সংখ্যাগুলি একটি বৃত্তের চারিদিকে বসাও। এক্ষণে, পর পর 1, 2, 4, 5, 7 ও 8 হইতে আরম্ভ করিয়া ঘড়ির কাঁটা যে দিকে ঘুরে সেইরূপ ঘুরিয়া পড়িয়া গেলে (6টি করিয়া অঙ্ক) যথাক্রমে $\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}$ ও $\frac{6}{7}$-এর সমান আবৃত্ত দশমিক পাইবে। দশমিক বিন্দুর পর ঐ অঙ্কগুলি বসাইয়া প্রথম ও শেষ অঙ্কের উপর আবৃত্তিসূচক বিন্দু বসাইবে।

যথা, $\frac{1}{7} = \cdot\dot{1}4285\dot{7}$, $\frac{2}{7} = \cdot\dot{2}8571\dot{4}$, $\frac{3}{7} = \cdot\dot{4}2857\dot{1}$, ইত্যাদি।

20. বিবিধ কৌশলে (কোন কোন স্থলে) **আবৃত্ত দশমিকে পরিবর্তন :** 9, 99, 999···এবং 90, 900, 990···ইত্যাদি হরবিশিষ্ট ভগ্নাংশকে দশমিকে পরিণত করার প্রণালী তোমরা পূর্ব শ্রেণীতে শিখিয়াছ। নিম্নে উদাহরণ দেখ।

$\frac{5}{9} = \cdot\dot{5}$; $\frac{8}{99} = \cdot\dot{0}\dot{8}$; $\frac{17}{99} = \cdot\dot{1}\dot{7}$; $\frac{2}{999} = \cdot\dot{0}0\dot{2}$, ইত্যাদি ;

$\frac{7}{90} = \cdot0\dot{7}$, $\frac{1}{900} = \cdot00\dot{1}$, $\frac{11}{990} = \cdot0\dot{1}\dot{1} = \cdot0\dot{1}$, ইত্যাদি।

অনুরূপে 3, 30, 33···ইত্যাদি বা 11, 111, 110 প্রভৃতি হরবিশিষ্ট ভগ্নাংশকে আবৃত্ত দশমিকে পরিণত করা যায়। যথা—

$\frac{2}{3} = \frac{2 \times 3}{3 \times 3} = \frac{6}{9} = \cdot\dot{6}$, $\frac{7}{330} = \frac{21}{990} = \cdot0\dot{2}\dot{1}$;

$\frac{5}{11} = \frac{45}{99} = \cdot\dot{4}\dot{5}$, $\frac{7}{111} = \frac{63}{999} = \cdot\dot{0}6\dot{3}$, $\frac{1}{110} = \frac{9}{990} = \cdot0\dot{0}\dot{9}$, ইত্যাদি।

প্রশ্নমালা 7

পৌনঃপুনিক দশমিকে প্রকাশ কর ঃ—

1. $3\frac{1}{6}$ 2. $\frac{7}{12}$ 3. $4\frac{7}{120}$ 4. $7\frac{2}{99}$
5. $\frac{117}{9999}$ 6. $\frac{5}{3333}$ 7. $\frac{4321857}{999}$ 8. $\frac{20}{41}$
9. $\cdot 21\frac{4}{7}$ 10. $\cdot 03\frac{1}{7}$.

আবৃত্ত দশমিককে সামান্য ভগ্নাংশে পরিবর্তন।

পূর্বে বিশুদ্ধ দশমিককে সামান্য ভগ্নাংশে পরিণত করিবার প্রণালী আমরা শিখিয়াছি। এক্ষণে আবৃত্ত দশমিককে সামান্য ভগ্নাংশে পরিণত করিবার প্রণালী স্থির করিতে হইবে।

(ক) বিশুদ্ধ আবৃত্ত দশমিককে সামান্য ভগ্নাংশে পরিবর্তন।

উদাহরণ। $\cdot\dot{5}$ কে সামান্য ভগ্নাংশে পরিণত কর।

এখানে $\cdot\dot{5} = \cdot 5555\cdots\cdots$

অতএব, 10 গুণ $\cdot\dot{5} = 10 \times \cdot\dot{5} = 5\cdot 5555\cdots\cdots$ }
এবং 1 গুণ $\cdot\dot{5} = 1 \times \cdot\dot{5} = \cdot 5555\cdots\cdots$ } এই দুইটির বিয়োগফল দেখ।

$\therefore$ (10 − 1) বা 9 গুণ $\cdot\dot{5} = 5\cdot 0000\cdots = 5$, $\therefore$ $\cdot\dot{5} = \frac{5}{9}$.

[**দ্রষ্টব্য ঃ** কোন সংখ্যার 10 গুণ হইতে সেই সংখ্যার 1 গুণ বিয়োগ করিলে, তাহারই 9 গুণ অবশিষ্ট থাকে।]

(খ) মিশ্র পৌনঃপুনিক দশমিককে (অর্থাৎ যাহাতে অনাবৃত্ত অংশ আছে) **সামান্য ভগ্নাংশে পরিবর্তন।**

উদাহরণ। $7\cdot 1\dot{2}\dot{8}$কে সামান্য ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

$7\cdot 1\dot{2}\dot{8} = 7\cdot 1282828\ldots\ldots$

$\therefore$ 1000 গুণ $7\cdot 1\dot{2}\dot{8} = 7128\cdot 2828\cdots\cdots$

এবং 10 গুণ $7\cdot 1\dot{2}\dot{8} = 71\cdot 2828\ldots\ldots$

$\therefore$ 990 গুণ $7\cdot 1\dot{2}\dot{8} = 7057$ (বিয়োগ করিয়া)

$\therefore$ $7\cdot 1\dot{2}\dot{8} = \frac{7057}{990} = 7\frac{127}{990}$

[এখানে 7কে প্রথমে ছাড়িয়া $\cdot 1\dot{2}\dot{8}$কে ভগ্নাংশে পরিণত করিয়া সেই ভগ্নাংশের সঙ্গে 7 পূর্ণসংখ্যা জুড়িয়া দিয়াও ইহাকে নির্ণেয় ভগ্নাংশে পরিণত করা যায়।]

উপরের উদাহরণ হইতে নিম্নের **নিয়মটি** পাওয়া গেল :—

দশমিক বিন্দু ও পৌনঃপুনিক সূচক বিন্দু ছাড়িয়া দিয়া যে সংখ্যা হয়, তাহা হইতে আবৃত্ত অংশের পূর্ব পর্যন্ত **সমস্ত** অংশটুকু যে সংখ্যা তাহা বিয়োগ কর। সেই বিয়োগফল হইবে নির্ণেয় ভগ্নাংশের **লব**। আর আবৃত্ত অংশে যতগুলি অঙ্ক আছে ততগুলি 9 লইয়া তাহাদের ডানদিকে অনাবৃত্ত অংশে যতগুলি অঙ্ক আছে ততগুলি শূন্য বসাইয়া যে সংখ্যা হইবে, তাহাই ঐ ভগ্নাংশের **হর**।

প্রশ্নমালা 8

সামান্য ভগ্নাংশে পরিণত কর :—

1. $\cdot 000\dot{7}$ 2. $62\cdot 73\dot{2}8\dot{1}$ 3. $\cdot 0\dot{3}2\dot{4}$
4. $3\cdot\dot{8}5714\dot{2}$ 5. $10\cdot 6\dot{2}\dot{8}$ 6. $3\cdot 1\dot{0}7\dot{6}$
7. $33\cdot\dot{3}\dot{3}$ 8. $\cdot 02\dot{0}2\dot{8}$; $2\cdot\dot{9}$; $\cdot\dot{9}\dot{9}$; $\cdot 0\dot{9}$

সরল কর :—

9. $\dfrac{\cdot\dot{8}\dot{1}\times\cdot 005}{\cdot 45}$ [ক. প্র. 1920] 10. $\dfrac{4\cdot\dot{4}-2\cdot\dot{8}\dot{3}}{1\cdot\dot{6}+2\cdot\dot{6}2\dot{9}}$ [ঢা. বো. 1947]

11. $13\frac{9}{19}\div 7\frac{5}{57}$ এর $\dfrac{1}{\cdot 41\dot{6}\times 1\cdot 2625}$ [প. ব. বো. 1953]

12. $\dfrac{(3\cdot 71-1\cdot 908)+7\cdot 03}{2\cdot\dot{2}-\frac{74}{333}}$ [ছাত্র. 1894]

আবৃত্ত দশমিকের যোগ ও বিয়োগ।

আবৃত্ত দশমিকের যোগ বা বিয়োগ করিবার সময় প্রথমে প্রদত্ত দশমিকগুলিকে সদৃশ করিতে হয়। তারপর ঐগুলি নীচে নীচে রাখিবার সময় তদবস্থ অংশের পর একটি এবং আবৃত্তাংশের পর একটি লম্ব রেখা টানিতে হয়। ঐ শেষ রেখার পর প্রত্যেক দশমিকের আবৃত্ত অংশের অন্ততঃ আরও দুইটি অঙ্ক লিখিতে হয়। তারপর সাধারণ দশমিকের মত যোগ বা বিয়োগ করিতে হয়। যোগ বা বিয়োগফলে শেষ লম্ব রেখাটির পরের অঙ্কগুলি পরিত্যাগ করিতে হয়। এখন দুই লম্ব রেখার মধ্যস্থিত অঙ্কগুলির প্রথমটির ও শেষটির উপরে আবৃত্তি-সূচক বিন্দু বসাইলেই নির্ণেয় যোগ বা বিয়োগফল পাওয়া যাইবে।

উদাহরণ 1. $8\cdot 3\dot{2}$, $13\cdot 14\dot{3}\dot{6}$, $\cdot 047\dot{3}0\dot{1}$ ও $\cdot 2347$-এর যোগফল কত ?

প্রদত্ত দশমিকগুলির মধ্যে তদবস্থ অংশের সর্বাধিক অঙ্ক-সংখ্যা 4 এবং আবৃত্তাংশে অঙ্ক-সংখ্যা 1, 2 ও 3এর ল. সা. গু. 6 (চতুর্থ দশমিকে কোন আবৃত্তাংশ নাই)।

এক্ষণে,				
$8\cdot 3\dot{2}$	$= 8\cdot 3222$	222222	22
$13\cdot 14\dot{3}\dot{6}$	$= 13\cdot 1436$	363636	36
$\cdot 047\dot{3}0\dot{1}$	$= \cdot 0473$	013013	01
$\cdot 2347$	$= \cdot 2347$		
	$21\cdot 7478$	598871	59

$\therefore$ নির্ণেয় যোগফল $= 21\cdot 7478\dot{5}9887\dot{1}$.

উদাহরণ 2. $271\cdot 0\dot{3}\dot{2}$ হইতে $77\cdot 06\dot{4}25\dot{1}$ বিয়োগ কর।

$271\cdot 0\dot{3}\dot{2}$	$= 271\cdot 03$	2323	232
$77\cdot 06\dot{4}25\dot{1}$	$= 77\cdot 06$	4251	425
	$193\cdot 96$	8071	807

$\therefore$ নির্ণেয় বিয়োগফল $= 193\cdot 96\dot{8}07\dot{1}$.

প্রশ্নমালা 9

সদৃশ আবৃত্ত দশমিকে পরিণত কর :—

1. $\cdot 2\dot{7}$, $\cdot\dot{4}3\dot{7}$ 2. $\cdot 0\dot{3}2\dot{1}$, $\cdot 01\dot{7}\dot{6}$

3. $4\cdot 2\dot{0}\dot{1}$, $21\cdot 33\dot{1}23\dot{4}$ 4. $\cdot 324\dot{7}\dot{2}$, $2\cdot\dot{3}$, $\cdot 02\dot{3}\dot{1}$, $4\cdot\dot{2}\dot{7}$

চতুর্থ স্থান হইতে আবৃত্তাংশ আরম্ভ করিয়া লিখ :—

5. $2\cdot 0\dot{7}\dot{6}$ 6. $\cdot 00\dot{7}2\dot{3}$ 7. $\cdot 1\dot{7}35\dot{6}$

8. $\cdot\dot{1}4285\dot{7}$ 9. $12\cdot\dot{0}12\dot{3}$

যোগ কর :—

10. $2\cdot 3\dot{7}$, $4\cdot 01\dot{2}\dot{7}$, $6\cdot\dot{2}1\dot{4}$ 11. $\cdot 021$, $\cdot 02\dot{9}\dot{6}$, $\cdot 081\dot{7}\dot{2}$

12. $327+\cdot 2\dot{1}\dot{7}+2\cdot 1\dot{7}2\dot{5}+\cdot 024$

13. $12\cdot 32\dot{1}\dot{4}+7\cdot 4\dot{1}74\dot{1}+8\cdot 31\dot{7}\dot{4}$

বিয়োগ কর :—

14. $12\cdot 2\dot{3}\dot{7}$, $7\cdot 83\dot{1}$ 15. $23\cdot 1\dot{0}7\dot{6}-18\cdot 32\dot{7}\dot{3}$

16. $\cdot 732-\cdot 03\dot{4}2\dot{6}$ 17. $718-\cdot 0\dot{1}7\dot{6}$

18. $21\cdot 2\dot{1}\dot{7}-17\cdot 873$

সরল কর :—

19. $71+\cdot 0\dot{2}\dot{1}-\cdot 785-2\cdot 3\dot{2}04\dot{1}+2\cdot 7\dot{1}\dot{6}$

20. $523\cdot\dot{1}7\dot{6}-217\cdot 2\dot{3}\dot{4}+7\cdot 2\dot{1}\dot{5}-123\cdot 1\dot{3}\dot{7}$

21. $6\cdot\dot{7}12\dot{3}+7\cdot 12\dot{3}\dot{4}-2\cdot\dot{7}\dot{6}-8\cdot 92\dot{3}$

22. $16\cdot 023-\cdot 2\dot{1}\dot{4}-7\cdot 23\dot{5}+14.$

আবৃত্ত দশমিকের গুণ ও ভাগ

গুণন :—আবৃত্ত দশমিকের গুণ করিবার সময় গুণ্য ও গুণক দুইটিকে সামান্য ভগ্নাংশে পরিণত করিয়া তাহাদের গুণের কার্য করিবে এবং প্রাপ্ত গুণফলটিকে দশমিকে প্রকাশ করিবে।

উদাহরণ। $\cdot 2\dot{3}$কে $\cdot\dot{1}\dot{5}$ দ্বারা গুণ কর।

$$\cdot 2\dot{3}\times\cdot\dot{1}\dot{5}=\frac{23-2}{90}\times\frac{15}{99}=\frac{21}{90}\times\frac{15}{99}=\frac{7}{2\times 99}=\frac{7}{198}=\cdot 0\dot{3}\dot{5}.$$

ভাগ :—আবৃত্ত দশমিকের ভাগে ভাজ্য ও ভাজককে সামান্য ভগ্নাংশে পরিণত করিয়া ভাগ করিতে হয়। ঐ ভাগফলকে দশমিকে প্রকাশ করিলে নির্ণেয় ভাগফল পাওয়া যাইবে।

উদাহরণ 1. $\cdot 1\dot{9}\dot{0} \div 4\cdot 2 =$ কত ?

$$\cdot 1\dot{9}\dot{0} \div 4\cdot 2 = \frac{190-1}{990} \div \frac{42}{10} = \frac{189}{990} \times \frac{10}{42} = \frac{1}{22} = \cdot 0\dot{4}\dot{5}.$$

(**অন্য প্রণালী**) $\cdot 1\dot{9}\dot{0} \div 4\cdot 2 = \cdot 190909090\cdots \div 4\cdot 2$

$= 1\cdot 90909090\cdots \div 42 = \cdot 0\dot{4}\dot{5}.$

উদাহরণ 2. $1\cdot\dot{3}\dot{5}$কে $2\cdot\dot{0}\dot{3}$ দিয়া ভাগ কর।

$$1\cdot\dot{3}\dot{5} \div 2\cdot\dot{0}\dot{3} = \frac{135-1}{99} \div \frac{203-2}{99} = \frac{134}{99} \div \frac{201}{99} = \frac{134}{201} = \frac{2}{3} = \cdot\dot{6}.$$

আবৃত্ত দশমিকের সরলতা সম্পাদন

উদাহরণ। সরল কর :
$$\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}{\frac{1}{4\frac{1}{2}}+\frac{1}{3\frac{1}{2}}-\frac{1}{2\frac{1}{2}}} \div \frac{\cdot 02\dot{8} \times \cdot 09 \times 3\cdot 5}{2\cdot 2\dot{6} - \cdot 008 \times \cdot 1}.$$
[ক. প্র. 1948]

$$\text{প্রদত্ত ভগ্নাংশ} = \frac{\frac{6+4+3}{12}}{\frac{2}{9}+\frac{2}{7}-\frac{2}{5}} \div \frac{\frac{26}{900} \times \frac{9}{100} \times \frac{35}{10}}{\frac{204}{90} \times \frac{8}{1000} \times \frac{1}{10}}$$

$$= \frac{\frac{13}{12}}{\frac{70+90-126}{315}} \div \frac{\frac{91}{100000}}{\frac{17}{75\times 125}} = \frac{\frac{13}{12}}{\frac{34}{315}} \div \frac{91 \times 75 \times 125}{100000 \times 17}$$

$$= \frac{13 \times 315}{12 \times 34} \times \frac{100000 \times 17}{91 \times 75 \times 125} = \frac{16}{8} = 2.$$

প্রশ্নমালা 10

গুণ কর :—

1. $6\cdot\dot{2} \times 3\cdot 15$
2. $\cdot 208\dot{3} \times 4\cdot\dot{6}$
3. $7\cdot\dot{8}\dot{2} \times 18$
4. $\cdot\dot{6}3\dot{0} \times 12\cdot\dot{9}$
5. $\cdot 3\dot{2}\dot{7} \times \cdot 58\dot{8}$
6. $4\cdot\dot{4} \times \cdot 28\dot{8}\dot{6}$

ভাগ কর :—

7. $15\cdot\dot{2}\dot{5} \div 5$
8. $0\cdot\dot{2}\dot{8} \div 0\cdot 2875$
9. $\cdot 125 \div \cdot 0\dot{2}8571\dot{4}$
10. $\cdot 086\dot{2} \div 3\cdot\dot{9}\dot{1}$
11. $7\cdot\dot{2}\dot{7} \div \cdot 0\dot{1}6\dot{5}$

সরল কর :—

12. $\frac{8}{3}\times\frac{0.8\dot{5}}{1.\dot{2}}\times 7.\dot{1}4285\dot{7}\times 1.875$ [ক. প্র. 1941]

13. $\frac{2.4\dot{6}-2.\dot{3}\dot{0}}{.\dot{3}+.1\dot{2}\dot{7}}+\frac{4\frac{1}{3}}{19}$ [ক. প্র. 1912]

14. $\frac{.2\dot{4}}{.125}$ এর $\frac{3.125}{2.16}\div\frac{187.5}{3.42}$ এর $\frac{2.\dot{2}}{1.5}$ [ক. প্র. 1886]

15. $\dfrac{1}{.2+\dfrac{1}{.3+\dfrac{1}{.4}}}$

16. $\dfrac{1\frac{1}{2}+2\frac{2}{3}+3\frac{3}{4}}{\frac{1}{1\frac{1}{2}}+\frac{1}{2\frac{2}{3}}+\frac{1}{3\frac{3}{4}}}\div\dfrac{.2\dot{1}}{.034\dot{8}}$ [ক. প্র. 1948]

17. $\frac{15.\dot{6}+7-.\dot{8}}{3\times 7.\dot{4}\times .25}+\left\{37+\frac{3.7\dot{0}3\dot{7}}{100}\right\}\times 0.27$ [ক. প্র. 1934]

18. $\frac{2.\dot{2}\dot{7}\text{ এর }2.8}{1.\dot{8}\dot{6}}+\left\{\frac{4.\dot{4}-2.8\dot{8}}{1.\dot{8}+2.62\dot{9}}\times 8.2\right\}$ [ঢা. বো. 1934]

19. $\frac{1.\dot{8}\times 1.\dot{8}\times 1.\dot{8}-1}{1.\dot{8}\times 1.\dot{8}\times 1.\dot{8}+1}$

20. $\frac{.\dot{2}\times .\dot{2}\times .\dot{2}+.0\dot{2}\times .0\dot{2}\times .0\dot{2}}{.\dot{2}\times .\dot{2}-.\dot{2}\times .0\dot{2}+.0\dot{2}\times .0\dot{2}}$

21. $\frac{0.\dot{5}\dot{2}}{0.\dot{1}5\dot{4}}\div\frac{26.\dot{2}\dot{6}}{4.\dot{9}0\dot{4}}+\dfrac{2}{1+\dfrac{3}{1-.\dot{3}}}$ [ক. প্র. 1833]

22. $\frac{.0\dot{0}7\dot{4}\times .135}{.0\dot{0}\dot{8}\times .09}+\frac{3\frac{1}{2}\div 2\frac{1}{2}\times 1\frac{1}{2}}{3\frac{1}{2}\div 2\frac{1}{2}\text{ এর }1\frac{1}{2}}\cdot\frac{5}{18}$ [ক. প্র. 1944]

23. $\dfrac{5}{5+\dfrac{5}{5+\frac{1}{5}}}+\dfrac{1\text{ টা. }40\text{ প.}}{1\text{ টা. }24\text{ প.}}\div\frac{1}{7}(2.\dot{4}+4.\dot{5})^2$

24. $\dfrac{5}{5+\dfrac{5}{5+\frac{1}{5}}}\times\dfrac{6\frac{1}{5}}{5\frac{1}{5}}+\dfrac{3\text{ টা. }84\text{ পয়সার }5.208\dot{3}}{45\text{ পয়সার }.1\dot{8}\times 1000\times\frac{4}{17}}$

25. $\frac{3.\dot{3}}{6.0625}$ এর $\frac{9.7}{2.4\dot{2}}\div\frac{2.5}{1.09}\left(7.25+2.75\right)\times\frac{8\text{ টা.}}{25\text{ টা. }60\text{ প.}}$

26. এক ব্যক্তি কোন সম্পত্তির $.0\dot{3}$ অংশের $.\dot{3}$এর অধিকারী হইয়া আপন অংশের $.2\dot{3}$ অংশ 70 টাকায় বিক্রয় করিল। ঐ হারে সমস্ত সম্পত্তির মূল্য কত এবং তাহার অংশের মূল্য কত ? [ছাত্র 1895]

27. ক ও খ-এর মোট 132টি ঘোড়া আছে। ক-এর ঘোড়ার সংখ্যার $.25$, খ-এর ঘোড়ার সংখ্যার $.\dot{1}4285\dot{7}$এর সমান। কাহার কয়টি ঘোড়া আছে ?

ঐকিক নিয়ম (Unitary Method)

তোমরা পূর্ব শ্রেণীতে ঐকিক নিয়ম সম্বন্ধে শিখিয়াছ যে, একজাতীয় কতকগুলি দ্রব্যের মূল্য, ওজন প্রভৃতি জানা থাকিলে তাহা হইতে ঐকিক নিয়মে ঐ জাতীয় অন্য সংখ্যক দ্রব্যের মূল্য, ওজন প্রভৃতি নির্ণয় করা যায়। প্রথমে ভাগ করিয়া একটি দ্রব্যের মূল্য বা ওজন বাহির করিয়া সেই মূল্য বা ওজনকে গুণ করিয়া অন্য সংখ্যক দ্রব্যের মূল্য বা ওজন নির্ণয় করা হয়।

স্থলবিশেষে **ঐ নিয়মের বিপরীত প্রক্রিয়াও** হইয়া থাকে। যথা—

(3) 1 জনে যে কার্য 12 দিনে করে, 4 জনে তাহা কম সময়ে অর্থাৎ 12 দিনের 4 ভাগের এক ভাগ সময়ে করিবে। সুতরাং 4 জনে $(12 \div 4)$ বা 3 দিনে করিবে। লক্ষ্য কর, এখানে 4 গুণ লোক আছে, কিন্তু 4 দিয়া গুণ করা হয় নাই, ভাগ করা হইয়াছে। কারণ, লোক বেশী থাকিলে কম দিনে কাজ হয়।

(4) 4 জনে যে কার্য 6 দিনে করে 1 জনে তাহা করিতে বেশী সময় লইবে। 4 জনের স্থানে 1 জন কার্য করিলে 4 গুণ সময় লাগিবে, সুতরাং 1 জনে ঐ কার্য (6×4) বা 24 দিনে করিবে। লোক যতভাগ হইবে কোন কার্য করিতে সময় ততগুণ লাগিবে।

ঐ উদাহরণগুলির পার্থক্য বিশেষভাবে লক্ষ্য কর। এইবার নিম্নের সমাধান-গুলি দেখ।

উদাহরণ 1. কোন শিবিরে 4000 সৈন্যের 6 সপ্তাহের খাদ্য আছে ; 2 সপ্তাহ পরে উহাতে আরও 2000 সৈন্য আসিলে অবশিষ্ট খাদ্যে আর কত সপ্তাহ চলিবে ?

2 সপ্তাহ পরে যখন 2000 সৈন্য বাড়িল তখন মোট 4000 সৈন্যের $(6-2)$ অর্থাৎ 4 সপ্তাহের খাদ্য অবশিষ্ট ছিল। আর তখন হইল $4000+2000$ বা 6000 সৈন্য। **অতএব অঙ্কটি** এই দাঁড়াইল যে, 4000 লোকের যে খাদ্যে 4 সপ্তাহ চলে তাহাতে 6000 লোকের কত সপ্তাহ চলিবে ?

4000 লোকের অবশিষ্ট খাদ্যে 4 সপ্তাহ চলে

$\therefore$ 1 „ „ „ 4×4000 সপ্তাহ চলে

$\therefore$ 6000 „ „ „ $\frac{4 \times 4000}{6000}$ বা $2\frac{2}{3}$ সপ্তাহ চলিবে।

উদাহরণ 2. 4 জন পুরুষ বা 10 জন বালক যে কার্য 6 দিনে সম্পন্ন করে, 6 জন পুরুষ এবং 9 জন বালকে তাহা কত দিনে সম্পন্ন করিবে ?

4 জন পুরুষ বা 10 জন বালক বলাতে বুঝাইতেছে যে,

4 জন পুরুষের কার্য $=10$ জন বালকের কার্য,

$\therefore$ 1 „ „ „ $=\frac{10}{4}$ „ „ „

$\therefore$ 6 „ „ „ $=\frac{10}{4} \times 6$ বা 15 জন বালকের কার্য।

অতএব, 6 জন পুরুষ এবং 9 জন বালক $=15$ জন বালক $+9$ জন বালক

$=24$ জন বালক।

10 জন বালক কার্যটি 6 দিনে করে

∴ 1 " " " 6×10 দিনে করিবে

∴ 24 " " " $\frac{6\times10}{24}$ বা $2\frac{1}{2}$ দিনে করিবে।

উদাহরণ 3. একটি কার্য 60 দিনে করিবার জন্য 35 জন লোক নিযুক্ত করা হইল। 32 দিন পরে দেখা গেল কাজটির $\frac{2}{5}$ অংশ হইয়াছে। তখন অতিরিক্ত কত জন লোক নিযুক্ত করিলে কাজটি যথাসময়ে সম্পন্ন হইবে ?

60 দিন − 32 দিন = 28 দিন অবশিষ্ট আছে।

$1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$ অংশ কাজ অবশিষ্ট আছে।

32 দিনে $\frac{2}{5}$ অংশ কাজ করে 35 জনে

∴ " " সমস্ত কাজটি " $\frac{35\times5}{2}$ জনে

∴ 1 " " " " $\frac{35\times5\times32}{2}$ জনে

∴ 28 " " " " $\frac{35\times5\times32}{2\times28}$ জনে

∴ " " $\frac{3}{5}$ অংশ কাজ " $\frac{35\times5\times32\times3}{2\times28\times5}$ জনে বা 60 জনে

∴ (60 − 35) বা 25 জন অতিরিক্ত লোক লাগিবে।

প্রশ্নমালা 11

1. যে খাদ্যে 8 জনের 12 দিন চলে তাহাতে 6 জনের কত দিন চলিবে ?

2. 8 মি. 5 ডেসি মি. সাটিনের মূল্য 9 টাকা 35 পয়সা হইলে, 15 মিটার সাটিন কিনিতে কত লাগিবে ?

3. 27 আর জমির খাজনা 40 টাকা 50 পয়সা হইলে, 37 টাকা 50 প. খাজনা দিয়া কত জমি পাওয়া যাইবে ?

4. 15 জন লোক একটি কার্য 12 দিনে করিতে পারে। 18 জনে তাহা কত দিনে করিবে ?

5. কোন বাড়ী মেরামত করিতে 40 জন মজুরের 15 দিন সময় লাগিয়াছিল। কতজন মজুর লাগাইলে উহার $\frac{5}{6}$ সময়ে কার্যটি করা যাইত ?

6. কোন এঞ্জিন ঘণ্টায় 36 কি. মি. বেগে যাইলে 8 ঘণ্টায় একটি স্টেশনে পৌছায়। ঘণ্টায় 40 কি. মি. বেগে যাইলে সেখানে কতক্ষণে পৌছিতে পারিবে ?

7. 25 জন লোকে 16 দিনে একটি কার্য করিতে পারে। আর কতজন লোক লাগাইলে 10 দিনে ঐ কার্যটি শেষ হইবে ?

8. 25 জন লোকে 14 দিনে একটি কার্য করিতে পারে। 4 দিন পরে তাহাদের সহিত আরও 5 জন লোক যোগ দিলে অবশিষ্ট কার্য কত দিনে শেষ হইবে ?

9. 18 জন লোক 13 দিনে একটি কার্য করিতে পারে, 3 দিন পরে যদি 3 জন লোক চলিয়া যায়, তবে অবশিষ্ট লোকে আর কতদিনে কার্যটি শেষ করিবে ?

10. কোন অবরুদ্ধ দুর্গে 1250 জন সৈন্যের 18 দিনের খাদ্য ছিল। 2 দিন পরে 250 জনের মৃত্যু হইলে, অবশিষ্ট খাদ্যে আর কতদিন চলিবে?

11. একটি শিবিরে 420 জন সৈন্যের 35 দিনের খাদ্য আছে। 5 দিন পরে তথায় আরও 210 জন সৈন্য যোগ দিল। অবশিষ্ট খাদ্যে আর কতদিন চলিবে? [ক. প্র. 1918]

12. 8 জন পুরুষ বা 12 জন স্ত্রীলোক 25 দিনে একটি কার্য করিতে পারে। 6 জন পুরুষ এবং 11 জন স্ত্রীলোক কতদিনে কার্যটি সম্পন্ন করিবে? [ক. প্র. 1928]

13. 36 জন বালক 20 দিনে একটি কার্য করিতে পারে। 2 দিন পরে আর কতজন বালক নিযুক্ত করিলে আর 12 দিনে কার্যটি সম্পন্ন হইবে?

14. 14 দিনে একটি কার্যের $\frac{7}{10}$ অংশ করা গেলে, কতদিনে উহার $\frac{3}{5}$ অংশ করা যায়?

15. কোন সৈন্যশিবিরে 750 জনের 20 সপ্তাহের খাদ্য ছিল। 4 সপ্তাহ পরে আরও 450 জন সৈন্য ঐ শিবিরে যোগদান করিলে ঐ খাদ্যে কত সপ্তাহ চলিবে? [ক. প্র. 1927]

16. যদি 4 জন পুরুষ বা 5 জন স্ত্রীলোক 12 দিন কর্ম করিয়া 15 টাকা উপার্জন করে, তবে 5 জন পুরুষ এবং 4 জন স্ত্রীলোক 32 দিন কর্ম করিয়া কত উপার্জন করিবে? [ছাত্র. 1893]

17. প্রতিদিন 8 ঘণ্টা কাজ করিয়া 50 জনে একটি কাজ 12 দিনে করিতে পারে। প্রত্যহ কত ঘণ্টা খাটিয়া 60 জন লোকে 16 দিনে উহার দ্বিগুণ কাজ করিবে? [ঢা. বো. 1930]

18. কোন দুর্গে 2200 লোকের 50 দিনের খাদ্য ছিল। 17 দিন পরে আরও কতকগুলি লোক তথায় আসায় আর 20 দিনে খাদ্য শেষ হইল। পরে কত লোক আসিয়াছিল? [ঢা. বো. 1940]

19. এক কিলোগ্রাম গমের মূল্য যখন 60 পয়সা তখন 4 পয়সা মূল্যের রুটির ওজন 50 গ্রাম। এক কি. গ্রাম গমের মূল্য 1 টা. 25 প. হইলে 5 পয়সা মূল্যের রুটির ওজন কত হইবে?

20. 40 জন লোক দিন 10 ঘণ্টা কাজ করিয়া $8\frac{1}{2}$ দিনে 190 আর জমির শস্য কাটিতে পারে। প্রত্যহ 8 ঘণ্টা কাজ করিয়া 17 জন লোক 50 দিনে কত আর জমির শস্য কাটিবে?

21. টাকায় 2·4 কিলোগ্রাম চাউল পাওয়া গেলে 17 জন মজুরের মাসিক বেতন 850 টাকা হয়। প্রতি মিরিয়া গ্রাম চাউলের মূল্য $6\frac{1}{4}$ টাকা হইলে সেই অনুপাতে প্রত্যেক মজুরের মাসিক বেতন কত হইবে?

22. 24 জন লোক প্রত্যহ $8\frac{1}{2}$ ঘণ্টা খাটিয়া 15 দিনে যে কার্য করে, দৈনিক 6 ঘণ্টা খাটিয়া কয়জন লোক 17 দিনে তাহার দ্বিগুণ কাজ করিবে ? [ক. প্র. 1916]

23. 8 জন পুরুষ অথবা 17 জন বালক 26 দিনে একটি কাজ করে। 4 জন পুরুষ এবং 24 জন বালক কত দিনে তাহার $50 \times 0{\cdot}09$ গুণ কাজ করিবে ? [ক. প্র. 1937]

24. কোন ঠিকাদার 200 দিনে 6 কিলোমিটার রাস্তা প্রস্তুত করিবার চুক্তি করিয়া 140 জন লোক লাগাইয়া দেখিল 60 দিনে মাত্র $1\frac{1}{2}$ কি. মি. রাস্তা হইয়াছে। যথাসময়ে কাজটি সম্পন্ন করিতে হইলে তখন অতিরিক্ত কয়জন লোক নিযুক্ত করিতে হইবে ?

25. 40 জন পুরুষ বা 60 জন স্ত্রীলোক অথবা 80 জন বালক 6 মাসে একটি কাজ শেষ করিতে পারে। 10 জন পুরুষ, 10 জন স্ত্রীলোক এবং 10 জন বালক একত্রে উহার $\frac{1}{3}$ অংশ কাজ কত সময়ে করিবে ? [বো. প্র. 1893]

26. যদি প্রতি 5 মিনিটে 3 বার করিয়া গোলা বর্ষণ করিয়া 5টি কামানে 4 ঘণ্টায় 1200 সৈন্য মারা যায়, তাহা হইলে প্রতি 6 মিনিটে 4 বার করিয়া গোলা বর্ষণ করিয়া 7টি কামানে 3 ঘণ্টায় কত লোক মারা যাইবে ?

27. 5 জন পুরুষ ও 9 জন বালক একত্রে 17 দিনে একটি কাজ করিতে পারে। 9 জন পুরুষ ও 12 জন বালক কত দিনে উহা করিবে ? (2 জন পুরুষের কাজ 3 জন বালকের কাজের সমান)। [ক. প্র. 1946]

বর্গমূল

তোমরা পূর্বশ্রেণীতে বর্গমূল নির্ণয়ের **প্রচলিত** নিয়মটি শিখিয়াছ। নিম্নের উদাহরণগুলিতে সেই নিয়মের প্রয়োগ বুঝান হইতেছে।

উদাহরণ 1. 70225-এর বর্গমূল কত ?

```
       70225 ( 265
       4
      ------
 46  )302
     )276
      ------
 525 )2625
     )2625
      ------
```

∴ নির্ণেয় বর্গমূল = 265.

[এখানে প্রথম অংশ 7 ; উহার বর্গমূল 2 ধরিতে হইল। কারণ 3-এর বর্গ 9টি 7 অপেক্ষা অধিক হইয়া যায়। 2-এর বর্গ 4-কে 7-এর নীচে বসাইয়া বিয়োগ করিয়া 3 হইল। ঐ 3-এর ডানদিকে দ্বিতীয় অংশ 02 বসান হইল এবং বর্গমূলের 2এর দ্বিগুণ করিয়া ভাজকের স্থানে 4 বসান হইয়াছে। ভাজ্যের ডানদিকের অঙ্কটি ছাড়িলে হয় 30 ; ইহার মধ্যে ভাজক 4টি 7 বার আছে বটে

কিন্তু সেই 7টি 4-এর পর বসাইয়া 47-কে ঐ 7 দিয়া গুণ করিলে 302 অপেক্ষা বেশী হইয়া যায়। সেজন্য 6-কে বর্গমূলের স্থানে বসান হইল, 7 হইল না। ঐ 6-কে ভাজকের ডানদিকে বসাইয়া 46 হইল, 46-কে 6 দিয়া গুণ করিয়া 276 হইল, তাহা 302 হইতে বিয়োগ করিয়া 26 হইল। উহার পর তৃতীয় অংশ 25-কে নামাইয়া হইল 2625 এবং বর্গমূলের 26-এর দ্বিগুণ 52-কে ভাজকের স্থানে বসান হইল। এইবার দেখ, 262-এর মধ্যে 52 পাঁচ বার থাকা সম্ভব। ঐ 5 বর্গমূলের ও ভাজকের স্থানে বসাইয়া 525-কে ঐ 5 দিয়া গুণ করিয়া 2625 হইল। এইবার কোন ভাগশেষ থাকিল না।]

উদাহরণ 2. 16810000-এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

```
    16810000(4100
    16
81) 81
    81
```

∴ নির্ণেয় বর্গমূল =4100.

[এখানে, দ্বিতীয় অংশ 81 পর্যন্ত নামাইয়া বর্গমূল হইয়াছে 41 এবং ভাগশেষ কিছুই নাই। এখানে প্রদত্ত সংখ্যাটিতে আরও 4টি শূন্য আছে ; কিন্তু উহাতে দুইটি অংশ হইয়াছে বলিয়া বর্গমূলে দুইটি মাত্র শূন্য হইল।]

উদাহরণ 3. 41209-এর বর্গমূল কত ?

```
     41209 (203
     4
403) 1209
     1209
```

∴ বর্গমূল=203.

[এখানে, প্রথম অংশের বর্গমূল 2 হইল। উহার বর্গকে 4 হইতে বিয়োগ করিয়া ভাগশেষ কিছুই নাই। দ্বিতীয় অংশ 12 নামিল ; এবং 2-এর দ্বিগুণ 4 ভাজকের স্থানে বসিল। এখন দেখ, 12-এর একটি অঙ্ক ছাড়িলে 1 থাকে, উহাকে 4 দিয়া ভাগ করা যায় না। সেজন্য বর্গমূলে 0 বসিল, ভাজকের গায়েও 0 বসিল, এবং তৃতীয় অংশ নামাইয়া ভাজ্য 1209 হইল। উহার 9 ছাড়িলে থাকে 120, উহার মধ্যে 40 তিন বার আছে ; সেজন্য বর্গমূলে ও ভাজকের স্থানে 3 বসাইয়া ঐ 3 দিয়া 403-কে গুণ করা হইল।]

উদাহরণ 4. 2773 হইতে কোন্ ক্ষুদ্রতম সংখ্যা বিয়োগ করিলে বিয়োগফল পূর্ণবর্গ হইবে ?

```
     27'73' (52
     25
102) 273
     204
      69
```

∴ 69 বিয়োগ করিলে অন্তরফল পূর্ণবর্গ সংখ্যা হইবে।

উদাহরণ 5. 6720-র সহিত কোন্ লঘিষ্ঠ সংখ্যা যোগ করিলে যোগফল পূর্ণবর্গ সংখ্যা হইবে ?

```
      67'20' ( 81
      64
161 ) 320
    ) 161
      159
```

[এখানে, দেখা যাইতেছে যে প্রদত্ত সংখ্যাটি 81-র বর্গ অপেক্ষা বেশী, কিন্তু 82-র বর্গ অপেক্ষা কম। সুতরাং লঘিষ্ঠ সংখ্যাটি যোগ করার পর সমষ্টি 82^2-এর সমান হইবে।]

∴ নির্ণেয় লঘিষ্ঠ সংখ্যা $= 82^2 - 6720 = 6724 - 6720 = 4.$

বর্গমূল সম্বন্ধীয় বিবিধ সমাধান

উদাহরণ 1. কোন সেনাপতি তাঁহার সৈন্যদিগকে বর্গাকারে সাজাইয়া দেখিলেন 24 জন সৈন্য বেশী আছে। সৈন্যসংখ্যা 15400 হইলে, প্রতি সারিতে কত সৈন্য ছিল ? [ক. প্র. 1927]

এখানে বর্গাকারে সাজাইবার পর তখনও 24 জন সৈন্য বেশী আছে, সুতরাং মোট $(15400-24)$ জন বা 15376 জন সৈন্য লইয়া বর্গটি সাজান হইয়াছে।

∴ সম্মুখ-সারির সৈন্যসংখ্যা $= \sqrt{15376} = 124.$

```
      1'53'76' ( 124
      1
 22 ) 53
    ) 44
244 ) 976
    ) 976
```

[**দ্রষ্টব্য :** যদি বর্গাকারে লোক সাজাইতে গিয়া লোক কম পড়িত, তবে যতগুলি কম হইতেছে প্রদত্ত সংখ্যার সহিত তত যোগ করিয়া সেই যোগফলের বর্গমূলটি সম্মুখ-সারির লোকসংখ্যা হইত।]

উদাহরণ 2. 380 টাকা 25 পয়সা কয়েকজন লোকের মধ্যে এরূপে ভাগ করিয়া দেওয়া হইল যে মোট যত জন লোক ছিল প্রত্যেকে তত পয়সা করিয়া পাইল। প্রত্যেকে কত পাইল ? [পা. প্র. 1885]

380 টা. 25 প. = 38025 প.। এখানে বলা আছে যত লোক প্রত্যেকে তত পয়সা পাইয়াছে, সুতরাং দুইটি সমান সংখ্যার গুণফল 38025 হইয়াছে।

∴ 38025-এর বর্গমূল (পয়সা) প্রত্যেকের প্রাপ্য হইবে।

∴ প্রত্যেকে পাইয়াছে $\sqrt{38025}$ প. বা 195 প. বা 1 টাকা 95 পয়সা।

[**দ্রষ্টব্য :** (1) ঐ অঙ্কটিতে 38025-এর বর্গমূল করিয়া দেখাইবে। (2) যদি ঐ অঙ্কে লোকসংখ্যা নির্ণয় করিতে বলিত, তবে ঐ 38025-এর বর্গমূল 195-ই নির্ণেয় লোকসংখ্যা হইত।]

উদাহরণ 3. কতকগুলি বালক একত্রে 22 টাকা 50 পয়সা চাঁদা তুলিল। যতজন বালক ছিল প্রত্যেকে তাহার দ্বিগুণ সংখ্যক 5 পয়সা মুদ্রা চাঁদা দিয়াছে। কতজন বালক ছিল ?

দ্বিগুণ সংখ্যক 5 পয়সা মুদ্রা = সমানসংখ্যক 10 পয়সা মুদ্রা।

এক্ষণে, 22 টাকা 50 পয়সা = $(22\times10+5)$টি 10 পয়সা মুদ্রা

= 225টি 10 পয়সা মুদ্রা।

∴ নির্ণেয় বালকসংখ্যা = $\sqrt{225}=15$.

প্রশ্নমালা 12

বর্গমূল নির্ণয় কর :—

1. 651249 **2.** 1500625 **3.** 36100 **4.** 3240000

5. 4008004 **6.** 5322249 ; 92416

7. 14409616 **8.** 6256586734489 [ক. প্র. 1910]

9. 57214096 [ক. প্র. 1860] **10.** 11600836 ; 4016016

11. 220191808516 [ক. প্র. 1911] ; 49787136

12. 1000014129 [ক. প্র. 1918] **13.** 2819041 [ক. প্র. 1923]

14. 184389241 [ক. প্র. 1924]

15. দুইটি সংখ্যার গুণফল 1152 এবং একটি সংখ্যা অপরটির 8 গুণ। সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

16. 47092 হইতে কোন্ ক্ষুদ্রতম সংখ্যা বিয়োগ করিলে পূর্ণবর্গ সংখ্যা পাইবে ? 608* সংখ্যার লুপ্ত অঙ্ক কি হইলে সংখ্যাটি পূর্ণবর্গ হইবে ?

17. 667497-এর সহিত কোন্ ক্ষুদ্রতম সংখ্যা যোগ করিলে যোগফল একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা হইবে ?

18. কোন্ সংখ্যাকে সেই সংখ্যা দ্বারা গুণ করিলে 172225 হয় ?

19. কোন মালি বাগানে সারি দিয়া গাছ বসাইয়াছে। প্রত্যেক সারিতে যতগুলি গাছ আছে, সারির সংখ্যাও তত। যদি গাছের মোট সংখ্যা 5776 হয়, তবে কত সারি গাছ আছে বল। [বো. প্র. 1873]

20. কোন একটি দাতব্য ফণ্ডে সর্বসমেত 156 টাকা 25 পয়সা চাঁদা উঠিল। চাঁদাদাতা যতজন ছিল, প্রত্যেকে তত পয়সা চাঁদা দিয়াছিল। চাঁদাদাতার সংখ্যা কত ?

21. কোন সেনাপতি তাঁহার সৈন্যদলকে ঘন বর্গাকারে সাজাইয়া দেখিলেন যে, 9 জন সৈন্য বেশী হইল। মোট সৈন্যসংখ্যা 335250 হইলে, প্রতি সারিতে কয়জন সৈন্য ছিল ? [ক. প্র. 1911]

*22. কোন বিদ্যালয়ের বালকদিগকে 15, 18 বা 24 সারিতে সাজান যায় এবং তাহাদিগকে ঘন বর্গাকারেও সাজান যায়। সেই বিদ্যালয়ে কমপক্ষে কতগুলি বালক আছে ?

23. এক ব্যক্তি কয়েক মাসে সর্বসমেত 9025 টাকা খরচ করিল। সে যত মাসে উহা খরচ করিল, তত টাকা তাহার মাসিক খরচ। তাহার মাসিক খরচ কত ?

24. 3টি সংখ্যার মধ্যে প্রথম ও দ্বিতীয়ের গুণফল 18, দ্বিতীয় ও তৃতীয়ের গুণফল 42 এবং প্রথম ও তৃতীয়ের গুণফল 21 ; সংখ্যাগুলি কি কি ?

25. দুইটি সংখ্যার গুণফল 1575 এবং ভাগফল $\frac{9}{7}$: সংখ্যা দুইটি কত ?
[বৃত্তি 1931]

26. কোন্ ক্ষুদ্রতম পূর্ণবর্গ সংখ্যার একটি উৎপাদক 7936 ? [প. প্র. '33]

27. যদি ঘণ্টায় 6·6 কি. মি. চলা হয়, তবে 6 বর্গ হে. মি. 30 ব. ডে. মি. 1 ব. মি. পরিমিত একটি বর্গাকার জমির চারিধার ঘুরিতে কত সময় লাগিবে ?

দশমিক ভগ্নাংশের বর্গমূল।

পূর্ণসংখ্যার ন্যায় দশমিক ভগ্নাংশও একই দশগুণোত্তর প্রণালীতে লেখা হয়। সুতরাং দশমিকের বর্গমূল নির্ণয়ের প্রণালী পূর্ণসংখ্যার বর্গমূল নির্ণয়-প্রণালীর অনুরূপ। প্রথমে দশমিক বিন্দুর বামে এককের অঙ্কে চিহ্ন দিয়া ডানদিকে ও বামদিকে একটি অন্তর অঙ্কগুলিতে চিহ্ন দিতে হয়। অখণ্ড অংশ শেষ হইয়া যখন প্রথম দশমিকের চিহ্নিত অংশ নামান হইবে, তখন বর্গমূলেও দশমিক বিন্দু বসিবে।

উদাহরণ। 20·25 এবং ·000324-এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

```
     20'·25' ( 4·5                    ·000324 ( ·018
     16                                    1
85 ) 425                        28 )     224
     425                                 224
```

∴ বর্গমূল = 4·5.   ∴ বর্গমূল = ·018.

[**দ্রষ্টব্য :** প্রথমটিতে এককের স্থানে শূন্যের উপর প্রথমে চিহ্ন পড়িল। দ্বিতীয়টিতে এককের স্থানে কোন অঙ্ক নাই। ঐ স্থানে 0 আছে মনে করিয়া কার্য করা হইল।]

সামান্য ভগ্নাংশের বর্গমূল।

ভগ্নাংশের বর্গমূল নির্ণয় করিতে হইলে উহার লব ও হরের বর্গমূল পৃথক্ পৃথক্ ভাবে নির্ণয় করিয়া উহাদিগকে লব ও হররূপে বসাইবে। মিশ্র সংখ্যাকে প্রথমে অপ্রকৃত ভগ্নাংশে পরিণত করিবে।

উদাহরণ। $\sqrt{6\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{4}} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$.

নির্দিষ্ট দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত বর্গমূল নির্ণয়।

উদাহরণ 1. দুই দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত $\frac{5}{7}$এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

$$\sqrt{\frac{5}{7}}=\sqrt{\frac{5\times7}{7\times7}}=\frac{\sqrt{35}}{7}=\frac{5\cdot91}{7}=\cdot84 \text{ (উত্তর)}$$

```
     | 35'     ( 5·91
     | 25
 109 | 1000
     |  981
1181 |  1900
     |  1181
     |   719
```

[এখানে লব ও হর কোনটিই পূর্ণবর্গ সংখ্যা নহে। এইরূপ স্থলে হরকে কোন্ ক্ষুদ্রতম সংখ্যা দ্বারা গুণ করিলে হরটি পূর্ণবর্গ হইবে তাহা দেখিতে হয়। এখানে 7কে 7 দিয়া গুণ করিলে তবে পূর্ণবর্গ সংখ্যা হয়। সুতরাং লব ও হর উভয়কেই 7 দিয়া গুণ করা হইল। ইহাতে প্রদত্ত ভগ্নাংশের মান বদলাইবে না। $\frac{35}{49}$-এর হরের বর্গমূল 7 এবং লব 35-এর 2 দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত বর্গমূল 5·91 হইল ; সুতরাং নির্ণেয় বর্গমূল $=\frac{5\cdot91}{7}=\cdot84$]

উদাহরণ 2. তৃতীয় দশমিক স্থান পর্যন্ত $\cdot2\dot{3}\dot{4}$এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

$$\cdot2\dot{3}\dot{4}=\cdot2343434\cdots$$

```
    | ·23'43'43'···( ·484
    | 16
 88 |  743
    |  704
964 |   3943
    |   3856
    |     87
```

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\cdot484$.

[**দ্রষ্টব্য ঃ** সাধারণ দশমিকের বর্গমূল নির্ণয় করিবার সময় দশমিকাংশে অঙ্কের অভাব হইলে উহার পর যতগুলি ইচ্ছা শূন্য আছে ধরা যায় বলিয়া প্রয়োজন মত শূন্য নামাইতে হয়। আর আবৃত্ত দশমিকের স্থলে আবৃত্তাংশ প্রয়োজন মত বাড়াইয়া লইতে হয়।]

প্রশ্নমালা 13

বর্গমূল নির্ণয় কর ঃ—

1. 15·21 2. ·000361 3. 1·0201
4. 341·1409 [বৃত্তি. 1933] 5. ·00105625 [বৃত্তি. 1929]
6. 170·485249 [ক. প্র. '15] 7. 2919·46783041 [ক. প্র. '15]

8. $\frac{1024}{5625}$ 9. $6\frac{145}{256}$ 10. $\frac{2\frac{1}{4}}{9}$ 11. $\frac{6}{8\frac{1}{6}}$

12. $11\cdot\dot{1}$ 13. $\frac{32\cdot4}{72\cdot9}$ [বৃত্তি. 1932]

14. $9+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{7+\frac{1}{6}}}$ [এ. প্র. 1898] 15. $\frac{1000\cdot20001}{1000}$

16. কোন্ সংখ্যাকে সেই সংখ্যা দ্বারা গুণ করিলে $109\frac{628}{729}$ হয় ?

তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত বর্গমূল নির্ণয় কর :—

17. $18, \frac{2}{9}$ 18. $\cdot4$ [ঢা. বো. 1940] 19. $\cdot021$

20. $2\cdot3\dot{4}\dot{1}$ 21. $1-(\cdot021)^2$

22. 7 দশমিক স্থান পর্যন্ত 2এর বর্গমূল কত ? [ঢা. বো. 1933]

23. 4 দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত $\frac{7}{12}$এর বর্গমূল কত ?

24. $1-(\cdot00135)^2$এর 4 দশমিক স্থান পর্যন্ত বর্গমূল নির্ণয় কর। [ক. প্র. 1926]

মান নির্ণয় কর (3 দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত) :—

25. $\sqrt{3\frac{33}{64}} \div \sqrt{9\frac{1}{7}} \times 2\sqrt{21\cdot\dot{7}}$ [ক. প্র 1927]

26. $\sqrt{32}-\sqrt{128}+\sqrt{50}$.

ক্ষেত্রফল বা তলপরিমাণ

পূর্ব-শ্রেণীতে তোমরা ক্ষেত্রফল নির্ণয় শিখিয়াছ। তোমরা জান—

আয়তক্ষেত্রের বা ঘরের মেঝের ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ,

সুতরাং দৈর্ঘ্য = ক্ষেত্রফল ÷ প্রস্থ। প্রস্থ = ক্ষেত্রফল ÷ দৈর্ঘ্য।

বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = বাহুর বর্গ [অর্থাৎ (দৈর্ঘ্য)^2 বা (প্রস্থ)^2]

∴ বর্গক্ষেত্রের বাহু = উহার ক্ষেত্রফলের বর্গমূল।

ঘরের চারি দেওয়ালের ক্ষেত্রফল = 2 (দৈর্ঘ্য + প্রস্থ) × উচ্চতা

= পরিসীমা × উচ্চতা

সুতরাং ঘরের উচ্চতা = $\frac{\text{চারি দেওয়ালের ক্ষেত্রফল}}{2\,(\text{দৈর্ঘ্য} + \text{প্রস্থ})}$,

এবং পরিসীমা = চারি দেওয়ালের ক্ষেত্রফল ÷ উচ্চতা।

উদাহরণ 1. একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য প্রস্থের দেড়গুণ এবং উহাকে সমতল করিবার জন্য প্রতি বর্গ মিটারে $\frac{5}{16}$ টাকা হিসাবে 1470 টাকা ব্যয় হইল। প্রতি মিটারে 4 টাকা হিসাবে উহাকে তারের বেড়া দিয়া ঘিরিতে কত খরচ হইবে ? [পা. প্র. 1936]

মাঠের ক্ষেত্রফল $= (1470$ টাকা $\div \frac{5}{16}$ টাকা $)$ বর্গ মিটার,

$= \frac{1470 \times 16}{5}$ বর্গ মি. $= 294 \times 16$ বর্গ মিটার,

সুতরাং দৈর্ঘ্য $\times$ প্রস্থ $= 294 \times 16$ বর্গ মিটার,

বা, $\frac{3}{2}$ প্রস্থ $\times$ প্রস্থ $= 294 \times 16$ বর্গ মিটার [$\because$ এখানে দৈর্ঘ্য $= \frac{3}{2}$ প্রস্থ]

বা, $($ প্রস্থ $)^2 = \frac{294 \times 16 \times 2}{3}$ বর্গ মি. $= 196 \times 16$ বর্গ মি.।

$\therefore$ প্রস্থ $= \sqrt{196 \times 16}$ মি. $= 14 \times 4$ মি. $= 56$ মিটার ;

$\therefore$ দৈর্ঘ্য $= \frac{3}{2} \times 56$ মিটার $= 84$ মিটার।

$\therefore$ মোট বেড়ার মাপ $=$ মাঠের পরিসীমা $= 2(84$ মি. $+ 56$ মি.$)$

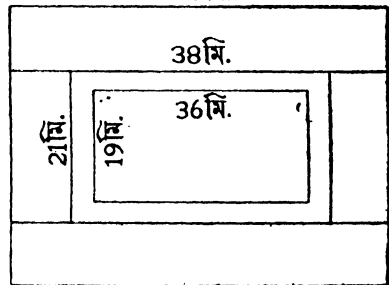
$= 280$ মিটার।

$\therefore$ নির্ণেয় খরচ $= 4$ টাকা $\times 280 = 1120$ টাকা।

উদাহরণ 2. 36 মিটার দীর্ঘ ও 19 মিটার বিস্তৃত একটি ঘর 1 মিটার পুরু দেওয়াল দিয়া ঘেরা এবং উহার বাহিরে চারিধারে 9 মিটার প্রশস্ত বারান্দা আছে। প্রতি বর্গ মিটারে 50 পয়সা হিসাবে ঐ বারান্দার জন্য কত খরচ হইয়াছে ?

ঘরের মেঝের দৈর্ঘ্য 36 মিটার ও প্রস্থ 19 মিটার।

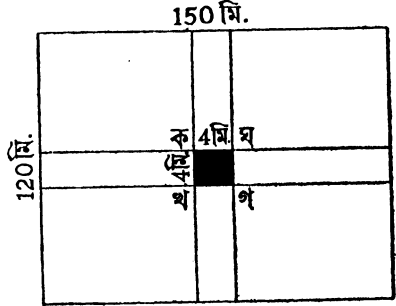
$\because$ দেওয়াল 1 মিটার পুরু,

$\therefore$ দেওয়ালের বাহির দিকে ঘরের দৈর্ঘ্য $= (36 + 1 + 1)$ বা 38মি. এবং প্রস্থ $= (19 + 2)$ বা 21 মি.।

$\therefore$ চারিদিকের বারান্দার মোট দৈর্ঘ্য $= (56 + 21) \times 2$ মিটার ;

*সুতরাং বারান্দার কালি $= 2(56 + 21) \times 9$ বর্গমিটার $= 2 \times 77 \times 9$ ব. মি.

$\therefore$ নির্ণেয় খরচ $= 2 \times 77 \times 9 \times 50$ পয়সা $= 693$ টাকা।

*[**দ্রষ্টব্য :** অন্যভাবেও বারান্দার কালি করা যায়। যথা, বারান্দার কালি $= (38 + 2 \times 9) \times (21 + 2 \times 9)$ বর্গ মি. $- 38 \times 21$ বর্গ মি. $= 1386$ বর্গ মি.]

উদাহরণ 3. 150 মিটার দীর্ঘ 120 মিটার প্রশস্ত কোন আয়তক্ষেত্রের দুই পার্শ্বের মধ্যস্থল হইতে 4 মিটার প্রশস্ত দুইটি পথ অপর দুইটি বিপরীত পার্শ্বের মধ্যস্থল পর্যন্ত গিয়াছে। প্রতি বর্গমিটার 75 পয়সা হিসাবে পথ দুইটি পাকা করিতে কত খরচ হইবে ?

দৈর্ঘ্য বরাবর পথটির কালি = 150 × 4 বর্গ মি. = 600 বর্গ মি. ;

এবং প্রস্থ বরাবর পথটির কালি = 120 × 4 বর্গ মি. = 480 বর্গমিটার।

∴ পথ দুইটির মোট কালি = (600 + 480) বর্গ মি. = 1080 বর্গ মি.।

কিন্তু পথ দুইটি যেস্থানে পরস্পর ছেদ করিয়াছে সেই **কখগঘ** সাধারণ অংশের কালি = 4 মি. × 4 মি. = 16 বর্গমিটার। পথের মোট কালির সহিত এই সাধারণ অংশের কালি দুইবার ধরা হইয়াছে। অতএব, যে অংশ পাকা করিতে হইবে তাহার মোট কালি = 1080 বর্গ মি. − 16 বর্গ মি. = 1064 বর্গমিটার।

∴ নির্ণেয় খরচ = 75 পয়সা × 1064 = 798 টাকা।

উদাহরণ 4. 408 মিটার দীর্ঘ ও 231 মিটার প্রশস্ত একটি আয়তক্ষেত্রকে কতকগুলি পূর্ণসংখ্যক বর্গাকার টালির দ্বারা ঢাকিতে হইবে। কোন্ বৃহত্তম মাপের টালি ব্যবহার করা যাইবে এবং ঐ টালি কতগুলি লাগিবে ?

এখানে টালিগুলি বর্গাকার বলিয়া উহাদের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ সমান। আবার, পূর্ণসংখ্যক টালি লাগিবে বলিয়া টালির বাহু দ্বারা ক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ দুইটিই বিভাজ্য হওয়া চাই ; সুতরাং দেখিতে হইবে কোন্ বৃহত্তম রাশির দ্বারা 408 মি. ও 231 মি. বিভাজ্য। 408 মিটার ও 231 মিটারের গ. সা. গু. = 3 মিটার।
∴ 3 মি. × 3 মি. বা 3 মি. বর্গ এই বৃহত্তম মাপের টালি ব্যবহার করা যাইবে।

আবার, নির্ণেয় টালির সংখ্যা $= \frac{408 \times 231}{3 \times 3} = 10472$.

উদাহরণ 5. 12 মিটার দীর্ঘ, 8 মিটার প্রশস্ত ও 10 মি. উচ্চ একটি ঘরে প্রত্যেকটি 6 মিটার × 4 মি. মাপের দুইটি দরজা এবং প্রত্যেকটি 5 মি. × 3 মি. মাপের চারিটি জানালা আছে। প্রতি বর্গমিটার 25 পয়সা হিসাবে ঐ ঘরের দেওয়াল চারিটি চুনকাম করিতে কত খরচ হইবে ?

জানালা ও দরজা সমেত চারি দেওয়ালের কালি = 2 (দৈর্ঘ্য + প্রস্থ) × উচ্চতা
= 2(12 মি. + 8 মি.) × 10 মি. = 400 বর্গ মিটার ;

একটি দরজার কালি $=6$ মি. $\times 4$ মি. $=24$ বর্গমিটার,

$\therefore$ 2টি দরজার কালি $=24$ বর্গমিটার $\times 2=48$ বর্গমিটার।

আবার, 4টি জানালার কালি $=5$ মি. $\times 3$ মি. $\times 4=60$ বর্গমিটার।

$\therefore$ দরজা ও জানালাগুলির মোট কালি $=48$ বর্গমি. $+60$ বর্গমি.

$=108$ বর্গমিটার।

$\therefore$ দেওয়ালগুলির যে অংশ চুনকাম করিতে হইবে তাহার কালি

$=400$ বর্গমি. -108 বর্গমি. $=292$ বর্গমিটার।

$\therefore$ নির্ণেয় খরচ $=25$ পয়সা $\times 292=73$ টাকা।

প্রশ্নমালা 14

1. একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য উহার প্রস্থের 3 গুণ এবং $1\frac{1}{2}$ ডেসি মিটার বর্গ পাথর দিয়া উহা আবৃত করিতে 2028 খানা পাথর লাগে। ক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য কত?

2. একটি বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 10 একর। প্রতি গজে 30 পয়সা হিসাবে উহার চারিধারে বেড়া দিতে কত খরচ লাগিবে?

3. একটি রোলার দিয়া 96 আর 80 বর্গমিটার পরিমিত জমির ঘাস কাটিতে 352 ডেকামিটার ঘুরিতে হয়; রোলারটির দৈর্ঘ্য কত?

4. 80 মিটার দীর্ঘ ও 60 মিটার প্রশস্ত আয়তক্ষেত্রের একবার কোণাকুণি চলিলে কত পথ চলা যাইবে?

5. দুইটি বর্গক্ষেত্রের বাহুর পরিমাণ যথাক্রমে 8 মিটার ও 15 মিটার। ঐ দুই ক্ষেত্রের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা কত?

6. একটি 40 একর পরিমিত বর্গক্ষেত্রকে ঘিরিয়া 30 ফুট প্রশস্ত একটি রাস্তা আছে। 2 ফুট দীর্ঘ ও 1 ফুট 6 ইঞ্চি প্রশস্ত প্রস্তর দ্বারা রাস্তাটি প্রস্তুত করিতে কতগুলি প্রস্তর লাগিবে? [ঢা. প্র. 1935]

7. একটি ঘরের দৈর্ঘ্য প্রস্থের 3 গুণ এবং প্রতি বর্গমিটার 7 টাকা 50 পয়সা হিসাবে ঘরখানি কার্পেট দিয়া ঢাকিতে 1102 টাকা 50 পয়সা ব্যয় হইল। ঘরের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ কত?

8. একটি ঘরের মেঝের দৈর্ঘ্য উহার প্রস্থের দ্বিগুণ। যদি ঐ মেঝে পাক করিতে প্রতি বর্গমিটারে 25 পয়সা হিসাবে 32 টাকা খরচ হইয়া থাকে, তবে উহার দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ কত?

9. একটি ঘরের মেঝে কার্পেট দিয়া ঢাকিতে 120 টাকা খরচ হইল, কিন্তু উহার দৈর্ঘ্য 3 মিটার কম হইলে 105 টাকা খরচ হইত। উহার দৈর্ঘ্য কত?

10. দুইটি বর্গক্ষেত্রের মোট ক্ষেত্রফল 1170 আর। একটি ক্ষেত্রের বাহু অপর ক্ষেত্রের বাহুর $\frac{2}{3}$ অংশ ; প্রত্যেক ক্ষেত্রের পরিমাণ কত ?

11. 30 মিটার দীর্ঘ একটি গৃহ কার্পেট দিয়া ঢাকিতে 150 টাকা খরচ হইল ; কিন্তু উহার প্রস্থ 5 মিটার কম হইলে, 120 টাকা ব্যয় হইত। গৃহটির প্রস্থ কত ?

12. 6 হে. মিটার বাহুবিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্রের বাহিরে চতুর্দিকে 20 মিটার প্রশস্ত পথ আছে। প্রতি বর্গ ডেকামিটারে 1 টাকা 25 পয়সা হিসাবে পথটি বাঁধাইতে কত খরচ লাগিবে ?

13. একটি ঘরের মেঝের ও ছাদের ক্ষেত্রফল একত্রে উহার চারি দেওয়ালের ক্ষেত্রফলের সমান। ঘরের দৈর্ঘ্য 20 মিটার ও প্রস্থ 12 মিটার হইলে, উহার উচ্চতা কত ?

14. 21 মিটার দৈর্ঘ্য, 15 মিটার প্রস্থ ও 10 মিটার উচ্চতাবিশিষ্ট একটি ঘরের দেওয়ালগুলি 2 মিটার বিস্তৃত কাগজ দ্বারা আবৃত করা হইল। প্রতি মিটার কাগজের মূল্য $3\frac{1}{2}$ পয়সা হইলে মোট কত ব্যয় হইল ?

15. একটি গৃহের চারি দেওয়ালের ক্ষেত্রফল 660 বর্গমিটার এবং মেঝের ক্ষেত্রফল 270 বর্গ মিটার, উহার প্রস্থ 15 মিটার হইলে, ঘরটির উচ্চতা কত ?

16. 385 মিটার × 60 মিটার মাপের একটি প্রাঙ্গণকে পূর্ণসংখ্যক সমান বর্গাকার টালির দ্বারা আবৃত করিতে হইলে, বৃহত্তম কি মাপের টালি ব্যবহার করা যায় এবং সেই টালির সংখ্যা কত হইবে ?

17. যে গৃহের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে 12 মি., 8 মি. ও 10 মি. তাহার চারিটি দেওয়ালকে $1\frac{1}{4}$ সে. মি. × 1 সে. মি. মাপের 2 পয়সার ডাক-টিকিট দিয়া আবৃত করিতে কত ব্যয় হইবে ?

18. 17 মি. 6 ডেসি মি. দীর্ঘ, 12 মি. 4 ডেসি মি. বিস্তৃত ও 10 মি. উচ্চ একটি গৃহে প্রত্যেকটি 4 মি. × 3 মি. মাপের 3টি জানালা এবং 6 মি × 4 মি. মাপের 2টি দরজা আছে। ঐ ঘরের দেওয়ালগুলিকে 3 মিটার চওড়া কাগজ দিয়া ঢাকিতে কত মিটার কাগজ লাগিবে ?

19. একটি ঘরের দৈর্ঘ্য 24 মিটার ও উচ্চতা 12 মিটার এবং উহার দেওয়ালগুলিকে চুনকাম করিতে প্রতি বর্গমিটারে 6 পয়সা হিসাবে মোট 48 টাকা 96 পয়সা ব্যয় হইল। ঘরটির প্রস্থ কত ?

20. 16 মিটার প্রশস্ত ও 12 মিটার উচ্চ একটি ঘরে মাদুর বসাইতে প্রতি বর্গমিটারে 3 পয়সা হিসাবে 10 টাকা 92 পয়সা খরচ হইল। ঐ ঘরে 6 মিটার × 3 মিটার মাপের 6টি দরজা আছে, উহার দেওয়ালগুলিতে ঐ হারে কাগজ বসাইতে কত খরচ হইবে ?

[দ্রষ্টব্য : ঘরে কার্পেট বা মাদুর লাগান (matting) হয় কেবল মেঝেতে এবং কাগজ লাগান হয় কেবল চারিটি দেওয়ালে।]

21. একটি গৃহের দৈর্ঘ্য প্রস্থের দ্বিগুণ। প্রতি বর্গমিটারে 60 সেণ্ট হারে উহাতে কার্পেট লাগাইতে 58 ডলার 80 সেণ্ট এবং প্রতি বর্গমিটারে 9 সেণ্ট হারে দেওয়ালগুলি রং করিতে 18 ডলার 90 সেণ্ট ব্যয় হইল। ঐ গৃহের মাত্রা (দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা) নির্ণয় কর।

22. একটি ঘরের ভিতরের দৈর্ঘ্য 22 মিটার এবং প্রস্থ 18 মিটার। উহার দেওয়াল 1 মিটার পুরু এবং উহার বাহিরে চারিপার্শে $10\frac{1}{2}$ মিটার প্রশস্ত একটি বারান্দা আছে। 4 ডেসি মি. × 3 ডেসি মি. মাপের টালি দ্বারা ঐ বারান্দা পাকা করা হইল। প্রত্যেক টালির মূল্য 16 পয়সা হইলে মোট কত ব্যয় হইয়াছে ?

23. 100 মিটার দীর্ঘ ও 50 মিটার প্রশস্ত একটি আয়তাকার প্রাঙ্গণে দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের সমান্তরাল 4 মিটার বিস্তৃত দুইটি রাস্তা আছে। প্রতি বর্গমিটার বাঁধাইতে 75 পয়সা এবং কাঁকর বসাইতে $37\frac{1}{2}$ পয়সা ব্যয় হয়। রাস্তায় কাঁকর বসাইতে ও প্রাঙ্গণটি বাঁধাইতে মোট কত ব্যয় হইবে ?

24. ঘণ্টায় 3 মাইল বেগে চলিয়া এক ব্যক্তি একটি আয়তক্ষেত্রের একধার 5 মিনিটে এবং চারিধার 14 মিনিটে চলিতে পারে। ঐ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল একরে নির্ণয় কর। [ঢা. বো. 1946]

ঘন পরিমাণ (কঠিনতর)

ঘন পরিমাণ সম্বন্ধে তোমরা পূর্ব শ্রেণীতে শিখিয়াছ।

সমকোণী চৌপলের ঘনফল = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ × বেধ

∴ দৈর্ঘ্য = ঘনফল ÷ (প্রস্থ × বেধ), প্রস্থ = ঘনফল ÷ (দৈর্ঘ্য × বেধ), বেধ বা উচ্চতা = ঘনফল ÷ (দৈর্ঘ্য × প্রস্থ)।

ঘনকের ঘনফল = (বাহু)^3

ঘনকের পৃষ্ঠফল বা তলপরিমাণ = 6 × (ধার)^2।

চৌপলের পৃষ্ঠফল = 2 (দৈর্ঘ্য × প্রস্থ + দৈর্ঘ্য × বেধ + প্রস্থ × বেধ)।

ঘনফলের এককাবলী—

ইংলণ্ডীয় এককাবলী : 12^3 বা 1728 ঘন ইঞ্চি (cubic in.) = 1 ঘনফুট। 3^3 বা 27 ঘনফুট (cubic feet) = 1 ঘনগজ (cubic yard)।

মেট্রিক এককাবলী : 1000 ঘন সে. মি. = 1 ঘন ডেসি মি., 1000 ঘন ডেসি মি. = 1 ঘন মি., 1000 ঘন মিটার = 1 ঘন ডেকা মি., ইত্যাদি।

উদাহরণ 1. একটি বর্গাকার পাত্রে 14 মিরি. গ্রা. 4 কি. গ্রাম জল ধরে এবং এক ঘন ডেসি মিটার জলের ওজন 1 কি. গ্রাম। পাত্রটি 4 ডেসি মিটার গভীর হইলে উহার দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ কত ?

জলের মোট ওজন = 14 মিরি. গ্রা. 4 কি. গ্রা. = 144 কিলো গ্রাম,

1 ঘন ডেসি মিটার জলের ওজন = 1 কিলোগ্রাম,

∴ পাত্রটির ঘনফল = (144 ÷ 1) ঘন ডেসি মি. = 144 ঘন ডেসি মি.

কিন্তু উহার গভীরতা = 4 ডেসি মিটার,

∴ বর্গাকার পাত্রটির মেঝের কালি = $\frac{144}{4}$ বর্গ ডেসি মি. = 36 বর্গ ডেসিমি.

∴ উহার দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ প্রত্যেকটি = $\sqrt{36}$ ডেসি মি. = 6 ডেসি মিটার।

উদাহরণ 2. 30 মিটার দীর্ঘ ও 27 মিটার বিস্তৃত একটি আয়তক্ষেত্রের চারিদিকে 10 মিটার উচ্চ ও 1 মি. 5 ডেসি মি. পুরু প্রাচীর নির্মাণ করিতে ·5 মি. দীর্ঘ, $\frac{1}{3}$ মি. বিস্তৃত ও $\frac{1}{4}$ মি. পুরু কতগুলি ইট লাগিবে ?

প্রাচীরের তলদেশের ক্ষেত্রফল =

2(33 + 27) × $\frac{3}{2}$ বর্গ মি.

= 180 বর্গ মিটার।

∴ প্রাচীরের ঘনফল =

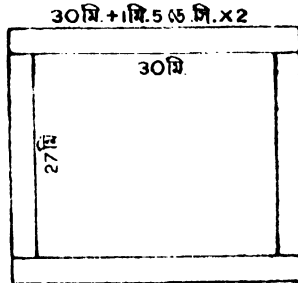
তলের ক্ষেত্রফল × উচ্চতা

= 180 ব. মি. × 10 মি.

= 1800 ঘন মিটার।

প্রত্যেক ইটের ঘনফল

= $\frac{1}{2}$ মি. × $\frac{1}{3}$ মি. × $\frac{1}{4}$ মি. = $\frac{1}{24}$ ঘন মি.।

∴ নির্ণেয় ইটের সংখ্যা = 1800 ঘন মি. ÷ $\frac{1}{24}$ ঘন মি. = 43200.

উদাহরণ 3. অর্ধ ডেসি মিটার পুরু কাষ্ঠ দ্বারা নির্মিত একটি বাক্সের বহির্ভাগের দৈর্ঘ্য 16, প্রস্থ 12 ও উচ্চতা 7 ডেসিমিটার। (1) বাক্সটির ভিতরের ঘনফল কত ? (2) উহার জন্য কত বর্গ ডেসি মিটার কাষ্ঠ লাগিয়াছে ? (3) প্রতি ঘন মিটার কাষ্ঠের ওজন 10 কিলোগ্রাম হইলে বাক্সটির ওজন কত ?

(1) এখানে কাষ্ঠ $\frac{1}{2}$ ডেসি মি. পুরু বলিয়া বাক্সটির ভিতরের দিকে দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা ($\frac{1}{2}$ × 2) বা 1 ডেসি মিটার করিয়া কম হইবে।

∴ বাক্সটির ভিতরের ঘনফল = 15 × 11 × 6 ঘন ডেসি মি.

= 990 ঘন ডেসি মিটার।

(2) বাক্সটির মোট ঘনফল = 16 × 12 × 7 ঘন ডেসি মি. = 1344 ঘন ডেসি মি.

এবং উহার ভিতরের ঘনফল = 990 ঘন ডেসি মি.,

$\therefore$ কাষ্ঠের মোট ঘনফল $=(1344-990)$ ঘন ডেসি মি.

$=354$ ঘন ডেসি মি. ,

$\therefore$ নির্ণেয় কাষ্ঠের পরিমাণ $=354$ ঘন ডেসি মি. $\div \frac{1}{2}$ ডেসি মি.

$=708$ বর্গ ডেসি মিটার।

(3) বাক্সটির ওজন $=354$ ঘন ডেসি মিটার কাষ্ঠের ওজন

$=\frac{354}{1000}$ ঘন মিটার কাষ্ঠের ওজন

$=\frac{354}{1000}\times 10$ কি. গ্রা. $=3$ কি. গ্রা. 540 গ্রাম.।

প্রশ্নমালা 15

1. এক ঘন মিটার প্রস্তরের ওজন 249 কি. গ্রাম হইলে 3 মি. 5 ডেসি মি. দীর্ঘ, 2 মি. 5 ডেসি মি. প্রশস্ত ও 2 মিটার পুরু প্রস্তরখণ্ডের ওজন কত ?

2. একটি চৌবাচ্চায় 750 গ্যালন জল ধরে। এক গ্যালন জলের ওজন 10 পাউণ্ড এবং 1 ঘনফুট জলের ওজন 1000 আউন্স হইলে, কত ঘনফুট জলে ঐ চৌবাচ্চাটি ভর্তি করা যাইবে ?

3. একটি ঘরের দৈর্ঘ্য প্রস্থের 3 গুণ এবং উচ্চতার 5 গুণ এবং উহাতে 14400 ঘন মিটার বায়ু ধরে। ঘরটির মেঝের ক্ষেত্রফল কত ?

4. $5\frac{5}{7}$ ডেসি মিটার গভীর কোন বর্গাকার চৌবাচ্চায় 179·2 কি. গ্রা. জল ধরে। এক ঘন ডেসি মিটার জলের ওজন 1 কি. গ্রা. হইলে চৌবাচ্চাটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ কত ?

5. 18 মিটার দীর্ঘ, 12 মিটার বিস্তৃত ও 4 মিটার উচ্চ কোন চৌবাচ্চার ভিতরের চারি গাত্রে সীসার পাত বসান হইল। এক বর্গ মিটার সীসার পাতের ওজন 14 হে. গ্রাম এবং এক কিলোগ্রাম সীসার মূল্য 25 পয়সা হইলে মোট কত ব্যয় হইয়াছে ?

6. একটি চৌবাচ্চায় $243\frac{3}{4}$ ঘন মিটার জল ধরে। $4\frac{1}{3}$ মিটার গভীর অন্য একটি বর্গাকার তলবিশিষ্ট চৌবাচ্চায় যদি উহার 4 গুণ জল ধরে, তবে দ্বিতীয় চৌবাচ্চাটির দৈর্ঘ্য কত ?

7. $12\frac{1}{2}$ ডেসি মিটার গভীর একটি চৌবাচ্চার দৈর্ঘ্য বিস্তারের তিনগুণ এবং উহাতে $37\frac{1}{2}$ কুইন্টাল জল ধরে। এক ঘন ডেসি মিটার জলের ওজন 1000 গ্রাম হইলে চৌবাচ্চাটির দৈর্ঘ্য ও বিস্তার কত ?

8. 120 মিটার দীর্ঘ ও 90 মিটার বিস্তৃত একটি আয়তাকার উদ্যানের বাহিরের চারিদিকে 6 মিটার উচ্চ এবং 75 সে. মি. পুরু প্রাচীর প্রস্তুত করিতে $\frac{3}{4}$ মি. $\times \frac{3}{8}$ মি. $\times \frac{1}{4}$ মি. আয়তনের কতগুলি ইট লাগিবে ?

9. এক সেন্টিমিটার পুরু কাঠের তক্তা দ্বারা একটি বাক্স প্রস্তুত করিতে হইবে। বাক্সটির অন্তর্ভাগের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে 15 সে.মি., 12 সে. মি. ও 8 সে. মি. হইলে, উহা প্রস্তুত করিতে কত ঘন সেন্টিমিটার তক্তা লাগিবে ?

10. একটি বাক্সের বহির্ভাগের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে 16, 12 ও 10 ডেসি মিটার। অর্ধ ডেসি মিটার পুরু তক্তা দ্বারা উহা প্রস্তুত করা হইল। এক ঘন মিটার তক্তার ওজন 4 কিলোগ্রাম হইলে বাক্সটির ওজন কত ?

11. 60 মিটার দীর্ঘ ও 30 মিটার বিস্তৃত একটি আয়তাকার বাগানকে চারিধারে 9 মিটার উচ্চ ও 1 মিটার পুরু দেওয়াল দিয়া ঘেরা হইল। প্রত্যেক ইটের মাপ 4 ডেসি মি. × 3 ডেসি মি. × 1 ডেসি মি. হইলে, ঐ দেওয়াল গাঁথিতে মোট কত ইট লাগিয়াছিল ?

12. একটি আয়তাকার উদ্যানের দৈর্ঘ্য 100 মিটার ও প্রস্থ 60 মিটার, উহার বাহিরে চারিপার্শ্বে 5 মিটার প্রশস্ত পথ আছে। ঐ পথে 2·5 ডেসি মি. পুরু করিয়া কাঁকর বিছাইতে প্রতি ঘনমিটারে 40 পয়সা হিসাবে কত ব্যয় হইবে ?

13. 12 মিটার দীর্ঘ, 8 মিটার বিস্তৃত ও 6 মিটার গভীর একটি চৌবাচ্চায় 4 মিটার গভীর জল আছে। 5 ডেসি মি. × $3\frac{1}{3}$ ডেসি মি. × $2\frac{1}{2}$ ডেসি মি. মাত্রাযুক্ত কতগুলি ইট উহাতে ফেলিলে জল চৌবাচ্চার ঠিক কানায় কানায় উঠিবে ? [এখানে ইট জল শোষণ করে না মনে কর।]

14. এক ঘনফুট জলের ওজন 1000 আউন্স। দুই একর পরিমিত জমিতে বন্যায় 4000 টন জল দাঁড়াইল। ঐ জলের গভীরতা কত ইঞ্চি (দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত) ? [প. প্র. 1891]

15. 225 মিটার দীর্ঘ, 150 মি. প্রশস্ত ও 11 মি. গভীর একটি চৌবাচ্চা জলপূর্ণ আছে। 5 মি. দীর্ঘ, 5 মি. প্রশস্ত ও $2\frac{1}{4}$ মিটার গভীর 12খানি জলের গাড়ীতে কতবার জল লইলে চৌবাচ্চার জল 5 ডেসি মিটার কমিয়া যাইবে ?

শতকরা হিসাব (Percentage)
(কঠিনতর)

শতকরা (Percent) কথাটির দ্বারা প্রতি শতে অর্থাৎ প্রত্যেক 100-তে বুঝায়। এইরূপ একশতের উপর যে হিসাব করা হয়, তাহাকে **শতকরা হিসাব** বলে।

তোমরা পূর্ব শ্রেণীতে এই হিসাব শিখিয়াছ। তোমরা জান যে কোন ভগ্নাংশকে 100 দিয়া গুণ করিলে শতকরা হিসাব পাওয়া যায়।

যথা, $\frac{3}{5}$ অংশ $= \frac{3}{5} \times 100\% = 60\%$. আবার শতকরা কত বলা থাকিলে তাহাকে 100 দিয়া ভাগ করিলে তাহা ভগ্নাংশে প্রকাশিত হয়।

যথা, শতকরা 55 বা $55\% = \frac{55}{100} = \frac{11}{20}$ অংশ।

শতকরা বুঝাইবার জন্য '%' এই সাঙ্কেতিক চিহ্নটি ব্যবহার করা হয়। সুতরাং 30% দ্বারা বুঝায় শতকরা 30.

কতিপয় প্রশ্নের সমাধান

উদাহরণ 1. চাউলের মূল্য $12\frac{1}{2}$% কমাতে টাকায় 2 কিলো গ্রাম চাউল বেশী পাওয়া গেল। পূর্বে টাকায় কত চাউল পাওয়া যাইত ?

$$12\tfrac{1}{2}\% = \frac{12\frac{1}{2}}{100} = \frac{1}{8}.$$

পূর্বে 1 টাকায় যত চাউল পাওয়া যাইত, দাম কমাতে এখন $(1-\frac{1}{8})$ টাকায় বা $\frac{7}{8}$ টাকায় তত চাউল পাওয়া গেল। বাকি যে $\frac{1}{8}$ টাকা রহিল তাহাতে আরও 2 কি. গ্রা. চাউল পাওয়া গেল। অতএব, এখন $\frac{1}{8}$ টাকায় 2 কি. গ্রা. চাউল পাওয়া যায়, সুতরাং $\frac{7}{8}$ টাকায় উহার 7 গুণ বা 14 কি. গ্রা. চাউল পাওয়া গিয়াছে। অতএব পূর্বে উহাই অর্থাৎ 14 কিলো গ্রাম চাউল 1 টাকায় পাওয়া যাইত।

উদাহরণ 2. কোন ক্লাবে প্রতি বৎসর সভ্যসংখ্যা 10% করিয়া বৃদ্ধি পায়। প্রথমে 400 সভ্য থাকিলে তৃতীয় বৎসরে সভ্যসংখ্যা কত হইবে ?

প্রতি বৎসর সভ্যসংখ্যা 10% বাড়ে, অর্থাৎ পূর্ব সংখ্যার $\frac{110}{100}$ গুণ হয়,

∴ এস্থলে দ্বিতীয় বৎসরের সভ্যসংখ্যা $= \frac{110}{100} \times 400$,

∴ তৃতীয় বৎসরের নির্ণেয় সভ্যসংখ্যা = দ্বিতীয় বৎসরের সংখ্যার $\frac{110}{100}$

$$= \frac{110}{100} \times \frac{110}{100} \times 400 = 484.$$

[**দ্রষ্টব্য :** এইরূপ প্রশ্নের জন্য একটি সূত্র নির্ণয় করা যাইতে পারে। মনে কর, আদি সংখ্যা "আ", বৎসরে শতকরা বৃদ্ধির হার "হা", বৎসরের সংখ্যা "ব" এবং শেষ বর্ধিত সংখ্যা "বৃ"।

এক্ষণে আদি সংখ্যা হইতে শেষ বৃদ্ধিপ্রাপ্ত সংখ্যা নির্ণয়ের সূত্র হইবে :—

$$\text{বৃ} = \text{আ}\left(1 + \frac{\text{হা}}{100}\right)^{\text{ব}}।$$

আবার, পরের বর্ধিত সংখ্যা হইতে গোড়ার সংখ্যা নির্ণয় করিবার সূত্র হইবে : $\text{আ} = \dfrac{\text{বৃ}}{\left(1+\frac{\text{হা}}{100}\right)^{\text{ব}}}$ অর্থাৎ $\text{আ} = \text{বৃ}\left(\dfrac{100}{100+\text{হা}}\right)^{\text{ব}}$।]

উদাহরণ 3. কোন ব্যক্তির প্রত্যেক বৎসরে 10% হারে বেতনবৃদ্ধি হইয়া তৃতীয় বৎসরে 484 টাকা বেতন হইল। প্রথমে তাহার বেতন কত ছিল ?

10% বৃদ্ধির অর্থ 100 টাকার স্থানে 110 টাকা হওয়া। অতএব, পূর্ব বৎসরের বেতন পর-বৎসরের বেতনের $\frac{100}{110}$ অংশ।

এখানে তৃতীয় বৎসরের প্রথমে বেতন হইয়াছে 484 টাকা,

∴ দ্বিতীয় বৎসরের গোড়ায় বেতন ছিল $\frac{100}{110} \times 484$ টাকা,

∴ প্রথম বৎসরের গোড়ায় বেতন ছিল $\frac{100}{110} \times \frac{100}{110} \times 484$ টাকা,

= 400 টাকা (উত্তর)।

উদাহরণ 4. কোন বিদ্যালয়ের শিক্ষার্থীদের 70% বালক এবং অবশিষ্ট বালিকা; 32 জন বালক চলিয়া গেল এবং 32 জন বালিকা ভর্তি হইল। ইহাতে বালকের সংখ্যা শতকরা 54 হইল। ঐ বিদ্যালয়ের মোট শিক্ষার্থীর সংখ্যা কত ?

32 জন বালকের স্থানে 32 জন বালিকা ভর্তি হওয়ায় মোট সংখ্যা একই আছে। 32 জন বালক কম হওয়ায় শতকরা (70 – 54) বা 16% কমিয়াছে ;

∴ সমস্ত সংখ্যার 16% = 32,

∴ নির্ণেয় সংখ্যা $= \frac{32}{16} \times 100$ জন = 200 জন।

উদাহরণ 5. কোন পরীক্ষায় পরীক্ষার্থীদের 35% গণিতে এবং 40% ইংরাজীতে পাশ করিতে পারে নাই। যদি উভয় বিষয়ে শতকরা 15 জন অকৃতকার্য হইয়া থাকে, তবে উভয় বিষয়ে শতকরা কতজন পাশ করিয়াছে ?

মনে কর, পরীক্ষার্থীর সংখ্যা 100 জন।

ঐ 100 জনের মধ্যে যে 35 জন গণিতে ফেল করিয়াছে তাহাদের মধ্যে উভয় বিষয়ে ফেল করা 15 জনও আছে। অতএব, শুধু গণিতে ফেল করিয়াছে (35 – 15) বা 20 জন।

আবার, ঐ 100 জনের মধ্যে যে 40 জন ইংরাজীতে ফেল করিয়াছে, তাহাদের মধ্যেও উভয় বিষয়ে ফেল করা ঐ 15 জন আছে। সুতরাং শুধু ইংরাজীতে ফেল করিয়াছে (40 – 15) বা 25 জন।

∴ 100 জনের মধ্যে সর্বরকমে মোট (20 + 25 + 15) জন বা 60 জন ফেল করিয়াছে।

উভয় বিষয়ে শতকরা (100 – 60) জন বা 40% পাশ করিয়াছে।

উদাহরণ 6. কোন পরীক্ষায় 80% ইংরাজীতে এবং 85% গণিতে পাশ করিয়াছে, কিন্তু উভয় বিষয়ে 75% পাশ করিয়াছে। যদি মাত্র 45 জন পরীক্ষার্থী উভয় বিষয়ে ফেল করিয়া থাকে, তবে কতজন পরীক্ষা দিয়াছিল ?

[ক. প্র. 1938]

মনে কর, পরীক্ষার্থীর সংখ্যা 100 জন। উহাদের মধ্যে 80% হিসাবে ইংরাজীতে পাশের সংখ্যা 80 জন, এবং 85% হিসাবে গণিতে পাশের সংখ্যা 85 জন, কিন্তু ইংরাজী ও গণিত উভয় বিষয়ে পাশের সংখ্যা 75 জন।

∴ 100 জনের মধ্যে শুধু ইংরাজীতে পাশের সংখ্যা $=(80-75)$ বা 5 জন এবং শুধু গণিতে পাশের সংখ্যা $=(85-75)$ বা 10 জন।

অতএব, শুধু ইংরাজীতে, শুধু গণিতে এবং উভয় বিষয়ে পাশ করার সংখ্যা (ইহাদের কেহই উভয় বিষয়ে ফেল নহে) $=(5+10+75)$ বা 90 জন।

∴ 100 জনের মধ্যে উভয় বিষয়ে ফেলের সংখ্যা $=(100-90)$ জন $=10$ জন।

10 জন উভয় বিষয়ে ফেল করিলে মোট পরীক্ষার্থী হয় 100 জন,

∴ 45 „ „ „ „ „ „ „ $\frac{100}{10}\times 45$ বা 450 জন.

∴ নির্ণেয় পরীক্ষার্থীর সংখ্যা $=450$

প্রশ্নমালা 16

1. 4 কিলো লিটার 8 হেক্টো লিটার দুধের সহিত 16 হে. লি. জল মিশ্রিত করা হইল। ঐ মিশ্রিত দুধে শতকরা কত জল আছে?

2. বারুদ প্রস্তুত করিতে 65% সোরা, 20% কাঠকয়লা এবং 15% গন্ধক লাগে। এক মণ বারুদে ঐ দ্রব্যগুলি কি পরিমাণ আছে?

3. ক-এর আয় খ-এর আয় অপেক্ষা 25% বেশী; ক-এর আয় অপেক্ষা খ-এর আয় শতকরা কত কম?

4. একদিন টাকায় 15টি এবং পরদিন টাকায় 12টি আম কেনা হইলে দ্বিতীয় দিনে আমের মূল্য শতকরা কত বাড়িল?

5. আর্কিমিডিস সিদ্ধান্ত করেন যে রাজা হিরোর মুকুটে স্বর্ণ ও রৌপ্যের অনুপাত 2 : 1 ছিল; ঐ মুকুটে শতকরা কত স্বর্ণ ছিল?

6. কতকগুলি পরীক্ষার্থীর শতকরা 5 জন অনুপস্থিত ছিল এবং যাহারা উপস্থিত ছিল তাহাদের 15% অকৃতকার্য হইল। যদি 3230 জন কৃতকার্য হইয়া থাকে, তবে মোট পরীক্ষার্থীর সংখ্যা কত ছিল?

7. কোন বিদ্যালয়ের ছাত্রদের মধ্যে 70% হিন্দু এবং অবশিষ্টের 80% মুসলমান। মুসলমান ছাত্র অপেক্ষা হিন্দু ছাত্র 322 জন বেশী হইলে মোট ছাত্রসংখ্যা কত ছিল?

8. গমের মূল্য শতকরা 10 হারে কমিয়া যাওয়ায় টাকায় 5 ডেকা গ্রাম গম বেশী পাওয়া যায়। পূর্বে টাকায় কত গম পাওয়া যাইত?

9. যদি কাপড়ের মূল্য 75% বৃদ্ধি পায়, তবে কাপড়ের খরচ ঠিক রাখিতে হইলে গৃহস্থকে শতকরা কি পরিমাণ কাপড় ক্রয় কমাইতে হইবে?

√10. কোন ব্যবসায়ে 4000 টাকা মূলধন ছিল, প্রতি বৎসর মূলধন 10% বাড়িলে তৃতীয় বৎসরে কত মূলধন হইবে?

11. কোন দেশের লোকসংখ্যা প্রতি 10 বৎসরে 7% বৃদ্ধি পায়। বর্তমান লোকসংখ্যা 4007150 হইলে, 20 বৎসর পূর্বে সেখানে লোকসংখ্যা কত ছিল? [মা. প্র. 1885]

12. কয়লার মূল্য 20% বেশী হওয়ায় কয়লার পরিমাণও 20% কমাইয়া দিলাম ; ইহাতে আমার কয়লার জন্য খরচ শতকরা কত বেশী বা কম হইল?

13. লেবুর মূল্য $13\frac{1}{3}\%$ বেশী হওয়ায় এখন টাকায় 4টি লেবু কম পাওয়া গেল। (1) এখন টাকায় কয়টি লেবু পাওয়া যায়? (2) পূর্বে টাকায় কয়টি লেবু পাওয়া যাইত?

14. এক ব্যক্তির মূলধন প্রতি বৎসর বার্ষিক 20% হারে বর্ধিত হইয়া চার বৎসর অন্তে 5184 টাকা হইল। প্রথমে কত মূলধন ছিল? [ক. প্র. '50]

15. কোন বাগানে বৃক্ষসংখ্যার 60% আম গাছ এবং অবশিষ্ট লিচু গাছ। 30টি আম গাছ শুকাইয়া গেল এবং 30টি লিচু গাছ বসান হইল। এখন বাগানে শতকরা 45টি আম গাছ হইলে, মোট বৃক্ষসংখ্যা কত?

16. দুইটি বালক কোন পরীক্ষা দেয়। একজন অপরজন অপেক্ষা 9 নম্বর বেশী পায় এবং তাহার নম্বর উভয়ের নম্বরের সমষ্টির 56% ; কে কত নম্বর পাইয়াছিল?

17. কোন স্থানের লোকসংখ্যা 20000 ; যদি পুরুষের সংখ্যা 10% বৃদ্ধি এবং স্ত্রীলোকের সংখ্যা 6% হ্রাস পাইত ; তবে মোট লোকসংখ্যার কোন পরিবর্তন হইত না। পুরুষ ও স্ত্রীলোকের সংখ্যা নির্ণয় কর। [ক. প্র. 1937]

18. কোন পরীক্ষায় 2500 জন পরীক্ষার্থীর $\frac{1}{5}$ অংশ বালিকা ও অবশিষ্ট বালক। বালকদের 5% এবং বালিকাদের 40% অকৃতকার্য হইল। মোট শতকরা কতজন কৃতকার্য হইল? [মা. প্র. 1928]

19. কোন নির্বাচন প্রতিযোগিতায় একজন নির্বাচনপ্রার্থী মোট প্রদত্ত ভোটের 42% ভোট পাইয়া 352 ভোটে পরাজিত হন। ঐ নির্বাচনে মোট কত ভোট দেওয়া হইয়াছিল?

20. কতকগুলি পরীক্ষার্থীর $37\frac{1}{2}\%$ বালিকা। বালকদের 75% এবং বালিকাদের $62\frac{1}{2}\%$ পরীক্ষায় পাশ করিল এবং 342 জন বালিকা ফেল করিল। কত জন বালক ফেল করিয়াছিল? [ঢা. বো. 1936]

21. কোন পরীক্ষায় 52% ইংরাজীতে ও 42% গণিতে অনুত্তীর্ণ হইল। যদি কেবল শতকরা 17 জন উভয় বিষয়েই অনুত্তীর্ণ হইয়া থাকে, তবে শতকরা কতজন উভয় বিষয়ে উত্তীর্ণ হইয়াছে? [ক. প্র. 1927 ; পা. প্র. 1924]

22. একটি পরীক্ষায় পরীক্ষার্থীদের 34% পাটীগণিতে এবং 42% বীজগণিতে ফেল করিল। যদি 20% উভয় বিষয়েই ফেল করিয়া থাকে, তবে শতকরা কতজন উভয় বিষয়ে পাশ করিয়াছে? [ক. প্র. 1944]

23. কোন বিদ্যালয়ের ছাত্রদের মধ্যে 90% বানানে, 85% অঙ্কে এবং 150 জন উভয় বিষয়েই পাশ করিল। যদি কেহই দুই বিষয়ে ফেল না করিয়া থাকে, তবে মোট ছাত্রসংখ্যা কত? [ঢা. বো. 1933]

24. কোন ব্যক্তি জুয়া খেলিয়া প্রথমে তাহার টাকার 75% হারিল, দ্বিতীয় বার খেলিয়া অবশিষ্টের 75% হারিল, এইরূপে তৃতীয় বারেও অবশিষ্টের 75% হারিয়া মাত্র 2 টাকা লইয়া বাড়ী ফিরিল। প্রথমে তাহার কত টাকা ছিল?

25. কোন প্রবেশিকা পরীক্ষায় পরীক্ষার্থীরা অতিরিক্ত গণিত অথবা ইতিহাস অথবা উভয় বিষয়ই লইয়াছিল; যদি পরীক্ষার্থীর সংখ্যা 20000 জন হয় এবং তাহাদের 65·3% অতিরিক্ত গণিত ও 61·7% ইতিহাস লইয়া থাকে, তবে কতজন উভয় বিষয় লইয়াছিল?

26. কোন পরীক্ষায় 70% সাহিত্যে ও 75% গণিতে পাশ করিল। যদি উভয় বিষয়ে 65% পাশ করিয়া থাকে এবং ঐ উভয় বিষয়ে মোট 30 জন ফেল করিয়া থাকে, তবে মোট পরীক্ষার্থীর সংখ্যা কত?

27. কোন ট্রাম কোম্পানীর মোট আয়ের 40% খরচ চালাইবার জন্য ব্যয় হয় এবং অবশিষ্টের 40% রিজার্ভ ফণ্ডে জমা রাখিয়া বাকী টাকা অংশীদারগণকে $3\frac{1}{3}$% হারে লভ্যাংশ দিতে ব্যয় হয়। অংশীদারগণের শেয়ারের মোট পরিমাণ 864000 টাকা হইলে, কোম্পানীর মোট আয় কত? [ক. প্র. '20 (ঐচ্ছিক)]

28. একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 5% কমাইলে এবং প্রস্থ 5% বাড়াইলে উহার আয়তনের শতকরা কি পরিবর্তন হইল?

সরল কুসীদ বা সরল সুদকষা

(Simple Interest)

তোমরা পূর্ব শ্রেণীতে সরল সুদকষা শিখিয়াছ।

যে টাকা ধার দেওয়া হয় তাহাকে **আসল** বা **মূলধন** (Principal বা Capital) বলে।

ঐ ঋণ পরিশোধের সময় ঐ টাকা ব্যবহার করার জন্য অধমর্ণ উত্তমর্ণকে যে অতিরিক্ত টাকা দেয় তাহাকে **সুদ** বা **কুসীদ** (Interest) বলে। সুদ ও আসলের সমষ্টিকে **সবৃদ্ধিমূল** বা **সুদ-আসল** বা **সুদমূল** (Amount) বলে।

সবৃদ্ধিমূল = আসল + সুদ

∴ **আসল = সবৃদ্ধিমূল − সুদ** ; এবং **সুদ = সবৃদ্ধিমূল − আসল**।

সুদের হার : টাকা ধার দেওয়ায় বা লওয়ায় মূলধনের উপর কোন নির্দিষ্ট সময়ের জন্য যে সুদ ধরা হয় তাহাকে **সুদের হার** (Rate of interest) বলে। সাধারণতঃ সুদের হার 100 **টাকার এক বৎসরের সুদকে** ধরা হয়, উহাকে বলে **শতকরা হার**। যথা, যদি 100 টাকার উপর বার্ষিক 5 টাকা করিয়া সুদ ধরা হয়, তবে বলা হইবে **শতকরা বার্ষিক 5 টাকা হারে** (5 Per cent per annum) সুদ।

সুদ নির্ণয়ে দিন গণনা।

যদি সুদ কষার অঙ্কে ঋণ গ্রহণ করার ও ঋণ পরিশোধ করার দুইটি দিন নির্দিষ্ট করিয়া দেওয়া থাকে, তবে মোট দিন গণনা করিবার সময় প্রথম ও শেষ দিন দুইটির মধ্যে একটি দিনকে ধরিতে হয় না, উহাদের মধ্যে কেবল একটি দিনকে ধরা হয়। সাধারণতঃ প্রথম দিন ছাড়িয়া দেওয়া হয়। ঐ প্রদত্ত সময়ের মধ্যে যদি ফেব্রুয়ারী মাস পড়ে, তবে প্রদত্ত সালটি লিপ্ ইয়ার কিনা দেখিবে। যদি উহা লিপ্ ইয়ার হয়, তবে ফেব্রুয়ারী মাসের 29 দিন ধরিবে, নতুবা 28 দিন ধরিবে। মোট দিনগুলিকে বৎসরে পরিণত করিবার সময় 365 দিনে বৎসর ধরিবে।

[**দ্রষ্টব্য :** যদি কোন মাসের প্রথম দিন হইতে অন্য কোন মাসের শেষ তারিখ পর্যন্ত সময় দেওয়া থাকে, তবে দিন গণনা না করিয়া কয়টি মাস আছে তাহাই দেখিবে এবং 12 মাসে বৎসর ধরিবে।]

(ক) **সুদ নির্ণয় :**

উদাহরণ। 1940 খৃষ্টাব্দের 6ই ফেব্রুয়ারী হইতে 19শে এপ্রিল পর্যন্ত 5% হারে 1050 টাকার সুদ ও সবৃদ্ধিমূল কত হইবে ?

ফে. মা. এ.

এখানে প্রদত্ত সময় = (23 + 31 + 19) দিন = 73 দিন = $\frac{73}{365}$ ব. = $\frac{1}{5}$ বৎসর।

100 টাকার 1 বৎসরের সুদ = 5 টাকা

∴ „ „ $\frac{1}{5}$ „ „ = $5 \times \frac{1}{5}$ টা. = 1 টা.

∴ 1 „ „ „ „ = $\frac{1}{100}$ টা.

∴ 1050 „ „ „ „ = $\frac{1050}{100}$ টা. = 10 টা. 50 প.

∴ নির্ণেয় সুদ = 10 টাকা 50 পয়সা ;

এবং নির্ণেয় সবৃদ্ধিমূল = 1050 টাকা + 10 টাকা 50 পয়সা

= 1060 টাকা 50 পয়সা।

[**দ্রষ্টব্য :** এখানে 1940 খৃষ্টাব্দ লিপ্ ইয়ার বলিয়া ফেব্রুয়ারী মাসটি 29 দিনে ধরিতে হইবে, সুতরাং এখানে ফেব্রুয়ারী মাসের (29 − 6) বা 23 দিন ধরা হইল, ইহাতে 6 তারিখ পর্যন্ত বাদ গেল।]

(খ) **আসল নির্ণয় :**

উদাহরণ 1. কোন মূলধনের $\frac{1}{9}$ অংশ বার্ষিক সুদ হয়। 4 বৎসরে যদি 1326 টাকা সবৃদ্ধিমূল হইয়া থাকে, তবে মূলধন কত ?

মনে কর, আসল 1 টাকা, সুতরাং উহার 1 বৎসরের সুদ $=\frac{1}{9}$ টা. ;

∴ উহার 4 বৎসরের সুদ $=\frac{1}{9}$ টা. $\times 4=\frac{4}{9}$ টা. ;

∴ 4 বৎসরে 1 টাকার সবৃদ্ধিমূল $=1$ টা. $+\frac{4}{9}$ টা. $=\frac{13}{9}$ টাকা।

অতএব, $\frac{13}{9}$ টাকা সবৃদ্ধিমূল হইলে আসল $=1$ টাকা

∴ 1 টা. „ „ „ $=\frac{9}{13}$ টাকা

∴ 1326 টা. „ „ „ $=\frac{9}{13}\times 1326$ টা. $=918$ টাকা

∴ নির্ণেয় মূলধন $=918$ টাকা।

উদাহরণ 2. কোন মূলধন হইতে 5 বৎসরে 250 টাকা এবং 7 বৎসরে 568 টাকা সবৃদ্ধিমূল হইল। মূলধন কত ?

সবৃদ্ধিমূল $=$ আসল $+$ সুদ

∴ এখানে আসল $+7$ বৎসরের সুদ $=568$ টাকা

আবার, আসল $+5$ বৎসরের সুদ $=520$ টাকা

∴ (বিয়োগ করিয়া) 2 বৎসরের সুদ $=48$ টাকা

∴ 1 „ „ $=24$ টাকা

∴ 5 „ „ $=24$ টা. $\times 5=120$ টাকা

∴ নির্ণেয় মূলধন (আসল) $=5$ বৎসরের সবৃদ্ধিমূল -5 বৎসরের সুদ

$=520$ টা. -120 টা. $=400$ টাকা।

(গ) **সুদের শতকরা হার নির্ণয় :**

উদাহরণ। বার্ষিক কত হার সুদে কোন মূলধন $16\frac{2}{3}$ বৎসরে সুদেমূলে দ্বিগুণ হইবে ?

[এরূপস্থলে আসল 100 টাকা ধরিয়া করিবে।]

মনে কর, আসল 100 টাকা, সুতরাং $16\frac{2}{3}$ বৎসরে ইহা সুদে-মূলে দ্বিগুণ অর্থাৎ 200 টাকা হইবে। অতএব, সুদ হইবে $(200-100)$ বা 100 টাকা।

∴ 100 টাকার $16\frac{2}{3}$ বৎসরের সুদ $=100$ টাকা

∴ 100 টাকার 1 বৎসরের সুদ $=\frac{100\times 3}{50}$ টা. $=6$ টাকা

∴ নির্ণেয় সুদের হার $=$ বার্ষিক 6%।

(ঘ) **সময় নির্ণয় :**

[মনে রাখিবে, সময় $=$ মোট সুদ $\div$ আসলের 1 বৎসরের সুদ।]

উদাহরণ। বার্ষিক 5% হার সুদে কত বৎসরে 520 টাকার সবৃদ্ধিমূল 611 টাকা হইবে ?

এখানে আসলের মোট সুদ $=611$ টা. -520 টা. $=91$ টাকা।

আবার, 100 টাকার 1 বৎসরের সুদ = 5 টাকা,

∴ 1 „ 1 „ „ $= \frac{5}{100}$ টাকা,

∴ 520 „ 1 „ „ $= \frac{5 \times 520}{100}$ টা. = 26 টাকা

∴ নির্ণেয় সময় = (91 টা. ÷ 26 টা.) বৎসর = $3\frac{1}{2}$ বৎসর।

প্রশ্নমালা 17

1. বার্ষিক 5% হার সুদে 1936 সালের 8ই ফেব্রুয়ারী হইতে 21শে এপ্রিল পর্যন্ত 525 টাকার সুদ কত হইবে?

2. বার্ষিক 4% হার সুদে 1লা জানুয়ারী হইতে 30শে সেপ্টেম্বর পর্যন্ত 425 ট্যকা সুদে-আসলে কত হইবে?

3. 5% হার সুদে 1947 খৃষ্টাব্দের 20শে সেপ্টেম্বর 750 টাকা ধার লইয়া 1948 খৃষ্টাব্দের 26শে এপ্রিল ঋণ পরিশোধ করিলে কত সুদ দিতে হইবে?

4. বার্ষিক 4% সুদে কত টাকা 5 বৎসরে সুদেমূলে 360 টাকা হইবে?

5. বার্ষিক $6\frac{1}{4}$% হারে কত টাকার দৈনিক 1 টাকা সুদ হয়? (ক.প্র. '42)

6. বার্ষিক 5% হার সুদে কত টাকার 11ই জুন হইতে 4ঠা নভেম্বর পর্যন্ত 5151 টাকা সবৃদ্ধিমূল হইবে?

7. কোন মূলধন হইতে বৎসরে তাহার $\frac{1}{8}$ অংশ সুদ হয়। যদি 5 বৎসরে 2200 টাকা সবৃদ্ধিমূল হইয়া থাকে, তবে আসল কত?

8. কোন মূলধন হইতে 3 বৎসরে 560 টাকা এবং 5 বৎসরে 600 টাকা সবৃদ্ধিমূল হইলে মূলধন কত? (ক. প্র. '38)

9. শতকরা বার্ষিক কত হার সুদে কোন মূলধনের $6\frac{1}{4}$ বৎসরের সুদ মূলধনের $\frac{5}{16}$ অংশ হইবে? (ক. প্র. '46)

10. বার্ষিক শতকরা সুদের হার কত হইলে কোন মূলধন 25 বৎসরে সুদেমূলে 3 গুণ হইবে? (ক. প্র. '36)

11. শতকরা বার্ষিক কত হার সুদে টাকা ধার দিলে 4 বৎসরে সবৃদ্ধিমূলের $\frac{1}{6}$ অংশ সুদ হইবে?

12. সুদের হার শতকরা কত হইলে 3300 টাকার 3 বৎসরে 3621 টাকা 75 পয়সা সবৃদ্ধিমূল হইবে?

13. 5 বৎসরে কোন আসল টাকা সুদেমূলে 1100 টাকা হইল। যদি আসলের $\frac{3}{8}$ অংশ সুদ হইয়া থাকে, তবে আসল ও শতকরা বার্ষিক সুদের হার কত? (ক. প্র. '34)

14. কোন মূলধন হইতে 3 বৎসরে 632 টাকা 50 পয়সা এবং 4 বৎসর 6 মাসে 673 টাকা 75 পয়সা সবৃদ্ধিমূল হইল। আসল ও সুদের শতকরা বার্ষিক হার নির্ণয় কর।

15. বার্ষিক $3\frac{1}{3}$ হারে সুদ হইলে কত বৎসরে 1350 টাকার সবৃদ্ধিমূল 1620 টাকা হইবে ? [ক. প্র. '47]

16. বার্ষিক 10% হার সুদে কত বৎসরে সবৃদ্ধিমূলের $\frac{2}{5}$ অংশ সুদ হইবে ?

17. কোন মূলধন 10 বৎসরে দ্বিগুণ হয় ; কত বৎসরে উহা তিনগুণ হইবে ?

18. বার্ষিক 4% সুদে 12345 পা. 13 শি. $9\frac{1}{4}$ পেন্সের দ্বিগুণ হইতে কত সময় লাগিবে ? [পা. প্র. '18]

সুদকষা [বিবিধ]

উদাহরণ 1. শতকরা বার্ষিক কত হার সুদে 400 ডলারের 8 বৎসরের সুদ, 4% হার সুদে 1250 ডলারের 4 বৎসরের সুদের সমান হইবে ?

[**দ্রষ্টব্য ঃ** এখানে প্রথমে 1250 ডলারের 4% হারে 4 বৎসরের সুদ নির্ণয় করিতে হইবে। এরূপ প্রশ্নের কোন্ অংশ প্রথমে করা প্রয়োজন তাহা দেখিয়া লইবে। একটি অংশ অপরটির উপর নির্ভর করে। যে অংশের উপর নির্ভর করে তাহাই আগে করিবে।]

দ্বিতীয় পক্ষে 100 ডলারের 1 বৎসরের সুদ = 4 ডলার

∴ „ „ 4 „ „ = 16 ডলার

∴ 1250 „ 4 „ „ = $\frac{16}{100}\times 1250$ ড. = 200 ডলার,

সুতরাং প্রথম পক্ষেও 400 ডলারের 8 বৎসরের সুদ = 200 ডলার

∴ 1 „ 8 „ = $\frac{200}{400}$ ড. = $\frac{1}{2}$ ডলার

∴ 1 „ 1 „ = $\frac{1}{2\times 8}$ ড. = $\frac{1}{16}$ ডলার

∴ 100 „ „ „ = $\frac{1}{16}\times 100$ ড. = $6\frac{1}{4}$ ডলার।

∴ নির্ণেয় সুদের হার = বার্ষিক $6\frac{1}{4}$%.

উদাহরণ 2. বার্ষিক শতকরা যত হার সুদে কোন টাকা 20 বৎসরে দ্বিগুণ হয়, তত হার সুদে কত মূলধন হইতে 4 বৎসরে 720 টাকা সবৃদ্ধিমূল হইবে ?

প্রথম পক্ষে, 100 টাকা আসল হইলে সবৃদ্ধিমূল 200 টাকা হয়।

সুতরাং 100 টাকার 20 বৎসরের সুদ = 200 টা. − 100 টা. = 100 টাকা

∴ 100 টাকার 1 বৎসরের সুদ = $\frac{100}{20}$ টা. = 5 টাকা।

দ্বিতীয় পক্ষেও 100 টাকার 1 বৎসরের সুদ = 5 টাকা

∴ 100 „ 4 বৎসরের সুদ = 20 টাকা

অতএব, (100 + 20) বা 120 টা. সবৃদ্ধিমূল হইলে আসল = 100 টা.

∴ 1 টা. „ „ „ = $\frac{100}{120}$টা. = $\frac{5}{6}$টা.

∴ 720 টা. „ „ „ = $\frac{5}{6}$ টা. × 720

= 600 টাকা।

∴ নির্ণেয় আসল = 600 টাকা।

উদাহরণ 3. ক একই সময়ে বার্ষিক 4% হার সুদে খ-কে 1000 টাকা এবং গ-কে কিছু টাকা ধার দিল। যদি সে 4 বৎসরে উভয়ের নিকট হইতে মোট 210 টাকা সুদ পাইয়া থাকে, তবে গ-কে কত টাকা ধার দেওয়া হইয়াছিল ?

এখানে উভয় টাকারই 4% হারে সুদ হয়।

এক্ষণে 100 টাকার 4 বৎসরের সুদ = 4 টাকা × 4 = 16 টাকা,

1000 „ 4 „ „ = 16 টা. × 10 = 160 টাকা,

সুতরাং খ-এর নিকট হইতে 160 টাকা সুদ পাওয়া গিয়াছে।

∴ গ-এর টাকার 4 বৎসরের মোট সুদ = 210 টা. − 160 টা. = 50 টা.

এক্ষণে, 16 টাকা 4 বৎসরে সুদ হয় 100 টাকা হইতে

∴ 1 „ 4 „ „ „ $\frac{100}{16}$ „ „

∴ 50 „ 4 „ „ „ $\frac{100 \times 50}{16}$ টাকা বা $312\frac{1}{2}$ টাকা হইতে।

∴ গ-কে 312 টাকা 50 পয়সা ধার দেওয়া হইয়াছিল।

উদাহরণ 4. একই হার সুদে 300 টাকা 4 বৎসরের জন্য এবং 500 টাকা 3 বৎসরের জন্য ধার দিয়া মোট 108 টাকা সুদ পাওয়া গেল ; সুদের হার নির্ণয় কর।

300 টাকার 4 বৎসরের সুদ = 300 × 4 বা 1200 টাকার 1 বৎসরের সুদ

এবং 500 „ 3 „ „ = 500 × 3 বা 1500 „ 1 „ „

∴ প্রদত্ত মোট সুদ = (1200 + 1500) বা 2700 „ 1 „ „

∴ 2700 টাকার 1 বৎসরের সুদ = 108 টাকা,

∴ 100 „ 1 „ „ = $\frac{108}{27}$ টাকা = 4 টাকা

∴ নির্ণেয় সুদের হার = বার্ষিক 4%.

উদাহরণ 5. বার্ষিক 5% হার সুদে 600 টাকা এবং 4% হারে 800 টাকা ধার দিয়া মোট 250 টাকা সুদ পাওয়া গেল। দ্বিতীয় টাকাটি 2 বৎসর বেশী ধার দেওয়া ছিল। কোন্ টাকা কত বৎসর ধার দেওয়া ছিল ?

এখানে 800 টাকা 2 বৎসর বেশী খাটিয়াছে।

4% হারে 800 টাকার ঐ 2 বৎসরের সুদ = 4 টাকা × 8 × 2 = 64 টাকা।

অতএব, 600 টাকার 5% হারে এবং 800 টাকার 4% হারে একই সময়ে মোট সুদ হইয়াছে (250 টাকা − 64 টাকা) বা 186 টাকা।

এক্ষণে, 5% হারে 600 টাকার 1 বৎসরের সুদ = 5 টাকা × 6 = 30 টাকা

এবং 4% হারে 800 „ 1 „ „ = 4 টাকা × 8 = 32 টাকা,

∴ উভয় টাকা হইতে 1 বৎসরে মোট সুদ হয় (30টা. + 32টা.) বা 62টা.,

∴ উভয় টাকা হইতে মোট 186 টাকা সুদ হয় (186 ÷ 62) বা 3 বৎসরে।

অতএব, প্রথম টাকা 3 বৎসর এবং দ্বিতীয় টাকা 5 বৎসর ধার দেওয়া ছিল।

প্রশ্নমালা 18

1. বার্ষিক 5% হার সুদে কত বৎসরে সবৃদ্ধিমূল আসলের দ্বিগুণ হইবে ?

2. বার্ষিক $4\frac{1}{2}$% হার সুদে $3\frac{1}{3}$ বৎসরে যে টাকা হইতে 740 টা. 80 প. সবৃদ্ধিমূল হয়, তাহা হইতে $5\frac{1}{2}$% হার সুদে $2\frac{1}{3}$ বৎসরে কত সবৃদ্ধিমূল হইবে ?

3. শতকরা বার্ষিক কত হার সুদে 800 টাকার 4 বৎসরের সুদ, বার্ষিক 4% হারে 625 টাকার 8 বৎসরের সুদের সমান হইবে ? [ক. প্র. 1927]

4. বার্ষিক সুদের হার 4% হইতে কমিয়া $3\frac{3}{4}$% হওয়ায় এক ব্যক্তির সুদ হইতে বার্ষিক আয় 60 টাকা কম হইল। তাহার কত টাকা মূলধন ছিল ? [ক. প্র. 1933]

5. কত বৎসরে 3% হারে 4000 টাকার সুদ, 4% হারে 5000 টাকার 5 বৎসরের সুদের সমান হইবে ? [ক. প্র. 1940]

6. 6% হার সুদে 8 বৎসরে 950 টাকা হইতে যে সুদ হয়, কত টাকা হইতে $7\frac{1}{2}$% হারে 19 বৎসরে সেই সুদ হইবে ? [ঢা. বো. 1934]

7. বার্ষিক শতকরা সুদের হার কত হইলে 300 টাকার 3 বৎসরের সুদ 800 টাকার বার্ষিক 9% হারে 6 মাসের সুদের সমান হইবে ?

8. এক ব্যক্তি বাড়ী করার টাকা মিটাইবার জন্য বার্ষিক 5% হার সুদে 1000 টাকা ধার করিল। সে তখন ঐ বাড়ী মাসিক 12 টাকা 50 পয়সায় ভাড়া দিল। এই ভাড়ার টাকা জমাইয়া সে কত সময়ে সুদেমূলে ধার শোধ করিতে পারিবে ?

9. কোন মূলধন সুদে প্রতি বৎসরে $\frac{1}{8}$ অংশ বৃদ্ধি পাইয়া 5 বৎসরে সুদেমূলে 2200 টাকা হইল। ঐ মূলধন কত ?

10. বার্ষিক 5% হারে 4 বৎসরে কত টাকার সুদ, 3% হারে 250 টাকার 6 বৎসরের সুদের সমান হইবে ?

11. যদি 4 বৎসরে 450 টাকার সবৃদ্ধিমূল 540 টাকা হয়, তবে একই হার সুদে কত টাকার 5 বৎসরে 637 টাকা 50 পয়সা সবৃদ্ধিমূল হইবে ?

12. কোন আসল হইতে সুদেমূলে 3 বৎসরে 448 টাকা এবং $4\frac{1}{2}$ বৎসরে 472 টাকা হইল। আসল ও সুদের হার নির্ণয় কর।

13. একই সুদের হারে 400 টাকার 5 বৎসরের এবং 600 টাকার 4 বৎসরের সুদ একত্রে 132 টাকা হইল। সুদের হার কত ? [ক. প্র. 1939]

14. বার্ষিক 5% হার সুদে 400 টাকার কত বৎসরের সুদ, বার্ষিক 6·25% হারে 500 টাকার 4 বৎসরের সুদের সমান হইবে ?

15. যে সুদের হারে আসল টাকা 10 বৎসরে দ্বিগুণ হয়, সেই হারে কত টাকা 4 বৎসরে সুদেমূলে 700 টাকা হইবে ?

16. 12 বৎসর 6 মাসে সবৃদ্ধিমূল আসলের দ্বিগুণ হইলে, কত বৎসরে উহা আসলে 3 গুণ হইবে ?

17. বার্ষিক 7% হার সুদে 9000 টাকা যে সময়ে সুদেমূলে 12150 টাকা হয়, কত টাকা বার্ষিক 4% হার সুদে সেই সময়ে সুদেমূলে 14400 টাকা হইবে ? [ক. প্র. 1941]

18. ক বার্ষিক 8% হার সুদে একই সময়ে খ-কে 500 টাকা এবং গ-কে কিছু টাকা ধার দিল। সে যদি 4 বৎসরে উভয়ের নিকট হইতে মোট 210 টাকা সুদ পাইয়া থাকে, তবে সে গ-কে কত টাকা ধার দিয়াছিল ? [ঢা. বো. '37]

19. ক একই হারে 3 বৎসরের জন্য খ-কে 400 টাকা এবং গ-কে 4 বৎসরের জন্য 500 টাকা ধার দিল। ইহাতে সে যদি মোট 160 টাকা সুদ পাইয়া থাকে, তবে সুদের হার কত ?

20. বার্ষিক 5% হার সুদে 6 বৎসরে কোন আসল সুদেমূলে 1326 টাকা হইলে, কত বৎসরে উহা সুদেমূলে 1530 টাকা হইবে ? [পা. প্র. 1891]

21. এক ব্যক্তির হংকং ব্যাঙ্কে 1200 টাকা এবং রিজার্ভ ব্যাঙ্কে 1400 টা. জমা আছে। দ্বিতীয় ব্যাঙ্কে বার্ষিক সুদের হার $\frac{1}{2}$% বেশী। উভয় টাকা হইতে তাঁহার মোট বার্ষিক আয় 85 টাকা হইলে ঐ দুই ব্যাঙ্কে সুদের হার কত ?

*22. ক বার্ষিক 6% হার সুদে 800 টাকা এবং খ বার্ষিক 5% হার সুদে 910 টাকা ধার করিল। কত বৎসরে তাহাদের ঋণের পরিমাণ সমান হইবে ?

23. বার্ষিক 5% সুদ হারে 300 টাকার কোন সময়ের সুদ ও বার্ষিক 3% হারে 500 টাকার আরও 2 বৎসর অধিক সময়ের সুদ একত্রে 150 টাকা হইল। আসল দুইটির কত বৎসর করিয়া সুদ ধরা হইয়াছে ?

আসন্ন মান (Approximation)

আসন্ন মান। দৈনন্দিন কর্মক্ষেত্রে অনেক সময় কোন রাশির প্রকৃত মান অথবা কোন বস্তুর মূল্য, মাপ বা ওজন সঠিকভাবে নিরূপণ করা যায় না ; সুতরাং কাজ চালাইবার জন্য ঐরূপ ক্ষেত্রে প্রকৃত মান, প্রকৃত মূল্য বা পরিমাণের নিকটতম বা কাছাকাছি মান গ্রহণ করা হইয়া থাকে। ইহাকেই ঐ রাশির **আসন্ন মান** বা ঐ বস্তুর আসন্ন মূল্য বা পরিমাণ বলা হয়।

মনে কর, 11 জন বালককে 27 টাকা সমানভাবে ভাগ করিয়া দিতে হইবে। প্রত্যেক বালক পাইবে 27 টা. ÷ 11 বা 2 টাকা $45\frac{5}{11}$ পয়সা। এখন এই ভাগের টাকা কিভাবে দেওয়া যাইবে ? পয়সা মুদ্রা প্রচলিত আছে বটে, কিন্তু উহার অংশ দিবার মত কোন মুদ্রাই নাই। সুতরাং কার্যক্ষেত্রে $\frac{5}{11}$ পয়সা দেওয়া সম্ভব নহে। এখন দেখ, যদি প্রত্যেক বালককে 2 টাকা 45 পয়সা

দেওয়া হয়, তবে সে তাহার প্রকৃত প্রাপ্য অপেক্ষা $\frac{5}{11}$ প. কম পাইবে। আর প্রত্যেককে 2 টা. 46 প. দিলে, সে $\frac{6}{11}$ প. (6 প. – 5$\frac{5}{11}$ প.) বেশী পাইবে। এই 2 টা. 45 প. অথবা 2 টা. 46 প. কোনটিই প্রত্যেক বালকের প্রকৃত প্রাপ্য নহে ; সুতরাং এই কম ও বেশী উভয়কেই ভুল বলিতে হইবে। উভয় পক্ষেই যখন ভুল (error) হইতেছে, তখন এই ভুলের পরিমাণ যত কম হয়, বিশুদ্ধতার মাত্রা ততই অধিক হইবে।

উপরের দৃষ্টান্তস্থলে 2 টা. 45 প. দিলে ভুল হয় $\frac{5}{11}$ প., আর 2 টা. 46 প. দিলে ভুল হয় $\frac{6}{11}$ প.। $\frac{6}{11}$ প. অপেক্ষা $\frac{5}{11}$ প. কম ; সুতরাং প্রত্যেককে 2 টা. 45 প. দিলেই পয়সা পর্যন্ত প্রকৃত প্রাপ্যের নিকটতম বা আসন্ন প্রাপ্য দেওয়া হইবে। এইরূপে দেখ, আসন্ন টাকা পর্যন্ত ধরিলে প্রত্যেকের প্রাপ্যের আসন্ন মান হইবে 2 টাকা।

নিয়ম : কোন রাশির প্রকৃত মানের পরিবর্তে নির্দেশমত আসন্ন মান নির্ণয় করিতে হইলে, সেই রাশির শেষ এককের ভগ্নাংশটি যদি $\frac{1}{2}$ অপেক্ষা কম হয়, তবে উহা ছাড়িয়া দিতে হয় ; আর ভগ্নাংশটি $\frac{1}{2}$এর সমান বা $\frac{1}{2}$ অপেক্ষা বেশী হইলে তাহা ছাড়িয়া দিয়া শেষ একটির সহিত 1 যোগ করিতে হয়।

পূর্ণসংখ্যার আসন্ন মান। 5832 সংখ্যাটির মান 5000 লিখিলে প্রকৃত-মান অপেক্ষা 832 কম লেখা হয় এবং 5832এর পরিবর্তে 6000 লিখিলে প্রকৃত-মান অপেক্ষা (6000 – 5832) বা 168 বেশী লেখা হয়। এখন দেখ, 6000 ও 5000এর মধ্যে প্রথমটি প্রকৃত মান 5832এর অধিকতর নিকটবর্তী।

অতএব, 5832এর আসন্ন সহস্র পর্যন্ত মান 6000 হইবে। অনুরূপে 5832এর আসন্ন শতক পর্যন্ত মান 5800 এবং আসন্ন দশক পর্যন্ত মান 5830.

দশমিক ভগ্নাংশের আসন্ন মান। কোন দশমিক ভগ্নাংশের কোন নির্দিষ্ট দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান নির্ণয় করিতে হইলে, সেই নির্দিষ্ট স্থান পর্যন্ত অঙ্কগুলি লিখিয়া পরবর্তী অবশিষ্ট অঙ্কগুলি ত্যাগ করিবে ; কিন্তু পরিত্যক্ত অঙ্কগুলির বামদিক হইতে প্রথম অঙ্কটি 5 বা 5 অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে ঐ নির্দিষ্ট স্থানের শেষ অঙ্কের সহিত 1 যোগ করিতে হয়। যথা, 3·65038এর পূর্ণসংখ্যা পর্যন্ত আসন্ন মান = 4 (এখানে পূর্ণসংখ্যা 3-এর পরবর্তী পরিত্যক্ত অংশের বামদিকের প্রথম অঙ্ক 6-টি 5-এর বেশী বলিয়া পূর্ণসংখ্যা 3-এর সহিত 1 যোগ করিয়া 4 উত্তর হইল)।

উহার 1 দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান = 3·7 (এখানে পরিত্যক্ত অংশের প্রথম অঙ্ক 5 হওয়ায় পূর্ব অঙ্কে 1 যোগ হইল)

" 2 " " " " " = 3·65 (এখানে পরিত্যক্ত অংশের প্রথম অঙ্ক 0 বলিয়া পূর্ব অঙ্কে কিছু যোগ হয় নাই)

" 3 " " " " " = 3·650

" 4 " " " " " = 3·6504.

[**দ্রষ্টব্য :** (1) "আসন্ন মান" এবং "শুদ্ধ মান" একই। **"দশমিক স্থান পর্যন্ত"** এবং **"দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ"** এই দুইটির অর্থ এক নহে। 1·4068এর তিন দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত (to 3 places of decimals) মান নির্ণয় করিতে বলিলে উত্তর হইবে 1·406, কিন্তু উহার তিন দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধ (correct to 3 places of decimals) মান নির্ণয় করিতে বলিলে উত্তর হইবে 1·407. প্রথমটি দ্বারা আসন্ন মান বুঝায় না, দ্বিতীয়টিতে আসন্ন মান বুঝায়।

(2) 1·345এর দুই দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধ মান 1·35 ও 1·34 দুইই হইতে পারে। কারণ, প্রথমটি প্রকৃত মান অপেক্ষা (1·35 − 1·345) বা ·005 বেশী এবং দ্বিতীয়টি (1·345 − 1·34) বা ·005 কম। কিন্তু প্রচলিত নিয়মে ঐ শুদ্ধমান 1·35ই ধরিতে হইবে।]

সার্থক অঙ্ক (Significant figures) **:** 1 হইতে 9 পর্যন্ত অঙ্কগুলি লইয়া সংখ্যা গঠিত হয়। ঐ অঙ্কগুলিকে সার্থক অঙ্ক বলা হয়। দুইটি সার্থক অঙ্কের মধ্যে একটি বা একাধিক শূন্য (0) থাকিলে ঐ শূন্যকেও সার্থক অঙ্ক ধরা হয়। কোন দশমিক ভগ্নাংশের প্রথমে দশমিক বিন্দু ও তাহার পরই শূন্য থাকিলে ঐ শূন্য ব্যতীত পরের অন্য অঙ্কগুলিকে সার্থক অঙ্ক বলে। পূর্ণসংখ্যা বা দশমিক ভগ্নাংশের শেষ শূন্য বা শূন্যগুলি কখন সার্থক অঙ্ক হয়, আবার কখন হয় না।

দৃষ্টান্ত : (1) 30·23045এর চারিটি সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত আসন্ন মান = 30·23, কিন্তু উহার 4 দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত আসন্ন মান = 30·2305 ;

(2) ·12065এর 4 দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত অথবা চারিটি সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত আসন্ন মান উভয়ই ·1207 ;

(3) ·00147এর একটি সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধমান = ·001, উহার দুইটি সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধমান = ·0015 ;

(4) ·000240079এর পাঁচ দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত আসন্ন মান = ·00024, কিন্তু উহার পাঁচটি সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত আসন্ন মান = ·00024008 ;

(5) ·44598এর 4 দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধ মান এবং 4টি সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত আসন্ন মান উভয়ই ·4460 (এখানে 0 সার্থক অঙ্ক, এস্থলে পরিত্যক্ত অঙ্ক 8 বলিয়া ·4459এর শেষ অঙ্ক 9এর সহিত 1 যোগ করিয়া ·4460 হইল) ;

(6) 163289এর চারিটি সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত আসন্ন মান 163300 (এখানে শূন্য দুইটি সার্থক অঙ্ক নহে) ;

(7) 705769এর সহস্র পর্যন্ত ও শতক পর্যন্ত আসন্ন মান যথাক্রমে 706000 ও 705800 (উভয় স্থলেই শেষের শূন্যগুলি সার্থক অঙ্ক নহে)।

দশমিকের আসন্ন যোগ ও বিয়োগফল নির্ণয়

নিয়ম ঃ যত দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত যোগ বা বিয়োগফল নির্ণয় করিতে হইবে তাহার আসন্ন মান নির্ণয়ের জন্য পরবর্তী অঙ্কটি ঠিক ভাবে জানিতে হইবে। অতএব যতগুলি অঙ্ক পর্যন্ত আসন্ন মান নির্ণয় করিতে হইবে, তাহার পরে আরও দুই অঙ্ক পর্যন্ত যোগফল বা বিয়োগফল নির্ণয় করিবে। তারপর আসন্ন মানে উত্তর দিবে।

উদাহরণ 1. 4·3074, ·0028391 ও $9{\cdot}3\dot{6}\dot{4}$এর আসন্ন 5 দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত সমষ্টি কত ?

4·30740	
·00283	91
9·36464	64
13·67488	55

এখানে আসন্ন 5 দশমিক অঙ্ক পাইতে হইলে ষষ্ঠ দশমিক অঙ্কটি ঠিকভাবে জানিতে হইবে, সুতরাং আরও এক অঙ্ক বেশী অর্থাৎ সপ্তম দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত লইয়া সমষ্টি নির্ণয় করিতে হইবে।

∴ নির্ণেয় সমষ্টি = 13·67489.

উদাহরণ 2. $32{\cdot}\dot{8}\dot{7}$, $7{\cdot}\dot{3}0\dot{2}$, ·0865 ও 3·02এর যোগফল আসন্ন 3টি সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত কত হইবে ?

32·8	78
7·3	02
·0	86
3·0	2
43·2	86

∴ নির্ণেয় যোগফল = 43·3.

[**দ্রষ্টব্য ঃ** গুণ, ভাগ এবং শ্রেণী প্রভৃতির আসন্ন মান নির্ণয় করা যায় ; কিন্তু তাহা পাঠ্য-বহির্ভূত বলিয়া এখানে দেওয়া হইল না।]

প্রশ্নমালা 19

নিম্নলিখিত সংখ্যাগুলিকে আসন্ন সহস্রে ও শতকে প্রকাশ কর :—

1 7432 2. 9672 3. 3726

4. 3·74036 সংখ্যাটির যথাক্রমে 2, 3, 4 দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধমান কত ?

5. 7·562এর আসন্ন পূর্ণসংখ্যায় মান নির্ণয় কর।

নিম্নলিখিত সংখ্যাগুলির 3টি সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত আসন্ন মান নির্ণয় কর :—

6. 3·265 7. 5·072 8. 72·083 9. ·007876

10. নিম্নলিখিত সংখ্যাগুলির আসন্ন মান 2 দশমিক স্থান পর্যন্ত প্রকাশ কর :—

(1) ·3216 (2) 2·447 (3) ·0269

11. নিম্নলিখিত সংখ্যাগুলিকে আসন্ন 3টি সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত প্রকাশ কর :—

(i) ·3276 (ii) ·02145 (iii) 2·034

চারি দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত ও চারি সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত আসন্ন যোগফল নির্ণয় কর :—

12. $32{\cdot}036 + {\cdot}7\dot{2}\dot{8} + 5{\cdot}035213$ **13.** $\cdot004872 + 13{\cdot}\dot{7}2\dot{5} + {\cdot}\dot{8}\dot{6}$

তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত ও তিন সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত আসন্ন বিয়োগফল নির্ণয় কর :—

14. $95{\cdot}3064,\ 90{\cdot}\dot{7}\dot{6}$ **15.** ${\cdot}78205$ ও ${\cdot}83\dot{1}\dot{2}$ **16.** $7{\cdot}5\dot{3}1\dot{2} - 2{\cdot}0\dot{4}\dot{6}$.

চক্রবৃদ্ধি (Compound Interest)

চক্রবৃদ্ধি : যদি এই সর্তে টাকা ধার দেওয়া হয় যে যতদিন না ঋণ শোধ হইবে ততদিন উহার সুদ নির্দিষ্ট সময় (যথা, 1 বৎসর, 6 মাস বা 3 মাস অন্তর) পরে পরে দিতে হইবে এবং না দিতে পারিলে ঐ সময় অন্তে প্রাপ্য সুদ আসলের সহিত যুক্ত হইয়া ঐ সমষ্টির উপর আবার পরবর্তী সময়ের সুদ চলিবে, তাহা হইলে ঐরূপ সুদকে চক্রবৃদ্ধি বলে। মনে কর, বৎসরান্তে সুদ দিতে হইবে এই সর্তে বার্ষিক 4% হার সুদে 100 টাকা ধার দেওয়া হইল। প্রথম 1 বৎসরের সুদ 4 টাকা না দিলে, দ্বিতীয় বৎসরে (100+4) বা 104 টাকার উপর 4% হারে সুদ ধরা হইবে। এইভাবে যে সুদ হয় তাহাকেই **চক্রবৃদ্ধি** বলে।

সরল সুদে আসল সর্বদা একই থাকে, কিন্তু চক্রবৃদ্ধিতে আসল ক্রমশঃ বৃদ্ধি পায়।

সমূল-চক্রবৃদ্ধি : প্রথম আসলের সহিত নির্দিষ্ট সময়ের চক্রবৃদ্ধি যোগ করিলে যাহা হয় তাহাকে সমূল-চক্রবৃদ্ধি (Amount) বলে।

চক্রবৃদ্ধি নির্ণয়ের প্রণালী

(1) যদি বার্ষিক 3% হার সুদে 350 টাকা ধার দেওয়া হয়, তবে এক বৎসর অন্তে সুদ হইবে $\frac{350 \times 3}{100}$ টাকা বা $\frac{1050}{100}$ টা. বা 10·5 টাকা। অতএব, এখানে দেখা গেল যে, আসলকে হার দিয়া গুণ করিয়া তাহার ডানদিক হইতে দুই অঙ্কের বামে দশমিক বিন্দু বসাইলেই সুদ পাওয়া যাইবে।

(2) সুদের হার মিশ্র ভগ্নাংশ (যথা, $3\frac{1}{2}\%$, $4\frac{3}{4}\%$ প্রভৃতি) হইলে সমাংশের (Aliquot part) সাহায্যে চক্রবৃদ্ধি নির্ণয় করিবে।

(3) যদি সময় মিশ্র ভগ্নাংশ (যথা, $2\frac{1}{2}$ ব. বা $3\frac{1}{3}$ বৎসর বা 4 ব. 3 মা. প্রভৃতি) হয়, তবে প্রথমে পূর্ণ বৎসরগুলির চক্রবৃদ্ধি নির্ণয় করিয়া বৎসরের ভগ্নাংশের জন্য সেই বৎসরের আসলের ঐ আংশিক বৎসরের **সরল সুদ** বাহির করিবে এবং উহা পূর্বের চক্রবৃদ্ধির সহিত যোগ করিবে।

(4) আসলটি মিশ্ররাশি হইলে তাহাকে টাকায় বা পাউণ্ডে পরিণত করিয়া দশমিকে প্রকাশ করিবে। যথা, আসল 304 টা. 9 প. = 304·09 টাকা।

(5) সুদ যদি 6 মাস বা 4 মাস অন্তে দেয় হয়, তবে তাহার উল্লেখ থাকিবে। যদি ঐরূপ কোন উল্লেখ না থাকে, তবে বুঝিবে সুদ বৎসরান্তে দেয়। 6 মাস অন্তর সুদ দেয় হইলে পূর্বোক্ত নিয়মে প্রতি 6 মাস বা $\frac{1}{2}$ বৎসরের সুদ নির্ণয় করিয়া পূর্ব আসলের সহিত উহা যোগ করিবে।

অথবা, মনে কর, 6 মাস অন্তর সুদ দেয় এবং 4% হারে 2 বৎসরের চক্রবৃদ্ধি নির্ণয় করিতে হইবে। এরূপ স্থলে সুদ যেন বৎসরান্তে দেয় ধরিয়া প্রদত্ত হারের অর্ধেক হারে প্রদত্ত সময়ের দ্বিগুণ সময়ের চক্রবৃদ্ধি নির্ণয় করিলেও হইবে; অর্থাৎ এক্ষেত্রে 2% হারে 4 বৎসরের চক্রবৃদ্ধি নির্ণয় করিলেই হইবে।

এইরূপ 4 মাস অন্তর সুদ দেয় হইলে, প্রদত্ত হারের $\frac{1}{3}$ হারে (কারণ, 4 মাস = $\frac{1}{3}$ বৎসর) প্রদত্ত সময়ের 3 গুণ সময়ের চক্রবৃদ্ধি নির্ণয় করিবে।

নিম্নের উদাহরণগুলি ভালভাবে লক্ষ্য কর :—

উদা. 1. 5% হার সুদে 1000 টাকার 3 বৎসরের চক্রবৃদ্ধি কত হইবে ?

1000 টাকা = প্রথম বৎসরের আসল
×5÷100
50·00 টা. = " " সুদ
1000 টা.
1050 টা. = দ্বিতীয় বৎসরের আসল
×5÷100
52·50 টা. = " " সুদ
1050 টা.
1102·5 টা. = তৃতীয় বৎসরের আসল
×5÷100
55·125 টা. " " সুদ
1102·5 টা.
1157·625 টা. = 3 বৎসরের সমূল-চক্রবৃদ্ধি

∴ নির্ণেয় চক্রবৃদ্ধি = 1157·625 টা. − 1000 টা. = 157·625 টা.
= 157 টাকা 62·5 পয়সা।

[**দ্রষ্টব্য :** প্রথম আসল 1000 টাকাকে সুদের হার 5 দিয়া গুণ করিয়া হইল 5000 টা. ; উহার দুই অঙ্ক বামে দশমিক বিন্দু বসাইয়া (অর্থাৎ 100

দ্বারা ভাগ করিয়া) হইল 50·00 টা. অর্থাৎ 50 টা., ইহাই প্রথম বৎসরের সুদ। উহার সহিত প্রথম আসল 1000 টা. যোগ করিয়া দ্বিতীয় বৎসরের আসল 1050 টা. হইল। 1050 টাকাকে আবার 5 দিয়া গুণ ও গুণফলকে পূর্বের ন্যায় 100 দিয়া ভাগ করিয়া দ্বিতীয় বৎসরের সুদ হইল 52·50 টাকা বা 52·5 টাকা। উহার সহিত দ্বিতীয় বৎসরের আসল 1050 টাকা যোগ করিয়া হইল 1102·5 টাকা, উহাই তৃতীয় বৎসরের আসল। এইভাবে 3 বৎসরের মোট সমূল চক্রবৃদ্ধি হইল 1157·625 টাকা। উহা হইতে প্রথম আসল 1000 টাকা বাদ দিয়া 3 বৎসরের চক্রবৃদ্ধি 157 625 টাকা পাওয়া গেল।]

উদা. 2. সুদ বৎসরান্তে দেয় হইলে 350 টাকা 50 পয়সার $3\frac{1}{2}\%$ হারে 2 বৎসর 3 মাসের চক্রবৃদ্ধি কত হইবে?

350 টা. 50 প. = 350·5 টা.; $3\frac{1}{2} = 3 + 3 \div 6$; 2 ব. 3 মাস = $2\frac{1}{4}$ ব.।

টাকা

350·5 = প্রথম বৎসরের আসল

10·515 = 3% হারে সুদ $\left(\frac{350\cdot5 \times 3}{100}\right.$ করিয়া $\left.\right)$

1·7525 = $\frac{1}{2}\%$ „ „ (10·515 ÷ 6 করিয়া)

362·7675 = দ্বিতীয় বৎসরের আসল

10·8830 ··· = 3% হারে সুদ $\left(\frac{\text{2য় আসল} \times 3}{100}\right.$ করিয়া, দশমিক 4 অঙ্ক পর্যন্ত$\left.\right)$

1·8138 ··· = $\frac{1}{2}\%$ „ „ (10·8830 ÷ 6 করিয়া)

375·4643 = তৃতীয় বৎসরের আসল

2·8159 = 3% হারে $\frac{1}{4}$ বৎসরের সুদ (3% হারে 1 ব.-এর সুদ ÷ 4)

·4693 = $\frac{1}{2}\%$ হারে $\frac{1}{4}$ বৎসরের সুদ (2·8159 ÷ 6)

378·7495 = $2\frac{1}{4}$ বৎসরের সমূল চক্রবৃদ্ধি

350·5 = প্রথম আসল

টা. 28·2495 (বিয়োগ করিয়া) = নির্ণেয় চক্রবৃদ্ধি

∴ নির্ণেয় চক্রবৃদ্ধি = 28 টা. 25 প. (আসন্ন)।

উদা. 3. 6 মাস অন্তে সুদ দেয় হইলে 2% হার সুদে 500 টাকার $1\frac{1}{2}$ বৎসরে চক্রবৃদ্ধি কত হইবে?

এখানে $\frac{1}{2}$ বৎসর অন্তে সুদ দেয়। অতএব প্রদত্ত হারের $\frac{1}{2}$ অর্থাৎ 1% হারে এবং প্রদত্ত সময়ের 2 গুণ অর্থাৎ 3 বৎসরের চক্রবৃদ্ধি (বৎসর অন্তে সুদ দেয় ধরিয়া) নির্ণয় করিলেই হইবে।

টাকা
500 = প্রথম বৎসরের আসল
5 = ,, ,, সুদ (1% হারে)
505 = দ্বিতীয় বৎসরের আসল
5·05 = ,, ,, সুদ ($\frac{505\times1}{100}$ করিয়া)
510·05 = তৃতীয় বৎসরের আসল
5·1005 = ,, ,, সুদ
515·1505 = 3 বৎসরের সমূল চক্রবৃদ্ধি
(বিয়োগ) 500 = প্রথম আসল
15·1505 টাকা = চক্রবৃদ্ধি

∴ নির্ণেয় চক্রবৃদ্ধি = 15 টাকা 15 পয়সা (আসন্ন)।

[**দ্রষ্টব্য :** $1\frac{1}{2}$ বৎসরে তিনটি 6 মাস হয় এবং বার্ষিক 2% হারে 6 মাসের সুদ হয় 1 টাকা। সুতরাং বৎসর অন্তে দেয় 1% হারে 3 বৎসরে যে সুদ হইবে 6 মাস অন্তর দেয় 2% হারে $1\frac{1}{2}$ বৎসরেও সেই সুদ হইবে]

চক্রবৃদ্ধি নির্ণয়ের সাধারণ সূত্র

মনে কর, 1 টাকা 4% হারে 2 বৎসরের জন্য চক্রবৃদ্ধি সুদে খাটিতেছে। 1 টাকার 4% হারে 1 বৎসরের সুদ হয় $\frac{4}{100}$ টাকা। অতএব, 1 বৎসর পরে 1 টাকা হইতে সুদে-আসলে হইবে $(1+\frac{4}{100})$ টাকা। দ্বিতীয় বৎসরের অন্তে সুদে-আসলে কত হইবে দেখ। দ্বিতীয় বৎসরে আসল হইল $(1+\frac{4}{100})$ টা. [পূর্ব হিসাব অনুসারে 1 টাকা আসল হইতে দ্বিতীয় বৎসরে সুদে-আসলে হয় $(1+\frac{4}{100})$ টাকা]। ∴ $(1+\frac{4}{100})$ টাকা আসল হইতে দ্বিতীয় বৎসর অন্তে সুদ-আসল হইবে $(1+\frac{4}{100})\times(1+\frac{4}{100})$ টা. বা $(1+\frac{4}{100})^2$ টাকা।

∴ **সূত্র হইল :** সমূল চক্রবৃদ্ধি $=$ আসল $\times\left(1+\frac{\text{সুদের হার}}{100}\right)^{\text{বৎসর-সংখ্যা}}$

$$= \text{আ.}\left(1+\frac{\text{হা.}}{100}\right)^{\text{ব.}}$$

উদা. 4. বার্ষিক $7\frac{1}{2}\%$ হার সুদে 40000 টাকার 3 বৎসরের সমূল চক্রবৃদ্ধি কত হইবে ?

আসল = 40000 টা., হার = $7\frac{1}{2}\%$, = 7·5% এবং সময় = 3 বৎসর ।

সূত্রানুসারে, সমূল চক্রবৃদ্ধি = আসল $\left(1+\frac{\text{সুদের হার}}{100}\right)^{\text{বৎসর}}$

$$= 40000 \times \left(1+\frac{7\cdot5}{100}\right)^3 \text{ টাকা} = 40000 \times (1\cdot075)^3 \text{ টাকা}$$

$$= 49691\cdot875 \text{ টাকা} = 49691 \text{ টাকা } 87\cdot5 \text{ পয়সা ।}$$

চক্রবৃদ্ধি সংক্রান্ত বিবিধ সমাধান

উদা. 5. প্রমাণ কর যে, 3% হার সুদে 2 বৎসরে সমূল চক্রবৃদ্ধি আসলের 1·0609 গুণ হয় ।

সমূল চক্রবৃদ্ধি = আসল × $\left(1+\frac{\text{সুদের হার}}{100}\right)^{\text{বৎসর সংখ্যা}}$

$$= \text{আসল} \times (1+\tfrac{3}{100})^2 = \text{আসল} \times (1+\cdot03)^2$$

$$= \text{আসল} \times (1\cdot03)^2 = \text{আসল} \times 1\cdot0609.$$

[**দ্রষ্টব্য :** এখানে 1 টাকা আসল ধরিয়া করিতে পার ।]

উদা. 6. একটি দেশের জনসংখ্যা 3 লক্ষ ছিল এবং প্রতি বৎসরান্তে উহা 10% হারে বৃদ্ধি পাইতে লাগিল । 3 বৎসর পরে উহার জনসংখ্যা কত হইবে ?

এখানে বৃদ্ধির হার = 10%, বৎসর = 3, আসল = আদি লোকসংখ্যা = 300000.

∴ সূত্রানুসারে নির্ণেয় লোকসংখ্যা = আদিসংখ্যা × $(1+\frac{10}{100})^3$

$$= 300000 \times (1\cdot1)^3 = 399300.$$

উদা. 7. এক ব্যক্তি 3% হার সরল সুদে 16000 টাকা ধার করিয়া ঐ টাকা বৎসরান্তে দেয় 5% চক্রবৃদ্ধি হারে অন্যকে ধার দিল । 3 বৎসর পরে তাহার কত লাভ হইবে ?

100 টাকার 3% হারে 3 বৎসরের সরল সুদ = 9 টাকা,

∴ 16000 টাকার ,, ,, ,, ,, ,, ,, = 1440 টাকা ।

আবার সূত্রানুসারে 16000 টাকার সমূল চক্রবৃদ্ধি = $16000(1+\frac{5}{100})^3$ টা.

$$= 16000 \times (1\cdot05)^3 \text{ টা.} = 18522 \text{ টা.}$$

∴ 3 বৎসরের চক্রবৃদ্ধি = 18522 টা. − 16000 টা. = 2522 টাকা ।

∴ নির্ণেয় লাভ = 2522 টা. − 1440 টা. = 1082 টাকা ।

প্রশ্নমালা 20

চক্রবৃদ্ধি নির্ণয় কর :—

1. বার্ষিক 5% হার সুদে 3 বৎসরে 10000 টাকার
2. " 4% " " 2 " 625 টাকার
3. " 5% " " 3 " 500 পাউণ্ডের
4. " $4\frac{1}{2}$% " " 2 " 5000 টাকার
5. " 3% " " 3 " 526 টাকা 60 পয়সার
6. " 4% " " $2\frac{1}{2}$ " 450 টাকার

সমূল চক্রবৃদ্ধি নির্ণয় কর (সুদ বৎসরান্তে দেয়) :—

7. বার্ষিক 6% হার সুদে 3 বৎসরে 500000 টাকার
8. " 5% " " 2 " 740 টাকার
9. " $3\frac{1}{2}$% " " 3 " 1750 টাকার
10. " 4% " " $2\frac{1}{2}$ " 450·5 টাকার

11. বার্ষিক 5% হার সুদে 3 বৎসরে 2000 টাকার চক্রবৃদ্ধি ও সরল সুদের অন্তর কত হয় ?

12. **ক** বৎসরান্তে দেয় বার্ষিক 5% চক্রবৃদ্ধি হারে 5000 টাকা ধার দিল এবং **খ** তত টাকা $5\frac{1}{4}$% হারে সরল সুদে ধার দিল। 3 বৎসর অন্তে কে অধিক লাভবান হইবে এবং কত অধিক ? [G. U. '53]

13. অর্ধবৎসরান্তে দেয় বার্ষিক 4% হার সুদে 500 টাকার $1\frac{1}{2}$ বৎসরে চক্রবৃদ্ধি কত হইবে ?

14. 4 মাস অন্তে দেয় বার্ষিক 12% হার সুদে 400 টাকার 1 বৎসর 4 মাসে সমূল চক্রবৃদ্ধি কত হইবে ?

15. 3 মাস অন্তে দেয় বার্ষিক 8% হার সুদে 450 টাকার 9 মাসের চক্রবৃদ্ধি নির্ণয় কর।

16. বার্ষিক 5% হার সুদে 3 বৎসরে 400 টাকার সরল সুদ ও চক্রবৃদ্ধির অন্তর কত হইবে ? [P. U. '20]

17. প্রমাণ কর যে, বার্ষিক 4% হার সুদে 2 বৎসরে সমূল-চক্রবৃদ্ধি আসলের 1·0816 গুণ হয়।

18. কোন দেশের লোকসংখ্যা 24000 এবং উহা বৎসরে 5% হারে বৃদ্ধি পায়। 3 বৎসর অন্তে সেখানে লোকসংখ্যা কত হইবে ? [C. U. (High) '50]

19. কোন দেশের জনসংখ্যা প্রতি 10 বৎসরে 4% হারে বৃদ্ধি পায়। বর্তমানে উহার জনসংখ্যা এক লক্ষ হইলে, 20 বৎসর পরে ঐ সংখ্যা কত হইবে ?

20. যদি চক্রবৃদ্ধির হার প্রথম বৎসরে 3%, দ্বিতীয় বৎসরে 4% ও তৃতীয় বৎসরে 5% হয়, তবে 5000 টাকার 3 বৎসরে সমূল-চক্রবৃদ্ধি কত হইবে ?

21. এক ব্যক্তি 3% সরল সুদে 8000 টাকা ধার করিয়া সেই টাকা 5% চক্রবৃদ্ধি হারে ধার দিল। তিন বৎসর পরে তাহার কত লাভ হইবে ?

22. এক ব্যক্তি প্রতি বৎসরান্তে কোন ব্যাঙ্কে 100 টাকা গচ্ছিত রাখে। যদি বৎসরান্তে ঐ ব্যাঙ্কে 10% হারে সুদ জমা হয়, তবে সে ব্যক্তি 4 বৎসর পরে ব্যাঙ্ক হইতে কত টাকা পাইবে ?

23. এক ব্যক্তি 5000 টাকা 4% হার সুদে ধার করিয়া বৎসরান্তে সুদ পরিশোধ করে এবং ঐ টাকা 6 মাস অন্তে দেয় 6% চক্রবৃদ্ধি হারে ধার দিয়া বৎসরান্তে সুদ আদায় করে। ইহাতে বৎসরে তাহার কত লাভ হয় ?

লাভ ও ক্ষতি (Profit and Loss)

লাভ-ক্ষতি সম্বন্ধে পূর্বে আলোচনা করা হইয়াছে। এস্থলে লাভ-ক্ষতির শতকরা হিসাব সম্বন্ধে আলোচনা করা হইতেছে।

(ক) 10 টাকা মূল্যে কোন দ্রব্য ক্রয় করিয়া 12 টাকায় বিক্রয় করিলে, 10 টাকায় (12 − 10) টাকা বা 2 টাকা লাভ হয়।

(খ) 10 টাকা মূল্যে কোন দ্রব্য ক্রয় করিয়া 8 টাকা মূল্যে বিক্রয় করিলে 10 টাকায় (10 − 8) টাকা বা 2 টাকা ক্ষতি হয়।

অতএব, দেখা গেল যে, **লাভ বা ক্ষতি সর্বদা ক্রয়মূল্যের উপর হিসাব হয়**, কখনও যেন বিক্রয়মূল্যের উপর বা দ্রব্যের সংখ্যার উপর হিসাব করিও না।

আরও দেখ, (1) **লাভ** = বিক্রয়মূল্য − ক্রয়মূল্য [দৃষ্টান্ত (ক)]

(2) **ক্ষতি** = ক্রয়মূল্য − বিক্রয়মূল্য [দৃষ্টান্ত (খ)]

শতকরা লাভ : শতকরা 15 টাকা লাভ বলিলে বুঝিতে হইবে যে, ক্রয়মূল্য 100 টাকা হইলে সেখানে বিক্রয়মূল্য (100 + 15) টাকা বা 115 টাকা।

∴ ক্রয়মূল্য : বিক্রয়মূল্য = 100 : 115, অর্থাৎ বিক্রয়মূল্য = $\frac{115}{100}$ × ক্রয়মূল্য।

$$\textbf{শতকরা লাভ} = \frac{\text{মোট লাভ}}{\text{ক্রয়মূল্য}} \times 100.$$

শতকরা ক্ষতি : শতকরা 15 টাকা ক্ষতি বলিলে বুঝাইবে যে, ক্রয়মূল্য 100 টাকা হইলে বিক্রয়মূল্য সেখানে (100 − 15) টাকা বা 85 টাকা।

∴ ক্রয়মূল্য : বিক্রয়মূল্য = 100 : 85, অর্থাৎ বিক্রয়মূল্য ক্রয়মূল্যের $\frac{85}{100}$ অংশ।

$$\textbf{শতকরা ক্ষতি} = \frac{\text{মোট ক্ষতি}}{\text{ক্রয়মূল্য}} \times 100.$$

(1) **শতকরা লাভ বা ক্ষতি।**

উদাহরণ 1. 72 টাকা মূল্যে একটি ঘোড়া কিনিয়া 80 টাকায় বিক্রয় করিলে শতকরা কত লাভ হইবে ?

[**প্রথম প্রণালী**] লাভ $=80$ টা. -72 টা. $=8$ টাকা।

72 টাকায় লাভ হয় 8 টাকা,

$\therefore$ 1 ,, ,, ,, $\frac{8}{72}$ টা. $=\frac{1}{9}$ টাকা,

$\therefore$ 100 ,, ,, ,, $\frac{1}{9}$ টা. $\times 100=11\frac{1}{9}$ টাকা।

$\therefore$ নির্ণেয় লাভ $=11\frac{1}{9}\%$.

উদাহরণ 2. 140 টাকায় একখানি শাল কিনিয়া 133 টাকায় বিক্রয় করিলে শতকরা কত ক্ষতি হইবে ?

[**অন্য প্রণালী**] 140 টাকা $=$ ক্রয়মূল্যের 100%

$\therefore$ 1 টাকা $=$,, $\frac{100}{140}\%$

$\therefore$ 133 টাকা $=$,, $\frac{100}{140}\times 133\%=95\%$

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষতি $=(100-95)$ বা 5%.

উদাহরণ 3. 6 পয়সায় 7টি হিসাবে লেবু কিনিয়া 7 পয়সায় 6টি করিয়া বিক্রয় করিলে শতকরা কত লাভ হইবে ?

[**প্রথম প্রণালী**] 7টির ক্রয়মূল্য $=6$ পয়সা

$\therefore$ 1টির ,, $=\frac{6}{7}$,,

আবার 6টির বিক্রয়মূল্য $=7$ পয়সা

$\therefore$ 1 ,, ,, $=\frac{7}{6}$,,

$\therefore$ লাভ $=(\frac{7}{6}-\frac{6}{7})$ পয়সা $=\frac{13}{42}$ পয়সা।

এক্ষণে $\frac{6}{7}$ পয়সায় লাভ হয় $\frac{13}{42}$ পয়সা,

$\therefore$ 1 ,, ,, ,, $\frac{13}{42}\times\frac{7}{6}$ বা $\frac{13}{36}$ পয়সা,

$\therefore$ 100 ,, ,, ,, $\frac{13\times 100}{36}$ বা $36\frac{1}{9}$ পয়সা

$\therefore$ শতকরা $36\frac{1}{9}$ লাভ হইল।

[**অন্য প্রণালী**] 6টি ও 7টির ল. সা. গু. $=42$টি ;

মনে কর, 42টি লেবু ক্রয় করা হইল।

42টির ক্রয়মূল্য $=\frac{6}{7}$ পয়সা $\times 42=36$ পয়সা,

এবং 42টির বিক্রয়মূল্য $=\frac{7}{6}$ পয়সা $\times 42=49$ পয়সা।

$\therefore$ 36 পয়সায় লাভ হয় $(49-36)$ বা 13 পয়সা।

$\therefore$ 100 ,, ,, ,, $(\frac{13}{36}\times 100)$ বা $36\frac{1}{9}$ পয়সা।

$\therefore$ নির্ণেয় লাভ $=36\frac{1}{9}\%$.

(2) **লাভ বা ক্ষতির শতকরা হার হইতে বিক্রয় বা ক্রয়মূল্য নির্ণয় :—**

উদাহরণ 4. 20 টাকায় একটি ঘড়ি কিনিয়া 10% লাভে বিক্রয় করিলে বিক্রয়মূল্য কত হইবে ?

[**প্রথম প্রণালী**] এখানে 10% লাভ করিতে হইবে,

∴ 100 টাকা ক্রয়মূল্য হইলে বিক্রয়মূল্য হইবে (100+10) বা 110 টা.

∴ 1 ,, ,, ,, ,, ,, $\frac{110}{100}$ টাকা

∴ 20 ,, ,, ,, ,, ,, $\frac{110\times20}{100}$ টা. বা 22 টা.

∴ নির্ণেয় বিক্রয়মূল্য = 22 টাকা।

[**দ্বিতীয় প্রণালী**] এখানে 10% লাভ করিতে হইবে,

∴ নির্ণেয় বিক্রয়মূল্য = ক্রয়মূল্যের $\frac{110}{100}=\frac{110}{100}\times20$ টা. = 22 টাকা।

উদাহরণ 5. 176 টাকায় একখানি সাইকেল বিক্রয় করায় 12% ক্ষতি হইল। উহার ক্রয়মূল্য কত ছিল ?

[**তৃতীয় প্রণালী**] এখানে 12% ক্ষতি হইয়াছে, অর্থাৎ ক্রয়মূল্যের 88% পাওয়া গিয়াছে।

∴ ক্রয়মূল্যের (100 − 12) বা 88% = 176 টাকা,

∴ ,, 1% = $\frac{176}{88}$ টা. = 2 টাকা

∴ ,, 100% = 2 টা. × 100 = 200 টাকা

∴ নির্ণেয় ক্রয়মূল্য = 200 টাকা।

[**দ্রষ্টব্য :** কোন বস্তুর 100% বলিলে সমগ্র বস্তুকে বুঝায়।]

(3) **কোন এক প্রকার লাভ বা ক্ষতিজনক বিক্রয়মূল্য হইতে অন্য হারে লাভ বা ক্ষতিজনক বিক্রয়মূল্য নির্ণয় :—**

উদাহরণ 6. একটি দ্রব্য 22 টাকা 50 পয়সায় বিক্রয় করায় শতকরা 10 টাকা ক্ষতি হইল ; কত মূল্যে উহা বিক্রয় করিলে 10% লাভ হইত ?

ক্রয়মূল্যের (100 − 10) বা 90% = 22 টা. 50 পয়সা = $\frac{45}{2}$ টাকা ;

∴ ,, 1% = $\frac{45}{2\times90}$ টা. = $\frac{1}{4}$ টাকা ;

∴ ,, (100+10) বা 110% = $\frac{1}{4}$ টা. × 110 = $27\frac{1}{2}$ টা.

∴ নির্ণেয় বিক্রয়মূল্য = 27 টাকা 50 পয়সা।

(4) **কোন বিক্রয়মূল্যের লাভ বা ক্ষতির হার হইতে অন্য বিক্রয়-মূল্যের শতকরা লাভ বা ক্ষতির হার নির্ণয় :—**

উদাহরণ 7. 13 টাকা 12·5 পয়সায় একটি দ্রব্য বিক্রয় করায় 5% লাভ হইল ; উহা 12 টাকায় বিক্রয় করিলে শতকরা কত লাভ বা ক্ষতি হইত ?

13 টাকা 12·5 পয়সা = $13\frac{1}{8}$ টাকা = $\frac{105}{8}$ টাকা।

$\frac{105}{8}$ টাকা = ক্রয়মূল্যের (100+5) বা 105%

∴ 1 টাকা = „ $105 \times \frac{8}{105}\% = 8\%$

∴ 12 টাকা = „ $8 \times 12\% = 96\%$

অতএব, 12 টাকায় বিক্রয় করিলে ক্ষতি হয় (100 − 96) বা 4%.

(5) **দুইটি বিক্রয়মূল্যের অন্তরফল হইতে ক্রয়মূল্য নির্ণয় :—**

উদাহরণ 8. একটি গরু বিক্রয় করিয়া 10% ক্ষতি হইল ; আরও 9 টাকা অধিক মূল্যে বিক্রয় করিলে শতকরা $12\frac{1}{2}$ টাকা লাভ হইত। গরুটির ক্রয়মূল্য কত ? [ঢা. বো. 1931]

9 টাকা বেশী দামে বিক্রয় করিলে 10% ক্ষতিপূরণ হইয়া $12\frac{1}{2}\%$ লাভ হয়,

∴ ক্রয়মূল্যের $(10+12\frac{1}{2})$ বা $22\frac{1}{2}\% = 9$ টাকা

∴ „ 100% বা পূরা ক্রয়মূল্য $= \frac{9}{22\frac{1}{2}} \times 100$ টা. = 40 টাকা।

বিবিধ সমাধান

উদাহরণ 9. এক ব্যক্তি 400 আমের ক্রয়মূল্যে 320টি আম বিক্রয় করিল। ইহাতে তাহার শতকরা কত লাভ হইল ?

320টি আম বিক্রয় করিয়া 400টির অর্থাৎ (320+80)টির ক্রয়মূল্য পাওয়া যায়, সুতরাং লাভের হার প্রতি 320টি আমের ক্রয়মূল্যের উপর 80টির ক্রয়মূল্য,

∴ শতকরা লাভ $= \frac{80}{320} \times 100 = 25$.

উদাহরণ 10. **ক** একটি ঘড়ি **খ**-কে বিক্রয় করায় 10% ক্ষতি হইল, **খ** উহা **গ**-কে বিক্রয় করিয়া 10% লাভ করিল। **গ** যে মূল্যে উহা ক্রয় করিয়াছে **ক** সেই মূল্যে বিক্রয় করিলে তাহার শতকরা কত লাভ বা ক্ষতি হইত ?

মনে কর, **ক** 100 টাকায় ঘড়িটি কিনিয়াছিল। তাহা হইলে **খ** উহা (100 − 10) বা 90 টাকায় কিনিয়াছিল। **খ** উহা **গ**-কে বিক্রয় করিয়া 10% লাভ করিয়াছে ; সুতরাং **গ** উহা $\frac{110}{100} \times 90$ বা 99 টাকায় কিনিয়াছে।

অতএব, **ক** যদি 99 টাকায় বিক্রয় করিত তবে তাহার শতকরা (100 − 99) বা 1% ক্ষতি হইত।

উদাহরণ 11. কোন ধার্য মূল্যের $\frac{2}{3}$ মূল্যে একটি দ্রব্য বিক্রয় করিলে 20% ক্ষতি হয়, ঐ ধার্য মূল্যে বিক্রয় করিলে শতকরা কত লাভ হইবে ?

$\frac{2}{3}$ ধার্য মূল্যে বিক্রয় করিলে 20% ক্ষতি হয়, অর্থাৎ ক্রয়মূল্যের (100 – 20) বা 80% পাওয়া যায়।

∴ ধার্য মূল্যের $\frac{2}{3}$ = ক্রয়মূল্যের 80%

∴ সমস্ত ধার্য মূল্য = ক্রয়মূল্যের $\frac{80\times3}{2}$% = 120%

∴ পুরা ধার্য মূল্যে বিক্রয় করিলে (120 – 100) বা 20% লাভ হইবে।

উদাহরণ 12. কোন দ্রব্যের নির্মাণকারী 25% লাভে উহা পাইকারী ব্যবসায়ীকে, পাইকারী ব্যবসায়ী 10% লাভে খুচরা-বিক্রেতাকে এবং খুচরা-বিক্রেতা 15% লাভে উহা 253 টাকায় বিক্রয় করিল। দ্রব্যটির নির্মাণ-খরচ কত ?

[এইরূপ অঙ্ক শেষ দিক হইতে করিয়া আসিলে সুবিধা হয়।]

খুচরা-বিক্রেতা 15% লাভে 253 টাকায় বিক্রয় করিয়াছে,

∴ তাহার পক্ষে ক্রয়মূল্য = $\frac{100}{115}$ × 253 টা. = 220 টাকা, ইহাই পাইকারী ব্যবসায়ীর বিক্রয়মূল্য। সে কিন্তু ঐ মূল্যে বেচিয়া 10% লাভ করিয়াছে।

∴ পাইকারী ব্যবসায়ীর পক্ষে ক্রয়মূল্য = $\frac{100}{110}$ × 220 টা. = 200 টা., ইহাই দ্রব্য-নির্মাণকারীর বিক্রয়মূল্য। সে কিন্তু ঐ মূল্যে বিক্রয় করিয়া 25% লাভ করিয়াছে।

অতএব, দ্রব্যটির নির্মাণ-খরচ = $\frac{100}{125}$ × 200 টা. = 160 টাকা।

উদাহরণ 13. এক ব্যক্তি 410 টাকায় দুইটি ঘোড়া ক্রয় করিয়াছিল। একই মূল্যে ঘোড়া দুইটি বিক্রয় করিয়া দেখিল একটিতে তাহার 15% লাভ এবং অপরটিতে 10% ক্ষতি হইয়াছে। প্রত্যেক ঘোড়ার ক্রয়মূল্য কত ?

মনে কর, প্রথম ঘোড়ার ক্রয়মূল্য = 100 টাকা,

∴ উহার বিক্রয়মূল্য = 100 টা. + 15 টা. = 115 টা.

∴ দ্বিতীয়টিরও বিক্রয়মূল্য = 115 টাকা এবং ঐ দামে উহা বিক্রয় করায় 10% ক্ষতি হইয়াছে।

∴ দ্বিতীয়টির ক্রয়মূল্য = $\frac{100}{(100-10)}$ × 115 টাকা = $\frac{1150}{9}$ টাকা

∴ দুইটির মোট ক্রয়মূল্য = (100 + $\frac{1150}{9}$) টা. = $\frac{2050}{9}$ টাকা।

উভয়ের মোট ক্রয়মূল্য $\frac{2050}{9}$ টা. হইলে প্রথমটির ক্রয়-মূল্য হয় 100 টা.

∴ " " " 1 টাকা " " " $\frac{100\times9}{2050}$ টা.

∴ " " " 410 টাকা " " " $\frac{100\times9\times410}{2050}$ টা.

বা 180 টাকা।

∴ প্রথমটির ক্রয়মূল্য = 180 টাকা

এবং দ্বিতীয়টির ক্রয়মূল্য = 410 টা. – 180 টাকা = 230 টাকা।

প্রশ্নমালা 21

1. 10 টাকা 62 পয়সায় একটি কলম কিনিয়া 8 টাকা 49·6 পয়সায় বিক্রয় করিলে শতকরা কত লোকসান হইবে ?

2. 2000 টাকা মূল্যে একখানি বাড়ী ক্রয় করিয়া কত মূল্যে উহাকে বিক্রয় করিলে শতকরা 10 টাকা 50 পয়সা লাভ হইবে ?

3. 750 টাকা মূল্যের একটি ঘোড়া বিক্রয় করিয়া দেখা গেল যে 10% লোকসান হইয়াছে। উহা কত মূল্যে বিক্রয় করা হইয়াছে ?

4. 27 টাকা 50 পয়সায় একটি ঘড়ি বিক্রয় করিয়া দেখা গেল যে 10% লাভ হইয়াছে। ঘড়িটি কত দিয়া কেনা হইয়াছিল ?

5. 22 টাকা 75 পয়সায় একটি গরু বিক্রয় করিয়া যদি শতকরা 9 টাকা ক্ষতি হইয়া থাকে, তবে উহার ক্রয়মূল্য কত ছিল ?

6. 7500 টাকায় যে সম্পত্তি ক্রয় করা হইয়াছে, কত মূল্যে তাহা বিক্রয় করিলে 15% লাভ হইবে ?

7. 120টির ক্রয়মূল্যে যদি 110টি আম বিক্রয় করা হয়, তবে শতকরা কত লাভ হইবে ?

8. একটি ঘড়ি 60 টাকায় বিক্রয় করিলে যদি 15% ক্ষতি হয়, তবে উহা কত মূল্যে বিক্রয় করিলে 10% লাভ হইবে ? [ক. প্র. 1927]

9. 490 টাকায় একটি বাড়ী বিক্রয় করায় $12\frac{1}{2}$% ক্ষতি হইল। 596 টা. 40 পয়সায় উহা বিক্রয় করিলে শতকরা কত লাভ বা ক্ষতি হইত ?

10. 70 টাকায় একটি আংটি বিক্রয় করিয়া 20% লাভ হইল। উহা 60 টাকায় বিক্রয় করিলে শতকরা কত লাভ বা ক্ষতি হইত ?

11. কোন ব্যবসায়ী 20% দাম বাড়াইয়া তাহার মাল ছাড়িয়া দিল ; কিন্তু ক্রেতা পুরা মূল্য দিতে না পারিয়া টাকা প্রতি 50 পয়সা করিয়া দিল। ইহাতে ঐ ব্যবসায়ীর শতকরা কত লাভ বা ক্ষতি হইল ?

12. কোন ব্যবসায়ী 14 টাকা 50 পয়সা কুইন্টাল দরে 40 কুইন্টাল এবং 12 টা. 50 প. কুই. দরে 56 কুই. চিনি ক্রয় করিয়া মিশ্রিত করিল। ঐ মিশ্রিত চিনি কত কুইন্টাল দরে বিক্রয় করিলে শতকরা 12 টাকা 50 প. লাভ হইবে ?

13. একটি ঘড়ি 80 টাকায় বিক্রয় করিলে যদি 10% ক্ষতি হয়, তবে কত মূল্যে উহা বিক্রয় করিলে 8% লাভ হইবে ?

14. কোন ব্যবসায়ী 240 টাকায় একটি জিনিস বিক্রয় করিয়া 25% লাভ করিল। উহা 216 টাকায় বিক্রয় করিলে শতকরা কত লাভ হইত ? [ক. প্র. 1917]

15. একখানি বাড়ী 4500 টাকায় বিক্রয় করায় $12\frac{1}{2}$% লাভ হইল। উহা 3800 টাকায় বিক্রয় করিলে শতকরা কত ক্ষতি হইত ? [ঢা. প্র. '33]

16. 5 পয়সায় 6টি করিয়া লেবু কিনিয়া 6 পয়সায় কয়টি করিয়া বিক্রয় করিলে 44% লাভ হইবে ?

17. কোন প্রবঞ্চক ব্যবসায়ী জাল বাটখারা দ্বারা মাল কিনিয়া বিক্রেতাকে এবং উহা বিক্রয় করিবার সময় ক্রেতাকে 12% করিয়া ঠকাইল। উহাতে তাহার শতকরা কত লাভ হইল ?

18. একটি ঘড়ি 12% লোকসান করিয়া বিক্রয় করিলে যে মূল্য পাওয়া যায়, 12% লাভ করিয়া বিক্রয় করিলে তাহা অপেক্ষা 6 টাকা বেশী পাওয়া যায়। উহার প্রকৃত মূল্য কত ?

19. টাকায় 11টি হিসাবে আম কিনিয়া টাকায় কয়টি করিয়া বিক্রয় করিলে 10% লাভ হইবে ?

20. যদি কোন দ্রব্য নির্দিষ্ট মূল্যের $\frac{3}{5}$ মূল্যে বিক্রয় করায় 28% ক্ষতি হয়, তবে সেই নির্দিষ্ট মূল্যে বিক্রয় করিলে শতকরা কত লাভ হইবে ?

21. টাকায় 40টি দরে আম কিনিয়া 14 টাকায় কয়টি বিক্রয় করিলে 40% লাভ হইবে ?

22. টাকায় 12টি করিয়া আম বিক্রয় করায় 4% ক্ষতি হইল। কি দরে বিক্রয় করিলে 44% লাভ হইত ? [পা. প্র. 1934]

23. এক ব্যক্তি 50 টাকায় একটি ঘোড়া বিক্রয় করায় বিক্রয়মূল্যের 5% লোকসান হইল। ঘোড়াটির ক্রয়মূল্য কত ছিল ? [ঢা. প্র. 1935]

24. একখানি পুস্তক বিক্রয় করিয়া 13% ক্ষতি হইল। উহা 9 টাকা 75 পয়সা অধিক মূল্যে বিক্রয় করিলে 26% লাভ হইত। উহার ক্রয়মূল্য কত ? [পা. প্র. 1933]

25. কোন ব্যবসায়ী 25% বাড়াইয়া তাহার মালের মূল্য ধার্য করিয়া রাখিল এবং মাল বিক্রয়ের সময় ক্রেতাকে 10% ছাড়িয়া দিল। ইহাতে তাহার শতকরা কত লাভ হইল ?

26. কোন দ্রব্য বিক্রয় করিয়া নির্মাণকারী 20%, পাইকারী বিক্রেতা 20% এবং খুচরা মাল-বিক্রেতা 28% লাভ করিল। দ্রব্যটির খুচরা মূল্য যদি 10 টাকা হয়, তবে উহা নির্মাণ করিতে কত খরচ হইয়াছিল ? [ঢা. প্র. '31]

27. প্রতি কিলোগ্রাম 4 টাকা ও 3 টা. 50 পয়সা দরে দুই প্রকার চা সমপরিমাণে মিশাইয়া মিশ্রিত চা প্রতি কিলোগ্রাম কত করিয়া বিক্রয় করিলে 20% লাভ হইবে ?

28. ক 20% লোকসান করিয়া খ-কে একটি দ্রব্য বিক্রয় করিল এবং খ উহা গ-কে 20% লাভে বিক্রয় করিল। গ যে মূল্য দিয়াছে সেই মূল্যে যদি ক বিক্রয় করিত তবে তাহার শতকরা কত লাভ বা ক্ষতি হইত ? [ক. প্র. '42]

29. 2576 টাকায় একটি বাড়ী বিক্রয় করিয়া এক ব্যক্তি 12% লাভ করিল। বাড়ীখানি যদি 100 টাকা কমে কেনা থাকিত, তবে তাহার শতকরা কত লাভ হইত ?

30. এক ব্যক্তি প্রত্যেকটি 1248 টাকা করিয়া দুইটি ঘোড়া বিক্রয় করিল। একটিতে 4% লাভ এবং অন্যটিতে 4% ক্ষতি হইল। ইহাতে তাহার মোট কত লাভ বা ক্ষতি হইল ?

31. এক দ্রব্যনির্মাণকারী কোন ব্যবসায়ীকে এবং ঐ ব্যবসায়ী তাহার ক্রেতাকে 10% লাভে মাল বিক্রয় করিল। 605 ডলার মূল্যে ক্রেতা যে মাল কিনিল তাহাকে উহার নির্মাণ-খরচ অপেক্ষা কত বেশী দিতে হইল ?

32. ব্যবসায়ী তাহার মালের ক্রয়মূল্যের উপর শতকরা কত বাড়াইয়া মূল্য ধার্য করিলে ক্রেতাকে 10% কমিশন দিয়া 20% লাভ করিতে পারিবে ?
[ঢা. বো. 1940]

33. ক 4860 টাকায় খ-কে একটি বাড়ী বিক্রয় করায় 19% ক্ষতি হইল। খ উহা গ-কে যে মূল্যে বিক্রয় করিল সেই মূল্যে বেচিলে ক-এর 17% লাভ হইত। খ-এর কত লাভ হইয়াছিল ? [ক. প্র. 1929]

***34.** এক ব্যক্তি 206 টাকায় দুইটি গরু কিনিল। একই মূল্যে গরু দুইটি বিক্রয় করিয়া একটিতে তাহার 10% লাভ এবং অন্যটিতে 4% ক্ষতি হইল প্রত্যেক গরুর ক্রয়মূল্য নির্ণয় কর।

35. এক ব্যক্তি তাহার মূলধন পর পর চারিটি ব্যবসায়ে খাটাইল। প্রথমটিতে তাহার মূলধন দ্বিগুণ হইল, কিন্তু অপরগুলির প্রত্যেকটিতে তাহার 20% করিয়া ক্ষতি হইল। শেষ পর্যন্ত তাহার শতকরা কত লাভ বা ক্ষতি হইল ?

***36.** 500 টাকায় একটি ঘোড়া ও গাড়ী কিনিয়া ঘোড়াটি 20% লাভে এবং গাড়ীটি 10% ক্ষতিতে বিক্রয় করায় মোট 2% লাভ হইল। ঘোড়াটির ক্রয়মূল্য কত ছিল ? [ঢা. বো. এবং বৃত্তি 1936]

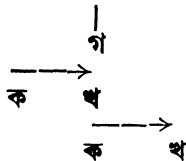
সময় ও দূরত্ব

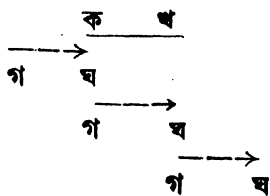
পূর্বে সময় ও দূরত্ব এবং আপেক্ষিক বেগ সম্বন্ধে কিছু আলোচনা করা হইয়াছে। এস্থলে তাহা বিশদভাবে আলোচিত হইতেছে।

বস্তুকে অতিক্রম

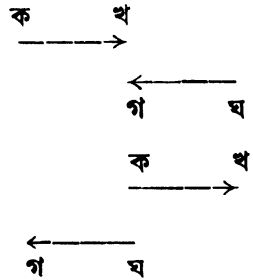
একটি গতিশীল রেলগাড়ী অন্য একটি স্থির বস্তুকে বা গতিশীল অন্য গাড়ীকে নানাভাবে অতিক্রম করিবার প্রশ্ন হইতে পারে। যথা—

(1) স্থির ও দৈর্ঘ্যহীন বস্তুকে অতিক্রম :—

মনে কর, চিত্রে গ একটি টেলিগ্রাফের খুঁটি এবং কখ একটি ট্রেণ। ট্রেণটির অগ্রভাগ খ বিন্দু গ বিন্দুতে মিলিত হওয়ায় বলা যায় যে, ট্রেণটি ঐ খুঁটিতে পৌঁছিয়াছে, কিন্তু উহাকে এখনও অতিক্রম করে নাই। উহা যখন আরও অগ্রসর হইবে তখন খুঁটিকে অতিক্রম করিতে আরম্ভ করিবে এবং যখন ট্রেণটির ক বিন্দু (অর্থাৎ পশ্চাদ্ভাগ) গ বিন্দুতে আসিবে তখন বলা যাইবে যে, ট্রেণটি খুঁটিকে সম্পূর্ণ অতিক্রম করিয়াছে। অতএব বুঝা গেল যে কোন স্তম্ভ বা খুঁটিকে বা গতিহীন ব্যক্তিকে অতিক্রম করিতে হইলে কোন ট্রেণকে নিজের দৈর্ঘ্যের সমান দূরত্ব অতিক্রম করিতে হয়। অতএব, ঐ দৈর্ঘ্যের সমান দূরত্ব যাইতে ট্রেণের যে সময় লাগে, অতিক্রম করিতে সেই সময় লাগিবে।

(2) গতিহীন ও দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট বস্তুকে অতিক্রম :—

মনে কর, কখ একটি সেতু (বা প্ল্যাটফর্ম), উহার দৈর্ঘ্য কখ এবং উহা গতিহীন। গঘ একটি ট্রেণ, উহার অগ্রভাগ ঘ-বিন্দু ক-বিন্দুর স্থানে আসিয়াছে, সুতরাং ট্রেণখানি এখন সেতুকে অতিক্রম করিতে আরম্ভ করিল। উহার ঘ বিন্দু যখন সেতুর খ বিন্দুতে আসিল তখন ট্রেণখানি অবশ্যই কখ দূরত্ব অর্থাৎ সেতুর দৈর্ঘ্যের সমান দূরত্ব গিয়াছে, কিন্তু এখনও সেতুকে অতিক্রম করা হয় নাই। আরও অগ্রসর হইলে ট্রেণের গ বিন্দু যখন সেতুর খ বিন্দুতে আসিল, অর্থাৎ কখ দূরত্ব যাওয়ার পর যখন আরও ট্রেণের দৈর্ঘ্যের সমান দূরত্ব গেল, তখন ট্রেণটি সেতুকে সম্পূর্ণভাবে অতিক্রম করিল। অতএব, কোন সেতু (বা প্ল্যাটফর্ম) অতিক্রম করিতে হইলে ট্রেণটিকে সেতু ও ট্রেণের দৈর্ঘ্যদ্বয়ের সমষ্টির সমান দূরত্ব অতিক্রম করিতে হয়।

(3) গতিশীল ও দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট বস্তুকে অতিক্রম :—

ইহা দুইভাবে হইতে পারে, উভয়েই একই দিকে বা পরস্পর বিপরীত দিকে গতিশীল হইতে পারে।

(ক) মনে কর, **কখ** ট্রেণটি **খ**-এর দিকে এবং **গঘ** ট্রেণটি **গ**-এর দিকে অর্থাৎ পরস্পর বিপরীত দিকে চলিতেছে। যখন **খ** ও **গ** বিন্দু সমসূত্রে বা একই স্থানে আসিল, তখন পরস্পরকে অতিক্রম করিতে আরম্ভ করিল। আবার যখন **ঘ** বিন্দু ও **ক** বিন্দু একই স্থানে আসিল, তখন উহারা পরস্পরকে সম্পূর্ণরূপে অতিক্রম করিল। **ক** ও **ঘ** বিন্দু একই স্থানে আসিবে যদি উভয় ট্রেণ মিলিয়া **কখ**+**গঘ** দূরত্ব যায়। চিত্রে যে কোন ট্রেণ ধরিয়া বুঝা যাউক। প্রথমে **কখ** ট্রেণ **গঘ** দূরত্ব গেলে **খ** ও **ঘ** একই স্থানে হইল, উহা আরও **কখ** দূরত্ব গেলে তবে **ক** ও **ঘ** একই স্থানে হইবে। অতএব, এরূপস্থলে উভয়ে মিলিয়া (আপেক্ষিক বেগে) যখন উভয় ট্রেণের দৈর্ঘ্যের সমষ্টির সমান দূরত্ব যায়, তখনই পরস্পরকে অতিক্রম করে।

∴ পরস্পরকে অতিক্রমের সময় $=\dfrac{\text{ট্রেণ দুইটির দৈর্ঘ্য-সমষ্টি}}{\text{উভয়ের গতিবেগের সমষ্টি}}$।

(খ) মনে কর, **গঘ** ট্রেণ **কখ** ট্রেণ অপেক্ষা দ্রুতগামী এবং উভয়ে একই দিকে চলিতেছে। চিত্রে **ক**-এর সহিত এখন **ঘ** একই স্থানে আসিয়াছে। **কখ**-কে অতিক্রম করিতে উভয়ের আপেক্ষিক বেগে (অর্থাৎ উভয় বেগের অন্তরফল) **কখ**+**গঘ** দৈর্ঘ্যের সমান দূরত্ব যাইতে যে সময় লাগে ততক্ষণ সময় লাগিবে।

ক খ
গ ঘ

∴ পরস্পরকে অতিক্রমের সময় $=\dfrac{\text{ট্রেণ দুইটির দৈর্ঘ্য-সমষ্টি}}{\text{উভয়ের গতিবেগের অন্তর}}$।

[**দ্রষ্টব্য :** যদি উভয় ক্ষেত্রে পূর্ব হইতে ট্রেণ দুইটি একই স্থানে এইরূপ-ভাবে দণ্ডায়মান থাকে যে (1) তাহাদের পশ্চাদ্ভাগ একই স্থানে আছে, তবে যে ট্রেণকে অতিক্রম করিতে হইবে তাহার দৈর্ঘ্যের সমান দূরত্ব আপেক্ষিক বেগে যাইতে হইবে। (2) আর যদি ট্রেণ দুইটির অগ্রভাগ মিলিত থাকে, তবে কোন ট্রেণকে অতিক্রম করিতে যে ট্রেণ অতিক্রম করিতেছে তাহার নিজের দৈর্ঘ্যের সমান দূরত্ব আপেক্ষিক বেগে যাইতে যে-সময় লাগে তত সময় লাগিবে। চিত্র আঁকিলেই এগুলি সহজে বুঝা যাইবে।]

(4) গতিশীল অথচ দৈর্ঘ্যবিহীন বস্তুকে অতিক্রম :—

গতিশীল ব্যক্তির গতি আছে, কিন্তু দৈর্ঘ্য নাই। ঐরূপ ব্যক্তিকে যদি কোন ট্রেণ অতিক্রম করে, তবে সেই ট্রেণের দৈর্ঘ্যের সমান দূরত্ব আপেক্ষিক বেগে যাইতে যে সময় লাগে তত সময় লাগিবে।

(ক) প্রথম ট্রেণের আরোহীকে বিপরীতগামী দ্বিতীয় ট্রেণের

$$\text{অতিক্রম করার সময়} = \frac{\text{দ্বিতীয় ট্রেণের দৈর্ঘ্য}}{\text{উভয় ট্রেণের গতিবেগের সমষ্টি}}।$$

(খ) ট্রেণ দুইটি একই দিকে চলিলে ঐ সময় $= \dfrac{\text{দ্বিতীয় ট্রেণের দৈর্ঘ্য}}{\text{উভয় ট্রেণের গতিবেগের অন্তর}}$।

উদাহরণ 1. রাম রওনা হওয়ার 4 ঘণ্টা পরে হরি রওনা হইল এবং ঘণ্টায় 5 কিলোমিটার বেগে চলিয়া 6 ঘণ্টা পরে রামকে ধরিল। রামের গতিবেগ নির্ণয় কর।

হরি যে-স্থানে রামকে ধরিয়াছে, সেখানে যাইতে হরির 6 ঘণ্টা এবং রামের (4+6) বা 10 ঘণ্টা সময় লাগিয়াছিল।

হরি 6 ঘণ্টায় যায় 5 কিলোমিটার × 6 বা 30 কিলোমিটার,

∴ রাম 10 ঘণ্টায় যায় 30 কিলো মিটার,

∴ রাম ঘণ্টায় (30 কি. মি. ÷ 10) বা 3 কিলোমিটার বেগে যায়।

উদাহরণ 2. একখানি গাড়ী বর্ধমান হইতে প্রাতে 8টায় রওনা হইয়া প্রাতে 12টায় হাওড়ায় পৌছিল এবং আর একখানি গাড়ী হাওড়া হইতে প্রাতে 9টায় রওনা হইয়া প্রাতে 11টা 30 মিনিটে বর্ধমানে পৌছিল। কখন তাহাদের সাক্ষাৎ হইয়াছিল ?

প্রথম গাড়ীখানি সমস্ত পথ যায় 4 ঘণ্টায়,

∴ উহা 1 ঘণ্টায় যায় সমস্ত পথের $\frac{1}{4}$ অংশ,

এবং দ্বিতীয় গাড়ীখানি সমস্ত পথ যায় $2\frac{1}{2}$ ঘণ্টায়,

∴ উহা 1 ঘণ্টায় যায় সমস্ত পথের $\frac{2}{5}$ অংশ।

প্রথম গাড়ীখানি 1 ঘণ্টা আগে রওনা হওয়ায় ঐ 1 ঘণ্টায় সমস্ত পথের $\frac{1}{4}$ অংশ গিয়াছে। সুতরাং 9টার সময় যখন দ্বিতীয় গাড়ীটি চলিতে লাগিল, তখন উভয় গাড়ীর মধ্যে ব্যবধান সমস্ত পথের $(1-\frac{1}{4})$ বা $\frac{3}{4}$ অংশ।

এখন, 1 ঘণ্টায় গাড়ী দুইটির মধ্যে ব্যবধান কমে পথের $(\frac{1}{4}+\frac{2}{5})$ বা $\frac{13}{20}$ অংশ।

∴ $\frac{3}{4}$ অংশ ব্যবধান কমিতে সময় লাগে $(\frac{3}{4} \div \frac{13}{20})$ ঘণ্টা বা $\frac{15}{13}$ ঘণ্টা বা 1 ঘণ্টা $9\frac{3}{13}$ মিনিট।

সুতরাং 9টার 1 ঘণ্টা $9\frac{3}{13}$ মিনিট পরে অর্থাৎ 10টা বাজিয়া $9\frac{3}{13}$ মিনিটে উভয় গাড়ীর সাক্ষাৎ হইয়াছিল।

উদাহরণ 3. 88 মিটার দীর্ঘ একখানি ট্রেণ ঘণ্টায় 35 কি. মি. 200 মি. বেগে চলিয়া কতক্ষণে একটি বার্তাবহ তারের খুঁটিকে অতিক্রম করিবে ?

একটি খুঁটি অতিক্রম করিতে ট্রেণকে নিজের দৈর্ঘ্যের সমান দূরত্ব অতিক্রম করিতে হয়। সুতরাং এখানে 88 মিটার যাইতে ট্রেণের কত সময় লাগে তাহা দেখিতে হইবে। 35 কি. মি. 200 মি.=35200 মিটার।

ট্রেণটি 35200 মি. যায় 1 ঘণ্টায় বা 60×60 সেকেণ্ডে,

∴ „ 1 মি. „ $\frac{60\times60}{35200}$ সেকেণ্ড

∴ „ 88 মি. „ $\frac{60\times60\times88}{35200}$ সে. বা 9 সেকেণ্ডে।

∴ নির্ণেয় সময়=9 সেকেণ্ড।

উদাহরণ 4. ঘণ্টায় 30 কিলোমিটার বেগে ধাবমান 110 মিটার দীর্ঘ একটি ট্রেণ 90 মিটার দীর্ঘ একটি সেতু অতিক্রম করিতে কত সময় লইবে ?

সেতু অতিক্রম করিবার জন্য ট্রেণকে সেতু ও ট্রেণের সমান দৈর্ঘ্য অর্থাৎ 110 মি.+90 মি. বা 200 মিটার অতিক্রম করিতে হইবে।

30×1000 মিটার অতিক্রম করিতে সময় লাগে 60×60 সেকেণ্ড,

200 „ „ „ „ „ $\frac{60\times60\times200}{30\times1000}$ সে.

বা 24 সেকেণ্ড।

∴ নির্ণেয় সময়=24 সেকেণ্ড।

উদাহরণ 5. 56 মিটার ও 44 মিটার দীর্ঘ দুইটি ট্রেণ যথাক্রমে ঘণ্টায় 18 ও 12 কিলো মিটার বেগে চলিতেছে। (1) যদি উহারা একই দিকে যায়, (2) যদি বিপরীত দিক হইতে পরস্পরের দিকে অগ্রসর হয়, তবে তাহারা কতক্ষণে পরস্পরকে অতিক্রম করিবে ?

(1) ট্রেণ দুইটির মোট দৈর্ঘ্য=56 মি.+44 মি.=100 মিটার। একই দিকে গেলে প্রতি ঘণ্টায় আপেক্ষিক বেগ হয় (18−12) বা 6 কিলো মিটার।

6×1000 মি. অতিক্রম করিতে সময় লাগে 60×60 সেকেণ্ড,

∴ 1 মি. „ „ „ „ $\frac{60\times60}{6\times1000}$ সেকেণ্ড

∴ 100 মি. „ „ „ „ $\frac{60\times60\times100}{1000\times6}$

বা 60 সেকেণ্ড।

∴ নির্ণেয় সময়=60 সেকেণ্ড বা 1 মিনিট।

(2) ট্রেণ দুইটি বিপরীত দিক হইতে অগ্রসর হইলে, উভয়ের আপেক্ষিক বেগ হয় ঘণ্টায় (18+12) কি. মিটার বা 30 কি. মিটার।

30×1000 মিটার অতিক্রম করিতে সময় লাগে 60×60 সেকেণ্ড

∴ 100 „ „ „ „ „ $\frac{60\times60\times100}{30\times1000}$ সেকেণ্ড

বা 12 সেকেণ্ড

∴ নির্ণেয় সময়=12 সেকেণ্ড।

উদাহরণ 6. এক ব্যক্তি কোন স্টেশনের প্ল্যাটফর্মে দাঁড়াইয়া দেখিল যে, ঘণ্টায় 36 কিলো মিটার বেগে ধাবমান একটি ট্রেণ 98 মিটার দীর্ঘ ঐ প্ল্যাটফর্মকে 20 সেকেণ্ডে অতিক্রম করিল। ট্রেণটির দৈর্ঘ্য কত ?

ট্রেণটি প্ল্যাটফর্মকে 20 সেকেণ্ডে অতিক্রম করে। ∴ 20 সেকেণ্ডে উহা যে দূরত্ব যায় তাহাই ট্রেণ ও প্ল্যাটফর্মের দৈর্ঘ্যের সমষ্টি।

60×60 সেকেণ্ডে ট্রেণটি 36×1000 মিটার যায়.

∴ 1 " " $\frac{36 \times 1000}{60 \times 60}$ " "

∴ 20 " " $\frac{36 \times 1000 \times 20}{60 \times 60}$ মি. বা 200 মি. যায়।

∴ নির্ণেয় ট্রেণের দৈর্ঘ্য $= 200$ মি. $- 98$ মি. $= 102$ মিটার।

উদাহরণ 7. এক ব্যক্তি রেল লাইনের পাশ দিয়া ঘণ্টায় 4 কি. মিটার বেগে চলিতেছিল। 50 মিটার দীর্ঘ একখানি ট্রেণ পিছন দিক হইতে আসিয়া লোকটিকে 10 সেকেণ্ডে অতিক্রম করিল এবং অন্য একটি লোককে ঐ ভাবে 9 সেকেণ্ডে অতিক্রম করিল। দ্বিতীয় লোকটির গতিবেগ নির্ণয় কর।

প্রথম ব্যক্তি 10 সেকেণ্ডে যায় $\frac{4 \times 10}{60 \times 60}$ কি. মি. বা $\frac{1}{90}$ কি. মিটার।

ট্রেণের দৈর্ঘ্য $= 50$ মিটার $= \frac{1}{20}$ কি. মিটার।

এক্ষণে প্রথম পক্ষে, ট্রেণটি 10 সেকেণ্ডে যায় (ট্রেণের দৈর্ঘ্য + প্রথম ব্যক্তি 10 সেকেণ্ডে যে দূরত্ব যায়) $= \frac{1}{20}$ কি. মি. $+ \frac{1}{90}$ কি. মি. $= \frac{11}{180}$ কি. মিটার ;

∴ ট্রেণটি 9 সেকেণ্ডে যায় $\frac{11 \times 9}{180 \times 10}$ বা $\frac{11}{200}$ কি. মিটার।

দ্বিতীয় পক্ষে, ট্রেণটি 9 সেকেণ্ডে যায় (ট্রেণের দৈর্ঘ্য + দ্বিতীয় ব্যক্তি 9 সেকেণ্ডে যে দূরত্ব যায়);

∴ দ্বিতীয় ব্যক্তি 9 সেকেণ্ডে যায় (ট্রেণটি 9 সেকেণ্ডে যে দূরত্ব যায় − ট্রেণের দৈর্ঘ্য) $= \frac{11}{200}$ কি. মি. $- \frac{1}{20}$ কি. মি. $= \frac{1}{200}$ কি. মি.।

∴ দ্বিতীয় ব্যক্তি 1 ঘণ্টায় যায় $\frac{1 \times 60 \times 60}{200 \times 9}$ বা 2 কি. মিটার।

অতএব, দ্বিতীয় ব্যক্তির গতিবেগ = ঘণ্টায় 2 কিলো মিটার।

উদাহরণ 8. ঘণ্টায় 10 কিলো মিটার বেগে আসিতেছে এরূপ এক ব্যক্তির সহিত সাক্ষাৎ করিবার জন্য ঘণ্টায় 15 কি. মি. বেগে চলে এরূপ এক একটি দূতকে প্রতি 10 মিনিট অন্তর কোন স্থান হইতে পাঠান হইতেছে। কতক্ষণ অন্তর পর পর দূতগুলির সহিত ঐ ব্যক্তির সাক্ষাৎ হইবে ?

দূতগুলিকে 10 মিনিট পর পর পাঠান হইতেছে। দূত 60 মিনিটে 15 কি. মি. যায়, ∴ 10 মিনিটে যায় $\frac{15}{60} \times 10$ কি. মি. বা $\frac{5}{2}$ কি. মিটার।

অতএব, প্রত্যেক দূত তাহার পূর্বগামী দূতের $\frac{5}{2}$ কি. মি. পিছনে আছে।

∴ প্রথম দূতের সহিত ঐ লোকটির যখন দেখা হয়, তখন দ্বিতীয় দূত এবং ঐ লোকটির মধ্যে ব্যবধান $\frac{5}{2}$ কি. মিটার।

ঐ দূত ও লোকটি পরস্পর সম্মুখীন হইতেছে, সুতরাং 1 ঘণ্টায় উভয়ে মিলিয়া (15+10) বা 25 কি. মিটার ব্যবধান কমাইতে পারে।

∴ $\frac{5}{2}$ কি. মি. ব্যবধান কমাইতে সময় লাগে ($\frac{5}{2}$ ÷25) ঘণ্টা বা 6 মিনিট।

∴ 6 মিনিট অন্তর পর পর দূতগুলির সহিত লোকটির সাক্ষাৎ হইবে।

নৌকা ও স্রোতের বেগ।

স্থির জলে অর্থাৎ কোন স্রোত না থাকিলে এক ঘণ্টায় নৌকা বাহিয়া যতদূর যাওয়া যায় তাহাকে **নৌকার গতিবেগ** বলে।

আর, এক ঘণ্টায় নদীর স্রোতের যে বেগ অর্থাৎ স্রোতের উপর নৌকাকে ভাসাইয়া দিলে ঐ স্রোতের টানে নৌকাটি এক ঘণ্টায় যে দূরত্ব যায় তাহাই **স্রোতের বেগ**।

স্রোতের অনুকূলে গতি : যদি কোন নৌকা স্রোতের অনুকূলে (with the stream বা down the river) অর্থাৎ স্রোতের দিকে বাহিয়া যায়, তবে, 1 ঘণ্টায় নৌকার গতিবেগ ও স্রোতের গতিবেগের **সমষ্টির সমান দূরত্ব** যাইবে।

স্রোতের প্রতিকূলে গতি : যদি কোন নৌকা স্রোতের প্রতিকূলে (against the current বা up the river) বা বিপরীত দিকে বাহিয়া যায়, তবে 1 ঘণ্টায় নৌকার গতিবেগ ও স্রোতের গতিবেগের **অন্তরের** (বিয়োগফলের) **সমান দূরত্ব** যাইবে।

উদাহরণ 1. একটি নৌকা স্রোতের অনুকূলে 10 মিনিটে 1 হেক্টো মিটার এবং বিপরীত দিকে অর্ধ ঘণ্টায় 1 হে. মি. যায়। নৌকার ও স্রোতের গতিবেগ নির্ণয় কর।

স্রোতের অনুকূলে 1 ঘণ্টায় যায় নৌকার বেগ+স্রোতের বেগ এবং স্রোতের প্রতিকূলে 1 ঘণ্টায় যায় নৌকার বেগ − স্রোতের বেগ।

এখানে স্রোতের অনুকূলে 10 মিনিটে 1 হে. মি. যায়,

∴ 1 ঘণ্টায় বা 60 মিনিটে যায় 6 হে. মিটার।

আবার, বিপরীত দিকে 30 মিনিটে যায় 1 হে. মি.,

∴ 1 ঘণ্টায় যায় 2 হে. মিটার।

অতএব, নৌকার গতিবেগ+স্রোতের গতিবেগ=6 হে. মি.…(1)

এবং নৌকার গতিবেগ − স্রোতের গতিবেগ=2 হে. মি.…(2)

∴ (যোগ করিয়া) 2×নৌকার গতিবেগ=8 হেক্টো মিটার।

∴ নির্ণেয় নৌকার গতিবেগ=ঘণ্টায় 4 হেক্টো মিটার।

এক্ষণে, (1) হইতে পাই, ঘণ্টায় স্রোতের গতি=6 হে. মি. − 4 হে. মি.
=2 হেক্টো মিটার।

উদাহরণ 2. স্থির জলে নৌকা 1 ঘণ্টায় 6 কিলো মিটার যায়, কিন্তু স্রোতের প্রতিকূলে ঐ দূরত্ব যাইতে উহার 3 গুণ সময় লাগে। স্রোতের গতিবেগ নির্ণয় কর।

স্থির জলে 1 ঘণ্টায় যায় 6 কি. মি., সুতরাং নৌকার গতিবেগ ঘণ্টায় 6 কি. মিটার। স্রোতের বিরুদ্ধে 6 কি. মি. যায় 3 ঘণ্টায়, সুতরাং 1 ঘণ্টায় যায় 2 কি. মি. (ইহাই উভয় বেগের অন্তর)।

∴ ঘণ্টায় নৌকার গতিবেগ $-$ স্রোতের গতিবেগ $=2$ কি. মিটার।
কিন্তু ঘণ্টায় নৌকার গতিবেগ 6 কি. মিটার।

∴ নির্ণেয় স্রোতের গতিবেগ = ঘণ্টায় (6 কি. মি. $-$ 2 কি. মি.)
বা 4 কিলো মিটার।

বৃত্তাকার পথে ভ্রমণ।

বৃত্তাকারে ভ্রমণ সম্বন্ধীয় প্রশ্নগুলির সমাধান আপেক্ষিক বেগ সম্বন্ধীয় সমাধানের অনুরূপ। স্মরণ রাখিতে হইবে যে, বৃত্তাকার পথে (1) একই দিকে ভ্রমণকালে যদি উভয় ব্যক্তির মধ্যে পুরা পথটি ব্যবধান হয়, তবে উহারা পরস্পর মিলিত হইবে ; (2) আর যদি উভয়ে একই স্থান হইতে বিপরীত দিকে রওনা হয়, তবে উভয়ে মিলিয়া সমস্ত পথটি যাইতে যে সময় লাগে, ততক্ষণ পরে উভয়ে মিলিত হইবে।

উদাহরণ 1. দুই ব্যক্তি একটি 14 কি. মিটার বৃত্তাকার পথের একই স্থান হইতে একত্রে রওনা হইয়া যথাক্রমে ঘণ্টায় $4\frac{1}{2}$ কি. মি. ও $2\frac{1}{2}$ কি. মি. বেগে চলিতে লাগিল। যদি তাহারা (1) পরস্পর বিপরীত দিকে যায়, (2) একই দিকে যায়, তবে কখন তাহারা পুনরায় মিলিত হইবে ?

(1) প্রথম ক্ষেত্রে, উভয়ে বিপরীত দিকে যাওয়ায় আপেক্ষিক গতিবেগ হইবে ঘণ্টায় $(4\frac{1}{2}+2\frac{1}{2})$ বা 7 কি. মিটার অর্থাৎ উভয়ের মধ্যে যে পুরা পথ ব্যবধান আছে তাহা ঘণ্টায় 7 কিলো মিটার করিয়া কমিয়া আসিবে।

∴ তাহারা $(14 \div 7)$ ঘ. বা 2 ঘণ্টা পরে মিলিত হইবে।

(2) দ্বিতীয় পক্ষে, উভয়ে একই দিকে যাওয়ায় উভয়ের আপেক্ষিক গতিবেগ ঘণ্টায় $(4\frac{1}{2}-2\frac{1}{2})$ বা 2 কি. মিটার অর্থাৎ উভয়ের মধ্যে ঘণ্টায় 2 কি. মি. করিয়া ব্যবধান হইবে। আর, এইরূপে পুরা পথ অর্থাৎ 14 কি. মি. ব্যবধান হইলে উভয়ে মিলিত হইবে।

∴ উভয়ে $(14 \div 2)$ ঘণ্টা বা 7 ঘণ্টা পরে মিলিত হইবে।

উদাহরণ 2. ক, খ ও গ একটি 10 কি. মিটার বৃত্তাকার পথের একই স্থান হইতে একসঙ্গে রওনা হইয়া যথাক্রমে ঘণ্টায় 5 কি.মি., 4 কি. মি. ও $2\frac{1}{2}$ কি.মি.

বেগে একই দিকে চলিতে লাগিল। কতক্ষণ পরে তাহারা পুনরায় যাত্রাস্থানে মিলিত হইবে ?

10 কিলো মিটার যাইতে **ক**-এর সময় লাগে $(10 \div 5)$ বা 2 ঘণ্টা, **খ**-এর লাগে $(10 \div 4)$ বা $\frac{5}{2}$ ঘণ্টা এবং **গ**-এর লাগে $(10 \div 2\frac{1}{2})$ বা 4 ঘণ্টা।

অতএব, তাহারা যথাক্রমে 2 ঘণ্টা, $\frac{5}{2}$ ঘণ্টা ও 4 ঘণ্টা অন্তর যাত্রাস্থানে আসিবে। ∴ নির্ণেয় সময়টি 2 ঘ., $\frac{5}{2}$ ঘ. ও 4 ঘ. দ্বারা বিভাজ্য।

∴ নির্ণেয় সময় = 2 ঘ., $\frac{5}{2}$ ঘ. ও 4 ঘণ্টার ল. সা. গু. = 20 ঘণ্টা।

বিবিধ সমাধান

উদাহরণ 1. একটি শামুক 36 সেণ্টিমিটার উচ্চ একটি দণ্ডে উঠিতে লাগিল। সে এক মিনিটে 7 সে. মি. উঠে এবং তার পরের মিনিটে 2 সে. মি. নামিয়া পড়ে। এইভাবে উঠিলে সে কতক্ষণে দণ্ডটির মাথায় উঠিতে পারিবে ?

শামুকটি প্রথম 1 মিনিটে 7 সে.মি. উঠে এবং তার পরের 1 মিনিটে 2 সে.মি. নামিয়া পড়ে। অতএব, প্রতি 2 মিনিটে সে মোট $(7-2)$ বা 5 সে.মি. উঠিবে।

দণ্ডটি মোট 36 সে.মি. উচ্চ। উঠানামা করিতে করিতে শামুকটি যখন এরূপ স্থানে উঠিবে, যে স্থান হইতে দণ্ডটির মাথার উচ্চতা 7 সে. মি. বা 7 সে. মিটারের কম, তখন সে বাকী অংশটুকু একেবারে উঠিয়া যাইবে, তার মধ্যে আর পড়িবে না।

এখন, (36 সে.মি. − 7 সে.মি.) = 29 সে. মি., ইহা 5 সে. মি. দ্বারা বিভাজ্য নহে। সুতরাং 29 সে. মি.এর পরবর্তী কত সে. মিটার 5 সে. মি. দ্বারা বিভাজ্য তাহা দেখিতে হইবে। অবশ্য উহা 30 সে.মি. হইবে। এই 30 সে.মি. উঠিতে শামুকের (30 সে.মি. ÷ 5 সে. মি.) বা 6 বার উঠানামা করিতে হইবে এবং তার জন্য সময় লাগিবে 2 মিনিট × 6 বা 12 মিনিট। 30 সে. মি. উঠার পর বাকী আছে আর 6 সে.মি.। মিনিটে 7 সে.মি. হিসাবে এই 6 সে. মি. উঠিতে সময় লাগে $\frac{6}{7}$ মিনিট।

∴ দণ্ডটির মাথায় উঠিতে শামুকের মোট $(12+\frac{6}{7})$ বা $12\frac{6}{7}$ মিনিট সময় লাগিবে।

উদাহরণ 2. একটি কুকুর একটি শশককে ধরিবার জন্য তাড়া করিল। শশক তাহার 24 লাফ আগে ছিল। কুকুর যতক্ষণে 5 লাফ দেয় শশক ততক্ষণে 6 লাফ দেয় এবং কুকুর ও শশক প্রতি লাফে যথাক্রমে 3 মিটার ও 2 মিটার যায়। কুকুরটি তাহার কত লাফে শশককে ধরিবে ?

যে সময়ে কুকুর 5 লাফে (5×3) বা 15 মি. যায়, সেই সময়ে শশক 6 লাফে (6×2) বা 12 মি. যায়। অতএব, কুকুর তাহার প্রতি 5 লাফে শশকের চেয়ে

3 মিটার বেশী যায়। শশক তাহার 24 লাফ অর্থাৎ 24×2 মি. বা 48 মিটার আগে আছে, কুকুরটি এই 48 মিটার ব্যবধান কমাইলে শশককে ধরিবে।

কুকুরটি 3 মিটার ব্যবধান কমায় নিজের 5 লাফে

∴ „ 1 „ „ „ „ $\frac{5}{3}$ „

∴ „ 48 „ „ „ „ $\frac{5}{3} \times 48$ লাফে বা 80 লাফে।

অতএব, কুকুরটি তাহার 80 লাফে শশককে ধরিবে।

উদাহরণ 3. কোন স্থানে 4 মিনিট অন্তর কামান দাগা হইতেছিল। ট্রেণে চড়িয়া এক ব্যক্তি সেই দিকে অগ্রসর হইবার সময় 3 মিনিট 50 সেকেণ্ড অন্তর পর পর দুইটি কামান দাগার শব্দ শুনিল। শব্দের গতি প্রতি সেকেণ্ডে $421\frac{2}{3}$ মিটার হইলে ট্রেণের গতিবেগ নির্ণয় কর।

মনে কর, ক চিহ্নিত স্থানে কামান দাগা হইতেছে এবং লোকটি প্রথম শব্দ **গ** ও দ্বিতীয় শব্দ **খ** চিহ্নিত স্থানে শুনিল। যদি লোকটি **গ**-তেই দাঁড়াইয়া থাকিত, তবে 4 মিনিট পরে দ্বিতীয় শব্দ শুনিত ; কিন্তু এখানে বলা আছে 3 মিনিট 50 সেকেণ্ড পরে দ্বিতীয় শব্দ শুনিয়াছে। অতএব, বুঝা গেল যে লোকটি প্রথম শব্দ শোনার পর কামানের দিকে **গখ** দূরত্ব আগাইয়া যাওয়ায় দ্বিতীয় শব্দকে আর **খগ** দূরত্ব যাইতে হইল না বলিয়া ঐ শব্দ শুনিতে (4 মি. − 3 মি. 50 সে.) বা 10 সেকেণ্ড কম সময় লাগিল।

ক খ গ

∴ **খগ** দূরত্ব যাইতে ট্রেণের 3 মি. 50 সে. বা 230 সেকেণ্ড এবং শব্দের 10 সেকেণ্ড সময় লাগে।

∴ **খগ** দূরত্ব $= 421\frac{2}{3}$ মি. $\times 10$, এই দূরত্ব ট্রেণটি 230 সেকেণ্ডে যায়।

∴ ট্রেণটি 1 সেকেণ্ডে যায় $\frac{1265 \times 10}{230 \times 3}$ মিটার,

∴ ট্রেণটি 1 ঘণ্টায় যায় $\frac{1265 \times 10 \times 60 \times 60}{230 \times 3 \times 1000}$ কি. মি. বা 66 কি. মি.

∴ নির্ণেয় ট্রেণের গতি = ঘণ্টায় 66 কিলোমিটার।

প্রশ্নমালা 22

1. একজন চৌকিদার চোরের 100 মিটার পশ্চাতে আছে। যদি 1760 মিটার দৌড়াইতে চৌকিদারের 6 মিনিট ও চোরের 10 মিনিট লাগে, তবে কত দূরে চৌকিদার চোরকে ধরিবে?

2. ক 1 কিলোমিটার যাইবার পর খ ঘণ্টায় 8 কি. মি. বেগে যাইয়া 15 মিনিটে ক-কে ধরিল। ক-এর গতিবেগ নির্ণয় কর।

3. একটি ট্রেণ সকাল 7টায় হাওড়া হইতে রওনা হইয়া বেলা 11টায় বর্ধমান পৌঁছায় এবং আর একটি ট্রেণ প্রাতে 8টায় বর্ধমান হইতে রওনা হইয়া 10টা 30 মিনিটে হাওড়ায় পৌঁছায়। কখন তাহাদের সাক্ষাৎ হয়?

[ঢা. বো. 1940]

4. কোন ট্রেণ ঘণ্টায় 30 কিলো মিটার বেগে যায় এবং 75 কি. মিটার অন্তর জল লইবার জন্য আধ ঘণ্টা করিয়া থামে। 375 কিলো মিটার যাইতে উহার মোট কত সময় লাগিবে ?

5. কোন লোককে 8টায় একটি স্থানে পৌঁছাইতে হইবে। সে যদি ঘণ্টায় 4 কিলো মিটার বেগে যায়, তবে 8টা 10 মিনিটে তথায় পৌঁছায় ; কিন্তু ঘণ্টায় 5 কিলো মিটার বেগে যাইলে 7টা 55 মিনিটে তথায় পৌঁছায়। তাহাকে কত দূর যাইতে হইবে ?

6. একটা গাড়ী তাহার স্বাভাবিক বেগের $\frac{3}{5}$ বেগে চলিয়া গন্তব্যস্থলে 2 ঘণ্টা 30 মিনিট বিলম্বে পৌঁছিল। স্বাভাবিক বেগে চলিলে তথায় পৌঁছাইতে কত সময় লাগিত ? [পা. প্র. 1883]

7. একখানি গাড়ী বেলা 12টার সময় ছাড়িয়া ঘণ্টায় 16 কিলো মিটার বেগে যাইতে লাগিল। একই স্থান হইতে আর একখানি গাড়ী বেলা 1টার সময় ছাড়িয়া রাত্রি 9টার সময় উহাকে ধরিল। পরের গাড়ীখানি ঘণ্টায় কত বেগে গিয়াছিল ?

8. বর্ধমান হইতে একখানা গাড়ী ঘণ্টায় 30 কি. মিটার বেগে কাশীর দিকে এবং কাশী হইতে একখানা গাড়ী ঘণ্টায় 50 কি. মি. বেগে বর্ধমানের দিকে একই সময়ে রওনা হইল। উহারা যখন মিলিত হইল তখন দেখা গেল একখানি গাড়ী অপর গাড়ী অপেক্ষা 100 কিলো মিটার অধিক চলিয়াছে। স্থান তুইটির মধ্যে দূরত্ব কত ?

9. একটি ট্রেণকে 250 কিলো মিটার যাইতে হইবে, কিন্তু 103 কিলো মিটার যাইবার পর উহার গতিবেগ $\frac{1}{5}$ কমাইতে হইল এবং ইহার জন্য ট্রেণটি 1 ঘণ্টা 10 মিনিট বিলম্বে পৌঁছিল। উহার স্বাভাবিক গতিবেগ নির্ণয় কর।

10. ক ও খ কোন স্থানে যাইবার জন্য একই সময়ে রওনা হইল। খ, ক-এর $\frac{4}{7}$ বেগে চলিয়া ক-এর $3\frac{1}{4}$ ঘণ্টা পরে ঐ স্থানে পৌঁছিল। ঐস্থানে যাইতে কাহার কত সময় লাগিয়াছিল ? [মা. প্র. 1883]

11. এক ব্যক্তি 6 ঘণ্টায় 80 কি. মি. পথ গিয়াছে। সে উহার কতকাংশ ঘণ্টায় 10 কি. মি. বেগে এবং অবশিষ্টাংশ ঘণ্টায় 18 কি. মি. বেগে গিয়াছে। সে কি বেগে কত কিলোমিটার গিয়াছে তাহা নির্ণয় কর।

12. ক স্থান হইতে খ স্থানে যাইতে প্রথমে 3 কি. মিটার চড়াই, পরে 8 কি. মি. সমভূমি ও শেষের 6 কি. মি. উৎরাই পথ। এক ব্যক্তি ঘণ্টায় 1 কি. মি. চড়াই পথে, 4 কি. মি. সমভূমিতে ও 6 কি. মি. উৎরাই পথে চলিতে পারে। ক হইতে খ-তে গিয়া আবার ক-তে ফিরিয়া আসিতে তাহার মোট কত সময় লাগিবে ?

13. রাম ও হরি যথাক্রমে ক ও খ নামক গ্রাম হইতে রওনা হইয়া পরস্পরের অভিমুখে যাইতে লাগিল। রাম ঘণ্টায় 3 কিলো মিটার বেগে চলিয়া

7 ঘণ্টা পরে যেস্থানে হরির সহিত মিলিত হইল, সে স্থানটি উভয় গ্রামের মধ্যস্থল হইতে **খ**-এর দিকে 2 কিলোমিটার দূরে। ঐ দুই গ্রামের মধ্যে দূরত্ব কত ?

14. **ক** ও **খ** এই দুই স্থানের মধ্যে দূরত্ব 25 কিলোমিটার। একই সময় কৃষ্ণ **ক** হইতে **খ**-এর দিকে এবং পার্থ **খ** হইতে **ক**-এর দিকে রওনা হইয়া 4 ঘণ্টা পরে উভয়ে মিলিত হইল। ইহার 2 ঘণ্টা 15 মিনিট পরে কৃষ্ণ **খ** স্থানে পৌছাইলে উহাদের গতিবেগ কত ?

15. 25 মিটার দীর্ঘ একখানি গাড়ী ঘণ্টায় 30 কিলোমিটার বেগে যাইতেছে, কতক্ষণে উহা একটি টেলিগ্রাফের খুঁটি অতিক্রম করিবে ?

16. একটি ট্রেণ ঘণ্টায় 48 কিলো মিটার বেগে চলিয়া 30 সেকেণ্ডে একটি 250 মিটার দীর্ঘ স্টেশন অতিক্রম করিল। ট্রেণটির দৈর্ঘ্য কত ?

17. একখানি ট্রেণ 5 সেকেণ্ডে একটি টেলিগ্রাফের খুঁটি এবং 10 সেকেণ্ডে 50 মিটার দীর্ঘ একটি প্ল্যাটফর্ম অতিক্রম করিল। ট্রেণখানির দৈর্ঘ্য ও গতিবেগ নির্ণয় কর। [পা. প্র. 1930]

18. একটি ট্রেণ 220 মিটার দীর্ঘ সেতুকে 30 সেকেণ্ডে এবং 325 মিটার দীর্ঘ স্টেশনকে 39 সেকেণ্ডে অতিক্রম করিল। ট্রেণটির দৈর্ঘ্য ও গতিবেগ কত ?

19. ঘণ্টায় 50 কি.মি. বেগে ধাবমান একটি ট্রেণের যাত্রীকে বিপরীতগামী 125 মিটার দীর্ঘ একটি মালগাড়ী 6 সেকেণ্ডে অতিক্রম করিল। মালগাড়ীর গতিবেগ কত ?

20. 100 মিটার ও 95 মিটার দীর্ঘ দুইটি ট্রেণ একই দিকে চলিয়া 27 সেকেণ্ডে এবং বিপরীত দিকে চলিয়া 9 সেকেণ্ডে পরস্পরকে অতিক্রম করে। ট্রেণ দুইটির গতিবেগ নির্ণয় কর।

21. এক ব্যক্তি ঘণ্টায় 4 কিলোমিটার বেগে যাইতেছিল। ঘণ্টায় 22 কিলো মিটার বেগে ধাবমান একটি ট্রেণ পিছন দিক হইতে আসিয়া তাহাকে 10 সেকেণ্ডে অতিক্রম করিল। ট্রেণটির দৈর্ঘ্য কত ?

22. 176 মিটার দীর্ঘ একখানি গাড়ী ঘণ্টায় 61·6 কি. মি. বেগে যাইতেছে। এক ব্যক্তি ঘণ্টায় 8·8 কি.মি. বেগে গাড়ীখানির (1) একই দিকে, (2) বিপরীত দিকে চলিতেছে। গাড়ীখানি কতক্ষণে লোকটিকে অতিক্রম করিবে ?

***23.** এক ব্যক্তি ঘণ্টায় 2 কি. মি. এবং অপর ব্যক্তি ঘণ্টায় 4 কি. মিটার বেগে রেলপথের পাশ দিয়া একই দিকে যাইতেছিল। পিছন দিক হইতে একটি ট্রেণ আসিয়া উহাদিগকে যথাক্রমে 9 ও 10 সেকেণ্ডে অতিক্রম করিল। ট্রেণখানির দৈর্ঘ্য ও গতিবেগ নির্ণয় কর।

24. ঘণ্টায় 7 কিলোমিটার বেগে এক ব্যক্তি কোন শহরের দিকে আসিতেছিল। ঐ শহর হইতে 15 মিনিট অন্তর তাহার নিকট দূত পাঠান

হইতেছিল। দূতগুলি যদি ঘণ্টায় 8 কিলোমিটার বেগে যায়, তবে কতক্ষণ অন্তর পর পর দূতগণের সহিত লোকটির সাক্ষাৎ হইবে ?

25 স্থির জলে এক ব্যক্তি ঘণ্টায় 9 কিলো মিটার নৌকা চালাইয়া যায় ; কিন্তু স্রোতের বিপরীত দিকে আসিতে 3 গুণ সময় লাগে। স্রোতের বেগ নির্ণয় কর।

26. এক মাঝি দাঁড় বাহিয়া 8 ঘণ্টায় স্রোতের অনুকূলে 12 কিলো মিটার গেল এবং স্রোতের প্রতিকূলে ফিরিয়া আসিতে তাহার 3 গুণ সময় লাগিল। স্রোতের ও নৌকার বেগ নির্ণয় কর।

27. মোট 9 ঘণ্টায় এক মাঝি স্রোতের অনুকূলে কোন স্থানে গিয়া স্রোতের প্রতিকূলে ফিরিয়া আসিল। নৌকার ও স্রোতের বেগ যথাক্রমে ঘণ্টায় 6 কিলো মিটার ও 2 কিলো মিটার হইলে, ঐ স্থানের দূরত্ব কত ?

28. কোন নদীতীরে **ক**, **খ** ও **গ** তিনটি স্থান আছে। **খ** স্থানটি **ক** ও **গ**-এর ঠিক মধ্যবর্তী। **ক** হইতে **খ**-তে গিয়া ফিরিয়া আসিতে একটি নৌকার 5 ঘণ্টা 15 মিনিট এবং **ক** হইতে **গ**-তে যাইতে 7 ঘণ্টা সময় লাগিল। **গ** হইতে **ক**-তে ফিরিতে নৌকাটির কত সময় লাগিবে ? [বো. প্র. 1892]

29. 5 কিলোমিটার পরিধি-বিশিষ্ট বৃত্তাকার পথের একই স্থান হইতে একই সময়ে একই দিকে চলিতে আরম্ভ করিয়া ঘণ্টায় **ক** $2\frac{1}{2}$ কি. মি., **খ** 3 কি. মি. ও **গ** 2 কি. মি বেগে চলিল। কতক্ষণ পরে তাহারা পুনরায় যাত্রাস্থানে মিলিত হইবে ?

30. একটি বৃত্তাকার পথ এক ব্যক্তি 10 মিনিটে এবং অপর এক ব্যক্তি 12 মিনিটে একবার ঘুরিতে পারে। উহারা যদি একই স্থান হইতে একই সময়ে ঘুরিতে আরম্ভ করে এবং উভয়ে (1) একই দিকে, (2) পরস্পর বিপরীত দিকে চলে, তবে কখন তাহারা পুনরায় মিলিত হইবে ?

31. 60 কিলোমিটার পরিধি-বিশিষ্ট একটি বৃত্তাকার পথের একই স্থান হইতে একই সময়ে **ক**, **খ** ও **গ** যথাক্রমে ঘণ্টায় 2, 5 ও 3 কি. মি. বেগে চলিতে আরম্ভ করিল। যদি **ক** ও **খ** একই দিকে এবং **গ** উহাদের বিপরীত দিকে চলিতে থাকে, তবে তাহারা কখন পুনরায় একত্রে মিলিত হইবে ?

32. একটি কুকুর হইতে একটি শশক তাহার নিজের 60 লাফ দূরে আছে। শশক যতক্ষণে 5 বার লাফায় কুকুর ততক্ষণে 4 বার লাফায় এবং এক লাফে শশক 2 মিটার ও কুকুর 3 মিটার যায়। কুকুরটি কত লাফ দিয়া শশকটিকে ধরিবে ?

33. একটি কুকুর একটি শশককে তাড়া করিল। শশক যতক্ষণে 5 বার লাফায়, কুকুর ততক্ষণে 4 বার লাফায়, কিন্তু কুকুরের তিন লাফ শশকের 4 লাফের সমান। কুকুর ও শশকের গতিবেগের অনুপাত নির্ণয় কর। [ক. প্র. 1935]

34. একটি বানর 33 মিটার উচ্চ একটি তৈলাক্ত দণ্ডের উপর উঠিতে লাগিল। সে এক মিনিটে 7 মিটার উঠে এবং পর মিনিটে 4 মিটার নামিয়া পড়ে। এইভাবে ঐ দণ্ডের মাথায় উঠিতে বানরটির কত সময় লাগিবে ?

35. একটি শামুক রাত্রিকালে 12 ঘণ্টায় 1 মি. $9\frac{1}{2}$ ডেসি. মি. উঠে এবং দিনের বেলায় 12 ঘণ্টায় 1 মি. 1 ডেসি মি. নামে। এইরূপে 111 মি. 6 ডেসি মি. উচ্চ একটি দণ্ডের মাথায় উঠিতে উহার কত ঘণ্টা সময় লাগিবে ?

36 কোন স্থানে 5 মিনিট অন্তর কামান দাগা হইতেছিল এবং সেই দিকে একটি ট্রেণ অগ্রসর হইতেছিল। ঐ ট্রেণের কোন যাত্রী 4 মিনিট 49 সেকেণ্ড অন্তর কামানের পর পর দুইটি শব্দ শুনিল। শব্দের গতি প্রতি সেকেণ্ডে $385\frac{1}{3}$ মিটার হইলে ট্রেণের গতিবেগ কত ?

*37. 10 মিটার অন্তর কোন শহরে তোপ পড়িতেছিল এবং সেই দিকে একটি ট্রেণ ঘণ্টায় 72 কি.মি. বেগে অগ্রসর হইতেছিল। শব্দের গতি সেকেণ্ডে 380 মিটার হইলে, ঐ ট্রেণের যাত্রী কতক্ষণ অন্তর পরপর দুইটি তোপধ্বনি শুনিবে ?

*38. একটি দুর্গ হইতে দুইবার তোপধ্বনি হইল। কোন অশ্বারোহী ঘণ্টায় 14 কিলোমিটার বেগে সেইদিকে যাইবার সময় 12 মিনিট অন্তর ঐ শব্দ দুইটি শুনিল। শব্দের গতি সেকেণ্ডে 560 মিটার হইলে, কতক্ষণ অন্তর তোপধ্বনি করা হইয়াছিল ?

*39. অর্ধ-কিলোমিটার গোলাকার পথে ক ও খ-এর মধ্যে 4 কিলো মিটারের দৌড় প্রতিযোগিতা হইতেছিল। ষষ্ঠবার আবর্তনের মধ্যভাগে ক, খ-র সহিত মিলিত হইয়াছিল। ক কত কিলোমিটারে জয়লাভ করিবে ?

*40. এক ব্যক্তি কোন বাসের পথে চলিতেছিল এবং ঐ পথে একই দিকে 10 মিনিট অন্তর বাস ছাড়া হইতেছিল। বাসের গতি ঘণ্টায় 8 মাইল এবং এক একখানি বাস লোকটিকে 15 মিনিট অন্তর অতিক্রম করিতেছিল। (1) লোকটি কত বেগে চলিতেছিল এবং (2) সে যদি বিপরীত দিকে চলিত, তবে কতক্ষণ অন্তর পর পর বাসগুলির সহিত তাহার সাক্ষাৎ হইত ? [ঢা. বো. 1945]

*41. একই সময়ে একটি ট্রেণ কলিকাতা হইতে মধুপুরের দিকে এবং আর একটি ট্রেণ মধুপুর হইতে কলিকাতার দিকে রওনা হয়। যদি তাহাদের সাক্ষাতের 1 ঘণ্টা ও 4 ঘণ্টা পরে ট্রেণ দুইটি যথাক্রমে মধুপুর ও কলিকাতায় পৌঁছায়, তবে প্রমাণ কর যে একটি ট্রেণের গতিবেগ অন্য ট্রেণের গতিবেগের দ্বিগুণ। [ক. প্র. 1946]

*42. এক ব্যক্তি একটি পাহাড়ে উঠিবার সময় ঘণ্টায় $2\frac{1}{2}$ হেক্টোমিটার এবং নামিবার সময় ঘণ্টায় $3\frac{1}{3}$ হেক্টোমিটার বেগে চলিতে পারে। যদি ঐ পাহাড়ের কিছুদূর উপরে উঠিয়া যাত্রাস্থলে নামিয়া আসিতে তাহার মোট 4 ঘণ্টা 30 মিনিট সময় লাগিয়া থাকে, তবে সে কতদূর উপরে উঠিয়াছিল ?

দশম শ্রেণী

অনুপাত

(ক) এক জাতীয় দুইটি রাশির মধ্যে তুলনা করিয়া একটি রাশি আর একটি রাশির কত অংশ বা কত গুণ যাহা দ্বারা প্রকাশ করা হয়, তাহাকে রাশি দুইটির **অনুপাত** (ratio) বলে। অতএব, অনুপাত হইল দুইটি সমজাতীয় রাশির বা সংখ্যার পরস্পর সম্বন্ধ।

ইহা হইতে বুঝা যায় যে, দুইটি সমজাতীয় রাশির অনুপাত নির্ণয় করিতে হইলে প্রথমটিকে দ্বিতীয়টি দ্বারা ভাগ করিতে হয় ; অর্থাৎ প্রথমটি হইবে লব এবং দ্বিতীয়টি হইবে হর। সুতরাং রাশি দুইটিকে একই এককে পরিণত করিয়া অনুপাত নির্ণয় করিতে হয়।

(খ) যে দুইটি রাশির মধ্যে অনুপাত নির্ণয় করা হয় তাহাদের প্রথমটিকে **পূর্ব রাশি** (Antecedent) এবং দ্বিতীয়টিকে **উত্তর রাশি** (Consequent) বলা হয়। ঐ রাশি দুইটিকে অনুপাতের দুইটি **পদ** (Terms of the Ratio) বলে।

লিখিবার ও পড়িবার নিয়ম : অনুপাত নির্ণয় করিতে প্রথম রাশিকে দ্বিতীয় রাশি দ্বারা ভাগ করিতে হয় বলিয়া রাশি দুইটির মধ্যে ভাগচিহ্নের (÷) সংক্ষিপ্ত আকারে ':' চিহ্ন দিতে হয়। 3 : 5-কে পড়িবার সময় 3 অনুপাত 5 পড়িতে হইবে।

নিম্নের দৃষ্টান্তগুলি লক্ষ্য কর :—

(1) 6 ও 11-এর অনুপাত $=\frac{6}{11}=6:11.$

(2) 3 টাকা ও 5 টাকার অনুপাত $=\frac{3 \text{ টা.}}{5 \text{ টা.}}=\frac{3}{5}=3:5.$

(3) 2 গজ ও 5 ফুটের অনুপাত $=\frac{2 \text{ গজ}}{5 \text{ ফুট}}=\frac{6 \text{ ফুট}}{5 \text{ ফুট}}=\frac{6}{5}=6:5.$

(4) 5 আনা 4 পাই : 1 টাকা $=\frac{5 \text{ আ. } 4 \text{ পা.}}{1 \text{ টা.}}=\frac{\frac{1}{3} \text{ টা.}}{1 \text{ টা.}}=\frac{1}{3}=1:3.$

(গ) এক জাতীয় দুইটি সংখ্যার ভাগফল শুদ্ধ সংখ্যা হয় বলিয়া দুইটি রাশির অনুপাত সকল স্থলেই **শুদ্ধ সংখ্যা** হইবে। উহা কখনও বদ্ধ সংখ্যা হইতে পারে না।

(ঘ) **ব্যস্ত অনুপাত :** দুইটি অনুপাতের মধ্যে যদি একটির পূর্ব রাশি ও উত্তর রাশি যথাক্রমে অন্যটির উত্তর রাশি ও পূর্ব রাশি হয়, তাহা হইলে অনুপাত দুইটির যে কোনটিকে অপরটির **ব্যস্ত** বা **বিপরীত অনুপাত** (Inverse ratio) বা **অন্যোন্যক** (Reciprocal) বলা হয়। যথা—

3 : 4এর ব্যস্ত অনুপাত 4 : 3 এবং 4 : 3এর ব্যস্ত অনুপাত 3 : 4. $\frac{2}{3}$এর অন্যোন্যক $\frac{3}{2}$, 3এর অন্যোন্যক $\frac{1}{3}$ হইবে।

(ঙ) সরল ও মিশ্র ভেদে অনুপাত দুই প্রকার। 4 টাকা : 5 টাকা, ইহাকে **সরল অনুপাত** (Simple ratio) বলে। আর, দুই বা ততোধিক অনুপাতের পূর্ব রাশিগুলির ক্রমিক গুণফলকে পূর্ব রাশি এবং উত্তর রাশিগুলির ক্রমিক গুণফলকে উত্তর রাশি করিয়া লিখিলে যে অনুপাত উৎপন্ন বা গঠিত হয়, তাহাকে ঐ অনুপাতগুলির **মিশ্র** বা **যৌগিক** বা **সম্মিলিত অনুপাত** (Compound ratio) বলে। যথা—4 : 5, 6 : 7, 5 : 6 এই অনুপাত তিনটির যৌগিক অনুপাত হইবে $(4\times6\times5) : (5\times7\times6)$ বা 4 : 7.

উদাহরণ 1. 3 টা. 50 পয়সা এবং 4 টা. 20 পয়সার অনুপাত কত?

3 টা. 50 প. = 350 পয়সা, 4 টা. 20 পয়সা = 420 পয়সা।

∴ 3 টা. 50 প. : 4 টা. 20 প. = 350 প. : 420 প. $= \frac{350}{420} = \frac{5}{6} = 5 : 6.$

উদাহরণ 2. 2 মণের $1\frac{1}{8}$: 3 মণ 5 সেরের $1\frac{7}{25}$, এই অনুপাতটিকে লঘিষ্ঠ আকারে প্রকাশ কর।

2 মণের $1\frac{1}{8}$ = 80 সেরের $\frac{9}{8}$ = 90 সের,

3 মণ 5 সেরের $1\frac{7}{25}$ = 125 সেরের $\frac{32}{25}$ = 160 সের ;

∴ অনুপাতটি $= \frac{90}{160} = \frac{9}{16} = 9 : 16.$

উদাহরণ 3. 5 : 7, 14 : 15 ও 9 : 20, এইগুলির যৌগিক অনুপাত কত?

নির্ণেয় যৌগিক অনুপাত $= \frac{5\times14\times9}{7\times15\times20} = \frac{3}{10} = 3 : 10.$

উদাহরণ 4. 4 : 7 ও 10 : 11 অনুপাত দুইটির মধ্যে কোন্‌টি বৃহত্তর?

এখানে 7 ও 11এর ল. সা. গু. = 77.

এক্ষণে, $4 : 7 = \frac{4}{7} = \frac{4\times11}{7\times11} = \frac{44}{77}$ এবং $10 : 11 = \frac{10}{11} = \frac{10\times7}{11\times7} = \frac{70}{77}$;

∵ $\frac{70}{77} > \frac{44}{77}$, ∴ 10 : 11 অনুপাতটি বৃহত্তর।

উদাহরণ 5. দুইটি রাশির অনুপাত 4 : 5 ; উহার উত্তর রাশি 65 মিটার হইলে পূর্ব রাশি কত?

$\frac{\text{পূর্ব রাশি}}{65 \text{ মি.}} = \frac{4}{5} = \frac{4\times13}{5\times13} = \frac{52}{65} = \frac{52 \text{ মি.}}{65 \text{ মি.}}$, ∴ নির্ণেয় পূর্ব রাশি = 52 মিটার।

উদাহরণ 6. $\frac{3}{5} : \frac{4}{7}$কে পূর্ণসংখ্যার অনুপাতরূপে প্রকাশ কর।

অনুপাতের রাশিদ্বয়কে একই সংখ্যা দ্বারা গুণ করিলেও অনুপাতের পরিবর্তন হয় না। সুতরাং এখানে 5 ও 7এর ল. সা. গু. দ্বারা উভয় পদকে গুণ করিতে হইবে। $\frac{3}{5} : \frac{4}{7} = \frac{3}{5}\times35 : \frac{4}{7}\times35 = 21 : 20.$

উদাহরণ 7. ক 7 দিনে 80 টাকা এবং খ 12 দিনে 90 টাকা বেতন পায়। উভয়ের বেতনের অনুপাত নির্ণয় কর।

ক-এর 7 দিনের বেতন 80 টাকা,

$\therefore$,, 1 ,, ,, $\frac{80}{7}$ টাকা ;

আবার, খ-এর 12 দিনের বেতন 90 টাকা,

$\therefore$,, 1 ,, ,, $\frac{90}{12}$ বা $\frac{15}{2}$ টাকা ;

$\therefore$ উভয়ের বেতনের অনুপাত $= \frac{80}{7} : \frac{15}{2} = \frac{80}{7} \div \frac{15}{2} = \frac{80}{7} \times \frac{2}{15}$

$= \frac{32}{21} = 32 : 21.$

প্রশ্নমালা 23

নিম্নের অনুপাতগুলিকে মানের ক্রম অনুসারে লিখ :—

1. $6 : 14, 5 : 25, 8 : 12$ 2. $\frac{1}{3} : \frac{2}{3}, 3 : 5, 2\frac{1}{2} : 3\frac{1}{3}$

3. $3{\cdot}2 : 4{\cdot}8, \cdot\dot{4} : \cdot\dot{5}, \cdot\dot{1}\dot{5} : \cdot\dot{8}\dot{5}$

4. 6 টাকা : 10 টাকা, 12 মণ : 18 মণ, 3 গজ 2 ফুট : 4 গজ 1 ফুট।

5. দুইটি রাশির অনুপাত 3 : 4, পূর্ব রাশি 15 হইলে, উত্তর রাশিটি কত?

6. কোন অনুপাতের মান $\frac{2}{3}$ এবং উত্তর রাশি 81 ; পূর্ব রাশিটি কত?

7. দুইটি রাশির অনুপাত 4 : 5 ; উহার পূর্ব রাশি 3 টাকা 76 পয়সা হইলে, উত্তর রাশিটি নির্ণয় কর।

8. কোন অনুপাতের মান $\frac{5}{7}$; উহার উত্তর রাশি 1 মি. 4 ডেসি মি. হইলে, পূর্ব রাশি কত হইবে?

9. ক-এর টাকা : খ-এর টাকা = 10 : 11 ; ক-এর 120 টাকা হইলে খ-এর টাকা কত?

10. রামের বয়স : হরির বয়স = 3 : 4, হরির বয়স 28 বৎসর হইলে রামের বয়স কত?

11. $\frac{3}{4} : \frac{5}{6}$কে পূর্ণসংখ্যার অনুপাতে প্রকাশ কর।

12. 324 টাকাকে 11 : 7 অনুপাতে ক ও খ-এর মধ্যে ভাগ করিয়া দিলে কে কত পাইবে?

13. ক 12 দিনে 150 কিলোমিটার এবং খ 9 দিনে 87 কি. মি. চলে। উভয়ের গতির অনুপাত নির্ণয় কর।

14. একটি কুকুর একটি শশককে ধরিবার জন্য ছুটিল। কুকুরটি যতক্ষণে 5 বার লাফায় শশকটি ততক্ষণে 6 বার লাফায় ; কিন্তু কুকুরের 3 লাফ শশকের 5 লাফের সমান। উভয়ের গতির অনুপাত কত?

সমানুপাত

দুইটি অনুপাত পরস্পর সমান হইলে তাহাদিগকে **সমানুপাত** (Proportion) বলে।

চারিটি রাশির মধ্যে যদি প্রথম ও দ্বিতীয় রাশির অনুপাত, তৃতীয় ও চতুর্থ রাশির অনুপাতের সমান হয়, তবে ঐ রাশি চারিটিকে **সমানুপাতী** (Proportional) বলে। যথা—

(1) 4 : 6, 10 : 15 ইহারা সমানুপাত। কারণ, 4 : 6 $=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$; এবং 10 : 15 $=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$; উভয় অনুপাতের মান $\frac{2}{3}$ বলিয়া উহারা সমানুপাত।

(2) 2 টাকা, 5 টাকা, 12 মিটার, 30 মিটার—এই চারিটি রাশি সমানুপাতী। কারণ, 2 টাকা : 5 টাকা $=\frac{2}{5}$, এবং 12 মি. : 30 মি. $=\frac{12}{30}=\frac{2}{5}$. এখানে প্রথম রাশি দুইটির অনুপাত তৃতীয় ও চতুর্থ রাশি দুইটির অনুপাতের সমান হওয়ায়, ঐ রাশি চারিটি সমানুপাতী।

লিখিবার প্রণালী : 4 : 6 = 10 : 15 ; "=" এই সমান চিহ্নটির পরিবর্তে ': :' এই চিহ্নটিও ব্যবহার করা হয়। যথা, 4 : 6 : : 10 : 15.

2 মিটার, 3 মিটার, এবং 4 গ্রাম, 6 গ্রাম সমানুপাতী।

ইহাদিগকে 2 মি. : 3 মি. : : 4 গ্রা. : 6 গ্রা. লেখা হয়।

পড়িবার রীতি : ঐ অনুপাত পড়িবার সময় '2 মিটার অনুপাত 3 মিটার সমান 4 গ্রাম অনুপাত 6 গ্রাম' পড়া হয়।

প্রত্যেক অনুপাতের দুইটি পদ এক জাতীয় হওয়া আবশ্যক ; কিন্তু সমানুপাতের অন্তর্গত একটি অনুপাতের রাশিদ্বয় এক জাতীয় এবং অন্য অনুপাতটির রাশিদ্বয় অন্য এক জাতীয় হইতে পারে ; কারণ দুইটি অনুপাতই শুদ্ধ সংখ্যা মাত্র। উপরের উদাহরণ দেখ।

সমানুপাতের প্রথম ও চতুর্থ রাশিকে **অন্ত্য** বা **প্রান্তীয় রাশি** (Extremes), দ্বিতীয় ও তৃতীয় রাশিকে **মধ্য রাশি** বা **মধ্যক** (Means) বলে এবং চতুর্থ রাশিকে প্রথম তিন রাশির **চতুর্থ সমানুপাতী** (Fourth proportional) বলে। যথা, 2 : 3 : : 4 : 6 এর 2 ও 6 অন্ত্যরাশি, 3 ও 4 মধ্যক এবং 6 চতুর্থ সমানুপাতী।

ক্রমিক সমানুপাতী : সমজাতীয় তিনটি রাশির মধ্যে যদি প্রথম ও দ্বিতীয়ের অনুপাত দ্বিতীয় ও তৃতীয়ের অনুপাতের সমান হয়, তবে ঐ রাশি তিনটিকে **ক্রমিক সমানুপাতী** (In continued proportion) বলে। উহাদের দ্বিতীয় রাশিকে প্রথম ও তৃতীয় রাশিদ্বয়ের **মধ্য সমানুপাতী** (Mean proportional) বলে, এবং তৃতীয় রাশিকে প্রথম ও দ্বিতীয় রাশির **তৃতীয় সমানুপাতী** (Third proportional) বলা হয়।

যথা—2, 4, 8 ক্রমিক সমানুপাতী ; কারণ, 2 : 4 : : 4 : 8, এখানে 4-কে 2 ও 8-এর মধ্য সমানুপাতী এবং 8-কে 2 ও 4-এর তৃতীয় সমানুপাতী বলে।

ক্রমিক সমানুপাত তিনটির অধিক সমজাতীয় রাশির মধ্যেও হইতে পারে। যদি 5টি রাশির 1ম : 2য় = 2য় : 3য় = 3য় : 4র্থ = 4র্থ : 5ম হয়, তবে ঐ রাশি পাঁচটিকে ক্রমিক সমানুপাতী বলে। যথা—

1 : 2 = 2 : 4 = 4 : 8 = 8 : 16 বলিয়া 1, 2, 4, 8, 16 ক্রমিক সমানুপাতী।

ধারাবাহিক অনুপাত : একজাতীয় বহু রাশির পরস্পর অনুপাতকে ধারাবাহিক ভাবে অনুপাত চিহ্ন দ্বারা সাজাইয়া লেখা যায়।

যথা—2 গ্রা. : 4 গ্রা : 10 গ্রা. : 12 গ্রা. : 14 গ্রাম = 2 : 4 : 10 : 12 : 14 = 1 : 2 : 5 : 6 : 7.

সমানুপাত সম্বন্ধীয় কয়েকটি জ্ঞাতব্য বিষয় :—

(1) চারিটি শুদ্ধ সংখ্যা সমানুপাতী হইলে, অন্ত্য রাশিদ্বয়ের গুণফল মধ্য রাশিদ্বয়ের গুণফলের সমান হইবে (অর্থাৎ 1ম × 4র্থ = 2য় × 3য়)।

3 : 5 : : 12 : 20 বলিয়া $3 \times 20 = 5 \times 12$.

প্রমাণ : এখানে $\frac{3}{5} = \frac{12}{20}$, উভয় অনুপাতকে 5×20 (অর্থাৎ উত্তর রাশিদ্বয়ের গুণফল) দ্বারা গুণ করিয়া পাই—

$$\frac{3}{\cancel{5}} \times \cancel{5} \times 20 = \frac{12}{\cancel{20}} \times 5 \times \cancel{20} \text{ বা, } 3 \times 20 = 12 \times 5.$$

এইরূপ গুণকে আড় গুণন (Cross Multiplication) বলে।

অনুসিদ্ধান্ত : (ক) চারিটি সংখ্যা সমানুপাতী কিনা পরীক্ষা করিতে হইলে প্রথম ও চতুর্থ সংখ্যাদ্বয়ের গুণফল এবং দ্বিতীয় ও তৃতীয় সংখ্যাদ্বয়ের গুণফল সমান কিনা দেখিবে। সমান হইলে সংখ্যা চারিটি সমানুপাতী হইবে, নতুবা হইবে না।

(খ) কোন সমানুপাতের যে কোন তিনটি রাশি জানা থাকিলে, এই নিয়মে অপর রাশিটি পাওয়া যায়। যথা—

একটি প্রান্ত্যরাশি (1ম বা 4র্থ) = মধ্য রাশিদ্বয়ের গুণফল ÷ অপর প্রান্ত্যরাশি।

একটি মধ্যরাশি (2য় বা 3য়) = প্রান্ত্য রাশিদ্বয়ের গুণফল ÷ অপর মধ্যরাশি।

(2) তিনটি রাশি ক্রমিক সমানুপাতী হইলে, প্রথম ও তৃতীয়ের গুণফল দ্বিতীয়ের বর্গের সমান হইবে। ইহা পূর্বের সিদ্ধান্ত হইতে প্রমাণিত হয়।

∵ প্রথম : দ্বিতীয় : : দ্বিতীয় : তৃতীয়,

∴ প্রথম × তৃতীয় = দ্বিতীয় × দ্বিতীয় = (দ্বিতীয়)^2.

যথা, 4, 12, 36 ক্রমিক সমানুপাতী, এখানে $4 \times 36 = (12)^2$.

অনুসিদ্ধান্ত: দুইটি রাশির মধ্য সমানুপাতী নির্ণয় করিতে হইলে, উহাদের গুণফলের বর্গমূল বাহির করিতে হইবে। উহাই নির্ণেয় মধ্য সমানুপাতী। যথা, 9 ও 16-এর মধ্য সমানুপাতী $= \sqrt{9 \times 16} = \sqrt{144} = 12$.

(3) চারিটি রাশি সমানুপাতী হইলে—

(ক) প্রথম রাশি : দ্বিতীয় রাশি : : তৃতীয় রাশি : চতুর্থ রাশি।

(খ) দ্বিতীয় রাশি : প্রথম রাশি : : চতুর্থ রাশি : তৃতীয় রাশি। কারণ, দুইটি সমান অনুপাতের ব্যস্ত অনুপাতগুলিও সমান হয়।

4 : 7 : : 12 : 21 হওয়ায় 7 : 4 : : 21 : 12 হইবে।

প্রমাণ: $\because \frac{4}{7} = \frac{12}{21}$, $\therefore 1 \div \frac{4}{7} = 1 \div \frac{12}{21}$ অর্থাৎ $\frac{7}{4} = \frac{21}{12}$.

বা 7 : 4 : : 21 : 12.

(4) চারিটি শুদ্ধ সংখ্যা বা এক জাতীয় রাশি সমানুপাতী হইলে প্রথম : তৃতীয় : : দ্বিতীয় : চতুর্থ হইতে পারে।

যথা—2 : 3 : : 8 : 12 বলিয়া 2 : 8 : : 3 : 12 হইবে।

প্রমাণ: $\because \dfrac{2}{3} = \dfrac{8}{12}$, $\therefore \dfrac{2}{3} \times \dfrac{3}{8} = \dfrac{8}{12} \times \dfrac{3}{8}$ (উভয় পক্ষকে $\frac{3}{8}$ দ্বারা গুণ করিয়া), বা $\frac{2}{8} = \frac{3}{12}$, $\therefore$ 2 : 8 : : 3 : 12.

(5) কোন অনুপাতের রাশিদ্বয়কে একই সংখ্যা দ্বারা গুণ বা ভাগ করিলে, অনুপাতের মানের পরিবর্তন হয় না। যথা—

(ক) $3 : 4 = 3 \times 5 : 4 \times 5 = 15 : 20$, কারণ $\frac{15}{20} = \frac{3}{4}$.

(খ) $4 : 10 = \dfrac{4 \div 2}{10 \div 2} = \frac{2}{5} = 2 : 5$.

(গ) $2 : 3 = 4 : 6$ বলিয়া $2 \times 5 : 3 \times 5 : : 4 \times 3 : 6 \times 3$ হইতে পারে। কারণ $\frac{2 \times 5}{3 \times 5} = \frac{2}{3}$ এবং $\frac{4 \times 3}{6 \times 3} = \frac{2}{3}$.

এইবার নিম্নের সমাধানগুলি লক্ষ্য কর :—

উদাহরণ 1. 5, 15 ও 8 ইহাদের চতুর্থ সমানুপাতী নির্ণয় কর।

এখানে, $\dfrac{5}{15} = \dfrac{8}{\text{নির্ণেয় সংখ্যা}}$, $\therefore$ 5 × নির্ণেয় সংখ্যা = 15 × 8,

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা বা চতুর্থ সমানুপাতী $= \frac{15 \times 8}{5} = 24$.

উদাহরণ 2. কোন্ সংখ্যা 4 ও 64-র মধ্য সমানুপাতী ?

নির্ণেয় সংখ্যা $= \sqrt{4 \times 64} = \sqrt{256} = 16$

উদাহরণ 3. **ক**-এর টাকা **খ**-এর টাকার $\frac{3}{4}$ এবং **খ**-এর টাকা **গ**-এর টাকার $1\frac{1}{5}$ গুণ। **ক** ও **গ**-এর টাকার অনুপাত কত ?

$\because$ **ক**-এর টাকা = **খ**-এর টাকার $\frac{3}{4}$, $\therefore \dfrac{\text{ক-এর টাকা}}{\text{খ-এর টাকা}} = \dfrac{3}{4}$.

$\because$ খ-এর টাকা = গ-এর টাকার $1\frac{1}{5}$, $\therefore$ $\frac{\text{খ-এর টাকা}}{\text{গ-এর টাকা}}=\frac{6}{5}$;

$\therefore$ $\frac{\text{ক-এর টাকা}}{\text{খ-এর টাকা}}\times\frac{\text{খ-এর টাকা}}{\text{গ-এর টাকা}}=\frac{3}{4}\times\frac{6}{5}=\frac{9}{10}$, $\therefore$ $\frac{\text{ক-এর টাকা}}{\text{গ-এর টাকা}}=\frac{9}{10}$,

$\therefore$ ক-এর টাকা : গ-এর টাকা = 9 : 10

উদাহরণ 4. **ক** ও **খ**-এর অনুপাত 2 : 3, **খ** ও **গ**-এর অনুপাত 4 : 5 এবং **গ** ও **ঘ**-এর অনুপাত 6 : 7 হইলে **ক, খ, গ** ও **ঘ**-এর একত্র অনুপাত নির্ণয় কর।

[এখানে] $\frac{\text{ক}}{\text{খ}}=\frac{2}{3}$, $\frac{\text{খ}}{\text{গ}}=\frac{4}{5}$, $\frac{\text{গ}}{\text{ঘ}}=\frac{6}{7}$.

একত্র অনুপাত নির্ণয় করিতে হইলে উপরের ভগ্নাংশগুলিকে এরূপ ভগ্নাংশে পরিণত করিতে হইবে, যেন প্রথমটির হর দ্বিতীয়টির লবের সমান হয় এবং দ্বিতীয়টির হর তৃতীয়টির লবের সমান হয়।

ক : **খ** = 2 : 3,

খ : **গ** = 4 : 5 = 1 : $\frac{5}{4}$ = 1 × 3 : $\frac{5}{4}$ × 3 = 3 : $\frac{15}{4}$,

গ : **ঘ** = 6 : 7 = 1 : $\frac{7}{6}$ = 1 × $\frac{15}{4}$: $\frac{7}{6}$ × $\frac{15}{4}$ = $\frac{15}{4}$: $\frac{35}{8}$,

$\therefore$ **ক** : **খ** : **গ** : **ঘ** = 2 : 3 : $\frac{15}{4}$: $\frac{35}{8}$ = 16 : 24 : 30 : 35.

উদাহরণ 5. 5 : 3 অনুপাতে দুধ ও জল মিশ্রিত করিয়া 72 কিলোগ্রাম হইল। দুধ ও জলের পরিমাণ নির্ণয় কর।

এখানে অনুপাত 5 : 3, অর্থাৎ 5+3 বা 8 ভাগের মধ্যে 5 ভাগ দুধ ও 3 ভাগ জল। অতএব, প্রতি ভাগ = 72 কি. গ্রা. ÷ 8 = 9 কি. গ্রা.।

$\therefore$ দুধের পরিমাণ = 9 কি. গ্রা. × 5 = 45 কি. গ্রাম,

এবং জলের পরিমাণ = 72 কি. গ্রা. − 45 কি. গ্রা. = 27 কিলো গ্রাম।

উদাহরণ 6. 48 গ্যালন জল-মিশ্রিত মদে, মদ ও জলের অনুপাত 7 : 5, উহাতে আর কত মদ মিশাইলে মদ ও জলের অনুপাত 3 : 2 হইবে?

প্রথম মিশ্রণে অনুপাত 7 : 5 হওয়ায় 7+5 বা 12 ভাগের মধ্যে 7 ভাগ মদ ও 5 ভাগ জল, অর্থাৎ $\frac{7}{12}$ অংশ মদ ও $\frac{5}{12}$ অংশ জল।

$\therefore$ মদের পরিমাণ = 48 গ্যালন × $\frac{7}{12}$ = 28 গ্যালন,

এবং জলের পরিমাণ = 48 গ্যালন − 28 গ্যালন = 20 গ্যালন।

দ্বিতীয় মিশ্রণে জলের পরিমাণ 20 গ্যালনই আছে, এবং অনুপাত 3 : 2,

সুতরাং $\frac{\text{মোট মদের পরিমাণ}}{\text{জলের পরিমাণ}}=\frac{3}{2}$, $\therefore$ $\frac{\text{মোট মদের পরিমাণ}}{\text{20 গ্যালন}}=\frac{3}{2}$,

$\therefore$ মোট মদের পরিমাণ = $\frac{3}{2}$ × 20 গ্যালন = 30 গ্যালন।

$\therefore$ আরও (30 − 28) বা 2 গ্যালন মদ মিশাইতে হইবে।

প্রশ্নমালা 24

নিম্নলিখিত রাশিগুলির চতুর্থ সমানুপাতী নির্ণয় কর :—

(প্রথম 4টির মুখে মুখে উত্তর কর)

1. 4, 6, 8. **2.** 10, 12, 25. **3.** 33, 22, 18 পয়সা

4. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{8}$. **5.** 5, $7\frac{1}{2}$, 12. **6.** ·12, ·21, 8.

7. 2 টাকা 50 পয়সা, 3 টাকা 20 পয়সা, 25 মিটার।

নিম্নের রাশি দুইটির তৃতীয় সমানুপাতী নির্ণয় কর :—

8. 12, 18. **9.** $3\frac{1}{3}, 3\frac{1}{5}$. **10.** ·16, ·18.

11. 1 ঘণ্টা 20 মিনিট, 1 ঘণ্টা 40 মিনিট।

নিম্নের সমানুপাতী রাশিগুলির মধ্যে লুপ্ত রাশিগুলি নির্ণয় কর :—

12. 12, 16, *, 20. **13.** 4, *, 9, $13\frac{1}{2}$. **14.** 6, 14, *, 35 টা.

নিম্নলিখিত রাশিদ্বয়ের মধ্য-সমানুপাতী নির্ণয় কর :—

15. 25, 81. **16.** $1\frac{4}{7}, 6\frac{2}{7}$. **17.** 1·4 গ্রাম, 5·6 গ্রাম।

18. 13 ও 6-এর যে অনুপাত, 39 ও কোন্ রাশির সেই অনুপাত ?

19. 3 টাকা 60 পয়সা ও 5 টাকা 40 পয়সার যে অনুপাত, 30 মিনিটের সহিত কোন্ রাশির সেই অনুপাত ?

20. 14, 16, 35, 42 কি সমানুপাতী ? যদি না হয়, তবে চতুর্থ রাশি কত হইলে উহারা সমানুপাতী হইবে ?

21. 49 ও কোন একটি রাশির যে অনুপাত, সেই রাশি ও 81-র সেই অনুপাত হইলে ঐ রাশিটি কত ?

22. রাম ও হরির বয়সের অনুপাত 3 : 4, হরি ও যদুর বয়সের অনুপাত 12 : 13 ; রাম ও যদুর বয়সের অনুপাত কত ?

23 ক : খ = 2 : 3, খ : গ = 4 : 7, গ : ঘ = 5 : 6 হইলে ক : ঘ কত ? ক : খ : গ : ঘ কত নির্ণয় কর।

24. ক-এর বয়স খ-এর বয়সের $\frac{3}{4}$ এবং গ-এর বয়স খ-এর বয়সের $1\frac{1}{3}$ গুণ। ক ও গ-এর বয়সের অনুপাত কত ? গ-এর বয়স 30 বৎসর হইলে ক-এর বয়স কত ?

25. 1224 টাকা ক, খ ও গ-কে এরূপে ভাগ করিয়া দাও যেন তাহাদের অংশের অনুপাত 3 : 4 : 5 হয়।

26. দুইটি সংখ্যার অনুপাত 3 : 4 এবং উহাদের ল. সা. গু. 180, সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

27. রামের টাকার $\frac{2}{3}$ অংশ, হরির টাকার $\frac{1}{2}$ অংশের সমান। উহাদের মোট 1400 টাকা থাকিলে, কাহার কত টাকা আছে ?

28. দুইটি সংখ্যার অনুপাত 5 : 8 এবং উভয়ের অন্তর 69 হইলে, সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

29. **ক** ও **খ**-এর বর্তমান বয়সের অনুপাত 4 : 5, 5 বৎসর পরে উহাদের বয়সের অনুপাত 5 : 6 হইবে। উহাদের বর্তমান বয়স কত ?

30. চার বৎসর পূর্বে **ক** ও **খ**-এর বয়সের অনুপাত 11 : 14 ছিল এবং 4 বৎসর পরে তাহাদের বয়সের অনুপাত 13 : 16 হইবে। উহাদের বর্তমান বয়স কত ?

31. **ক** ও **খ**-এর বয়সের সমষ্টি 60 বৎসর। 3 বৎসর পূর্বে তাহাদের বয়সের অনুপাত 4 : 5 ছিল। 3 বৎসর পরে তাহাদের বয়সের অনুপাত কত হইবে ?

32. 35 কি. গ্রাম জল-মিশ্রিত দুগ্ধে দুগ্ধ ও জলের অনুপাত 5 : 2 আছে। উহাতে আর কত জল মিশ্রিত করিলে দুগ্ধ ও জলের অনুপাত 2 : 1 হইবে ?

33. কোন পাত্রে সমপরিমাণে দুধ ও জল মিশাইয়া 4 কি. গ্রা. 2 হে.গ্রা. হইল। উহাতে আর কত দুধ মিশাইলে দুধ ও জলের অনুপাত 4 : 3 হইবে ?

34. কোন চৌকিদার একটি চোরকে ধরিবার জন্য ছুটিল। চৌকিদার যে সময়ে 4 বার পদক্ষেপ করে, চোরটি ততক্ষণে 5 বার পদক্ষেপ করে ; কিন্তু চৌকিদার 6 বার পদক্ষেপে যতদূর যায়, চোর 8 বার পদক্ষেপে ততদূর যায়। উভয়ের গতিবেগের অনুপাত কত ?

সামানুপাতিক ভাগহার

কোন প্রদত্ত রাশিকে কতকগুলি প্রদত্ত সংখ্যার অনুপাতে বিভিন্ন অংশে বিভক্ত করাকে **সামানুপাতিক ভাগহার** (Division into proportional parts) বলা হয়। নিম্নের উদাহরণগুলি দেখ।

উদাহরণ 1. 940 টাকা **ক**, **খ** ও **গ**-কে এরূপে ভাগ করিয়া দাও, যেন **ক**-এর অংশ : **খ**-এর অংশ = 6 : 5 এবং **খ**-এর অংশ : **গ**-এর অংশ = 15 : 14 হয়।

$\frac{\text{ক-এর অংশ}}{\text{খ-এর অংশ}} = 6 : 5 = \frac{6}{5} = \frac{6 \times 3}{5 \times 3} = 18 : 15$, এবং $\frac{\text{খ-এর অংশ}}{\text{গ-এর অংশ}} = 15 : 14$,

∴ **ক**-এর অংশ : **খ**-এর অংশ : **গ**-এর অংশ = 18 : 15 : 14 ;

∴ তাহাদের মোট অংশ = 18 + 15 + 14 = 47

∴ 1 অংশ = 940 টাকা ÷ 47 = 20 টাকা

∴ **ক**-এর অংশ = 20 টাকা × 18 = 360 টাকা
খ-এর অংশ = 20 টাকা × 15 = 300 টাকা
গ-এর অংশ = 20 টাকা × 14 = 280 টাকা } (উত্তর)

[**দ্রষ্টব্য :** দেওয়া আছে **ক** 6 পাইলে **খ** 5 পায় এবং **খ** 15 পাইলে **গ** 14 পায়। তিনজনের একত্রে অনুপাত পাইবার জন্য দুই অনুপাতে **খ**-এর ভাগ সমান করিতে হইবে। ∴ প্রথম অনুপাতে **খ**-এর 5×3 বা 15 করা হইয়াছে, ইহাতে দুই অনুপাতে **খ**-এর অংশ সমান হইল। এখন দেখ, প্রথম অনুপাতে **খ**-এর অংশের 3 গুণ করা হইয়াছে বলিয়া **ক**-এর অংশকে 3 গুণ করা হইয়াছে। এখন দেখা গেল, ক 18 ভাগ পাইলে, খ পাইবে 15 ভাগ এবং **খ** 15 ভাগ পাইলে **গ** পাইবে 14 ভাগ।

অতএব, **ক**-এর অংশ : **খ**-এর অংশ : **গ**-এর অংশ $=18:15:14$ হইল।]

উদাহরণ 2. 800টি আম 4 জন পুরুষ, 10 জন স্ত্রীলোক ও 16 জন বালকের মধ্যে এরূপে ভাগ করিয়া দাও যেন প্রত্যেক পুরুষের অংশের $\frac{1}{3}$, প্রত্যেক স্ত্রীলোকের অংশের $\frac{1}{2}$ এবং প্রত্যেক বালকের অংশের $\frac{3}{4}$ সমান হয়।

1 জন স্ত্রীলোকের অংশের $\frac{1}{2}=1$ জন পুরুষের অংশের $\frac{1}{3}$,

∴ 1 জন স্ত্রীলোকের অংশ $=1$ জন পুরুষের অংশের $\frac{2}{3}$;

আবার, 1 জন বালকের অংশের $\frac{3}{4}=1$ জন পুরুষের অংশের $\frac{1}{3}$

∴ 1 জন বালকের অংশ $=1$ জন পুরুষের অংশের $\frac{1}{3}\times\frac{4}{3}$ বা $\frac{4}{9}$;

∴ 1 জন পুরুষের অংশ : 1 জন স্ত্রীলোকের অংশ : 1 জন বালকের অংশ $=1:\frac{2}{3}:\frac{4}{9}=9:6:4$ [প্রত্যেক অনুপাতকে 9 গুণ করিয়া]

∴ 4 জন পুরুষের অংশ : 10 জন স্ত্রীলোকের অংশ : 16 জন বালকের অংশ $=36:60:64$.

এক্ষণে, $36+60+64=160$; 800 আম $\div160=5$টি আম

অতএব, প্রত্যেক পুরুষ পাইবে 5×9 বা 45টি আম
" স্ত্রীলোক " 5×6 বা 30টি "
" বালক " 5×4 বা 20টি " } (উত্তর)

উদাহরণ 3. কতকগুলি রূপয়া, 50 পয়সা ও 25 পয়সা মুদ্রায় মিলিয়া মোট 93 টাকা 75 পয়সা হইল। ঐ মুদ্রাগুলির সংখ্যার অনুপাত $3:4:5$ হইলে কোন্ মুদ্রা কয়টি আছে ?

টাকার সংখ্যা : 50 পয়সা মুদ্রার সংখ্যা : 25 পয়সা মুদ্রার সংখ্যা $=3:4:5$;

∴ টাকাগুলির মূল্য : 50 পয়সা মুদ্রাগুলির মূল্য : 25 পয়সা মুদ্রাগুলির মূল্য
$=3$টি টাকা : 4টি 50 পয়সা : 5টি 25 পয়সা
$=12$টি 25 প. : 8টি 25 প. : 5টি 25 প. $=12:8:5$.

এক্ষণে, $12+8+5=25$, এবং 93 টাকা 75 পয়সা $=\frac{375}{4}$ টাকা।

∴ টাকাগুলির মূল্য $=\frac{375}{4\times25}$ টা. $\times 12=45$ টাকা,

∴ টাকার মোট সংখ্যা $=45$.

50 পয়সা মুদ্রাগুলির মূল্য $=\frac{375}{4\times25}$ টা. $\times 8=30$ টাকা,

∴ 50 পয়সা মুদ্রার মোট সংখ্যা $=30\times2=60$.

আবার 25 পয়সা মুদ্রাগুলির মূল্য $=\frac{375}{4\times25}$ টা. $\times 5=\frac{75}{4}$ টাকা,

∴ 25 পয়সা মুদ্রার মোট সংখ্যা $=\frac{75}{4}\times4=75$.

উদাহরণ 4. 50 পয়সা, 25 পয়সা ও 10 পয়সা মুদ্রায় মোট 240টি মুদ্রা আছে। যদি উহাদের মূল্যের অনুপাত 5 : 3 : 1 হয়, তবে কোন্ মুদ্রা কয়টি আছে?

মুদ্রাগুলির মূল্যের অনুপাত $=5:3:1=5$ টা. : 3 টা. : 1 টা.

∴ উহাদের সংখ্যার অনুপাত $=10:12:10$

[কারণ, 5 টাকা = 10টি 50 পয়সা মুদ্রা, 3 টাকা = 12 টি 25 পয়সা মুদ্রা, 1 টাকা = 10টি 10 পয়সা মুদ্রা।] $10+12+10=32$

∴ 50 পয়সা মুদ্রার সংখ্যা $=240\times\frac{10}{32}=75$
25 পয়সা মুদ্রার সংখ্যা $=240\times\frac{12}{32}=90$
10 পয়সা মুদ্রার সংখ্যা $=240\times\frac{10}{32}=75$ } (উত্তর)।

উদাহরণ 5. একজন পুরুষ 4 দিন, একজন স্ত্রীলোক 6 দিন এবং একটি বালক 5 দিন কাজ করিয়া কোন কার্য সম্পন্ন করিল এবং তিনজনে মোট 66 টাকা মজুরী পাইল। যদি তাহাদের প্রতি দিনের কাজের অনুপাত $\frac{1}{3}:\frac{1}{4}:\frac{1}{6}$ হয়, তবে কে কত টাকা মজুরী পাইবে?

পুরুষের 4 দিনের কাজ : স্ত্রীলোকের 6 দিনের কাজ : বালকের 5 দিনের কাজ $=4\times\frac{1}{3}:6\times\frac{1}{4}:5\times\frac{1}{6}=\frac{4}{3}:\frac{6}{4}:\frac{5}{6}=16:18:10$ [হরগুলির ল. সা. গু. 12 দ্বারা গুণ করিয়া]।

এক্ষণে, $16+18+10=44$; 66 টাকা $\div 44=1$ টা. 50 পয়সা

∴ পুরুষের মজুরী = 1 টাকা 50 পয়সা × 16 = 24 টাকা
স্ত্রীলোকের „ = 1 টাকা 50 পয়সা × 18 = 27 টাকা
এবং বালকের „ = 1 টাকা 50 পয়সা × 10 = 15 টাকা } (উত্তর)।

প্রশ্নমালা 25

1. (i) এক গোয়ালা 8 : 3 অনুপাতে দুধের সহিত জল মিশাইয়া মোট 33 কিলোলিটার মিশ্রিত দুধ বিক্রয় করিল। সে কত জল মিশাইয়াছিল?

(ii) 3 : 4 : 5 অনুপাতে কত টাকা 3 জনকে ভাগ করিয়া দিলে তৃতীয় ব্যক্তি 10 টাকা পাইবে?

2. 750কে এরূপ 3 অংশে বিভক্ত কর, যেন তাহাদের অনুপাত 4 : 5 : 6 হয়।

3. 340 টাকা ক, খ ও গ-কে এরূপে ভাগ করিয়া দাও, যেন তাহাদের অংশগুলি 2, 5 ও $1\frac{1}{2}$এর আনুপাতিক হয়।

4. বারুদ প্রস্তুত করিতে 15 ভাগ কয়লা, 10 ভাগ গন্ধক এবং 75 ভাগ সোরা লাগে ; 1 কিলোগ্রাম বারুদ প্রস্তুত করিতে কোন্ দ্রব্য কতটা লাগিবে ?

5. কতকগুলি আম রাম, হরি ও যদুর মধ্যে 4 : 3 : 5 অনুপাতে ভাগ করিয়া দেওয়া হইল। হরি অপেক্ষা যদু 60টি আম বেশী পাইলে মোট আমের সংখ্যা কত ?

6. 350 টাকা ক, খ ও গ-কে এরূপে ভাগ করিয়া দাও, যেন ক ও খ-এর অংশের অনুপাত 2 : 3 এবং খ ও গ-এর অংশের অনুপাত 4 : 5 হয়।

7. 450 টাকা ক, খ ও গ-কে এরূপে ভাগ করিয়া দাও, যেন ক 7 টাকা পাইলে, খ 5 টাকা ও গ 3 টাকা পায়।

8. তিনজন লোক একত্রে ব্যবসা করিয়া 1180 টাকা লাভ করিল। যদি উহাদের মূলধনের অনুপাত $\frac{1}{5} : \frac{1}{6} : \frac{1}{8}$ হয়, তবে লাভের অংশ কে কত টাকা পাইবে ?

9. ক্রিকেট খেলায় নাইডু, অমরনাথ ও হাজারী মোট 342 রাণ করিল। নাইডু ও অমরনাথের এবং অমরনাথ ও হাজারীর রাণের অনুপাত 3 : 2 হইলে, কে কত রাণ করিয়াছে ?

10. তিন ব্যক্তি লটারীতে মোট 13400 টাকা পাইল। যদি প্রথম ব্যক্তির টাকার $\frac{1}{4}$, দ্বিতীয়ের টাকার $\frac{2}{3}$ এবং তৃতীয়ের টাকার $\frac{5}{8}$ অংশ সমান হয়, তবে কে কত টাকা পাইয়াছে ?

11. একটি ব্যাগে মোট 112 টাকা 50 পয়সা মূল্যের টাকা, 50 পয়সা মুদ্রা ও 25 পয়সা মুদ্রা আছে ; উহাদের সংখ্যার অনুপাত 8 : 5 : 3 হইলে, কোন্ মুদ্রা কয়টি আছে ?

12. 400 টাকা ক, খ ও গ-কে এরূপে ভাগ করিয়া দাও যেন ক 7 টাকা পাইলে খ 8 টাকা পায় এবং খ 4 টাকা পাইলে গ 5 টাকা পায়।

13. কোন চতুর্ভুজের বাহুগুলির অনুপাত 3 : 4 : 5 : 6 এবং উহার পরিসীমা 72 সেন্টিমিটার হইলে, বৃহত্তম বাহুর দৈর্ঘ্য কত ?

14. টাকা, 50 পয়সা ও 25 পয়সা এই তিন প্রকার মুদ্রা মিলিয়া মোট 240 টাকা আছে। যদি উহাদের মূল্যের অনুপাত 3 : 4 : 5 হয়, তবে কোন্ মুদ্রা কয়টি আছে ?

15. কোন ত্রিভুজের বাহুত্রয় 7, 9 ও 12-র সমানুপাতী এবং উহার বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম বাহুর অন্তর 15 সেন্টিমিটার। বৃহত্তম বাহুর দৈর্ঘ্য কত ?

16. তিন জন লোকের বয়সের সমষ্টি 150 বৎসর। 10 বৎসর পূর্বে উহাদের বয়সের অনুপাত ছিল 7 : 8 : 9 ; বর্তমানে প্রত্যেকের বয়স কত ?

17. কত টাকাকে 3·4, 5·7 ও 4·9-এর আনুপাতিক অংশে বিভক্ত করিলে ক্ষুদ্রতম অংশের পরিমাণ 170 টাকা হইবে ?

18. তিন জন বালকের মধ্যে কেবল প্রথম বালকের 4 খানি এবং দ্বিতীয় বালকের 3 খানি পাউরুটি ছিল। তাহারা 3 জনে সমস্ত রুটি সমান ভাগ করিয়া খাইল। তৃতীয় বালক যদি তাহার অংশের রুটির মূল্য 21 পয়সা দেয়, তবে অন্য বালক দুইটি উহা কিরূপে ভাগ করিয়া লইবে ?

19. ক, খ ও গ-কে 870 টাকা এরূপে ভাগ করিয়া দাও যেন ক-এর অংশের ·5 = খ-এর অংশের ·6 = গ-এর অংশের ·75 হয়। [ঢা. প্র. 1924]

20. 3 জন পুরুষ, 5 জন স্ত্রীলোক এবং 8 জন বালকের মধ্যে 500 টাকা এরূপে ভাগ করিয়া দাও যেন প্রত্যেক পুরুষ 37·5 পয়সা পাইলে প্রত্যেক স্ত্রীলোক 25 পয়সা এবং প্রত্যেক বালক 9·375 পয়সা পায়।

21. 5 জন পুরুষ, 6 জন স্ত্রীলোক ও 7 জন বালক 5 দিনে একটি কাজ শেষ করিয়া 51 টা. 25 প. মজুরী পাইল। 1 জন পুরুষ, 1 জন স্ত্রীলোক ও 1 জন বালকের দৈনিক কাজের পরিমাণ $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4}$ অনুপাতে হইলে, প্রত্যেকে কত মজুরী পাইবে ?

*22. তিন প্রকার পদার্থের আয়তনের অনুপাত 3 : 4 : 7 এবং সম-আয়তনের ঐ পদার্থত্রয়ের ওজনের অনুপাত 5 : 2 : 6. ঐ পদার্থ তিনটি মিশ্রিত করিলে 52 কিলোগ্রাম মিশ্রিত পদার্থে তৃতীয় পদার্থের ওজন কত হইবে ?

সম্ভূয় সমুত্থান

একাধিক ব্যক্তি স্ব স্ব মূলধন দিয়া যদি এক সঙ্গে মিলিয়া কোন ব্যবসায় করে, তবে সেই ব্যবসায়কে যৌথ ব্যবসায় বলে। আর যাহাদের মূলধনে ঐ ব্যবসায় চলে, তাহাদিগের প্রত্যেককে ঐ ব্যবসায়ের **অংশীদার** (Fellow বা Partner) বলে। এইরূপ কোন ব্যবসায়ে যে লাভ বা ক্ষতি হয় তাহা অংশীদারদিগের মধ্যে বণ্টন করিয়া দিবার প্রণালীকে **সম্ভূয় সমুত্থান** (Partnership বা Fellowship) বলে।

সরল (Simple) ও **মিশ্র** (Compound) এই দুই প্রকারের সম্ভূয় সমুত্থান আছে।

যদি কোন যৌথ ব্যবসায়ে সকল অংশীদারের মূলধনই একই সময়ের জন্য নিয়োজিত হইয়া থাকে, তাহা হইলে স্ব স্ব নিয়োজিত মূলধনের অনুপাতে লাভ বা ক্ষতির অংশ বণ্টন করা হইয়া থাকে। এইরূপ বণ্টন-প্রণালীকে **সরল সম্ভূয় সমুত্থান** বলা হয়।

যদি বিভিন্ন অংশীদারের মূলধন বিভিন্ন সময়ের জন্য কোন ব্যবসায়ে নিয়োজিত হইয়া থাকে, তাহা হইলে লাভ বা ক্ষতির অংশ বণ্টন করিবার সময় যে সময়ের জন্য এক এক জনের মূলধন খাটিয়াছে সেই সময়কেও হিসাবের মধ্যে ধরিতে হইবে। এরূপ ক্ষেত্রে প্রত্যেকের মূলধন ও সময়ের গুণফলের অনুপাতে অংশীদারগণের লাভ বা ক্ষতির অনুপাত হইবে। এইভাবে লাভ বা ক্ষতির বণ্টন-প্রণালীকে **মিশ্র সম্ভূয় সমুত্থান** বলা হয়। এই বণ্টন-প্রণালী যে সামানুপাতিক ভাগহারের অনুরূপ তাহা বুঝা যাইতেছে।

উদাহরণ 1. রাম ও হরি যথাক্রমে 1200 টাকা ও 800 টাকা দিয়া একত্র ব্যবসা করিয়া এক বৎসরে 300 টাকা লাভ করিল। লাভের টাকা কে কত পাইবে ?

রামের মূলধন : হরির মূলধন $= 1200 : 800 = 3 : 2$;

$3+2=5$;

$\therefore$ রামের লভ্যাংশ $=300$ টা. $\times \frac{3}{5} = 180$ টাকা

এবং হরির লভ্যাংশ $= 300$ টা. $\times \frac{2}{5} = 120$ টাকা।

উদাহরণ 2. 1950 সালের 1লা জানুয়ারী **ক** কোন ব্যবসায়ে 800 টাকা, 1লা মে **খ** উহাতে 600 টাকা এবং 1লা জুলাই **গ** 500 টাকা খাটাইল। যদি ঐ বৎসরে মোট 348 টাকা লাভ হইয়া থাকে, তবে লাভের অংশ কে কত পাইবে ?

এখানে **ক**-এর টাকা 12 মাস, **খ**-এর টাকা 8 মাস এবং **গ**-এর টাকা 6 মাস খাটিয়াছে।

অতএব, **ক**-এর অংশ : **খ**-এর অংশ : **গ**-এর অংশ

$= 800 \times 12 : 600 \times 8 : 500 \times 6 = 9600 : 4800 : 3000$

$= 16 : 8 : 5.$ $\quad 16+8+5=29.$

$\therefore$ **ক**-এর লভ্যাংশ $= \overset{12}{\cancel{348}}$ টাকা $\times \frac{16}{\cancel{29}} = 192$ টাকা,

খ " " $= 348$ টাকা $\times \frac{8}{29} = 96$ টাকা,

এবং **গ** " " $= 348$ টাকা $\times \frac{5}{29} = 60$ টাকা।

প্রশ্নমালা 26

1. কোন ব্যবসায়ে তিন জন অংশীদারের মূলধন যথাক্রমে 713 টা. 15 পয়সা, 964 টা. 85 পয়সা ও 2391 টা. 15 পয়সা। উহাতে 2231 টাকা লাভ হইলে, লভ্যাংশ অংশীদারগণ কে কত পাইবে ?

2. ক ও খ যথাক্রমে 600 ও 750 টাকা কোন ব্যবসায়ে নিয়োজিত করিল। এক বৎসরে যদি 72 টাকা ক্ষতি হইয়া থাকে, তবে ক্ষতির পরিমাণ কাহার কত হইবে ?

3. **ক**, **খ** ও **গ** একত্রে 1500 টাকা লইয়া কোন ব্যবসায় করিল এবং বৎসরান্তে **ক** 80 টাকা, **খ** 100 টাকা ও **গ** 120 টাকা লাভ পাইল। কে কত মূলধন দিয়াছিল ?

4. **ক** ও **খ** যৌথ ব্যবসায়ে 150 টাকা লাভ করিল। যদি **ক**-এর মূলধন 600 টাকা ও লভ্যাংশ 90 টাকা হয়, তবে **খ**-এর মূলধন কত ?

5. তিন ব্যক্তি একত্রে ব্যবসায় করিল। তাহাদের মূলধনের অনুপাত 3 : 8 : 5 ছিল এবং তৃতীয় ব্যক্তি অপেক্ষা প্রথম ব্যক্তি 60 টাকা কম লাভ পাইল। ঐ ব্যবসায়ে মোট কত লাভ হইয়াছিল ?

6. **ক**, **খ** ও **গ** কোন যৌথ ব্যবসায় করিয়া 1000 টাকা লাভ করিল। যদি **ক** ও **খ**-এর মূলধনের অনুপাত 2 : 3 এবং **খ** ও **গ**-এর মূলধনের অনুপাত 2 : 5 হয়, তবে লাভের টাকা কে কত পাইবে ? [ক. প্র. 1932]

7. **ক** 500 টাকা লইয়া কোন ব্যবসায় আরম্ভ করিল। 3 মাস পরে **খ** এবং 5 মাস পরে **গ** ঐ ব্যবসায়ে যোগ দিল। যদি **খ** 600 টাকা এবং **গ** 800 টাকা মূলধন দিয়া থাকে এবং বৎসরান্তে মোট 340 টাকা লাভ হয়, তাহা হইলে লভ্যাংশ কে কত পাইবে ?

8. **ক**, **খ**, **গ** ও **ঘ** একটি যৌথ ব্যবসায় আরম্ভ করিল। 1লা জানুয়ারী **ক** 1200 টাকা, 1লা এপ্রিল **খ** 1500 টাকা, 1লা জুলাই **গ** 1800 টাকা এবং 1লা অক্টোবর **ঘ** 2100 টাকা মূলধন দিল। বৎসরান্তে 900 টাকা লাভ হইলে, কে কত লাভ পাইবে ? [ঢা. বো. 1932]

9. **ক**, **খ** ও **গ** একত্রে এক ব্যবসায় আরম্ভ করিল। **ক** 3 মাসের জন্য 9100 টাকা, **খ** 2 মাসের জন্য 6825 টাকা এবং **গ** 5 মাসের জন্য 8190 টাকা খাটাইল। তাহাদের মোট 4158 টাকা লাভ হইলে, লাভের টাকা কে কত পাইবে ? [প. প্র. 1930]

10. **ক** ও **খ** যথাক্রমে 3000 ও 4500 টাকা দিয়া একটি ব্যবসায় আরম্ভ করিল। **ক** 8 মাস পরে আরও 2500 টাকা দিল এবং আরও 7 মাস পরে মোট 520 টাকা লাভ হইল। লভ্যাংশ কে কত পাইবে ? [প. প্র. 1926]

11. **ক** 300 টাকা এবং **খ** 500 টাকা মূলধন দিয়া একত্রে ব্যবসায় আরম্ভ করিল। 6 মাস পরে **ক** আরও 400 টাকা দিল, কিন্তু **খ** 100 টাকা তুলিয়া লইল। এক বৎসর ব্যবসায় করিয়া যদি 61 টাকা 75 পয়সা লাভ হইয়া থাকে, তবে কে কত লভ্যাংশ পাইবে ?

12. একটি যৌথ ব্যবসায়ে **ক**, **খ** ও **গ**-এর মূলধনের অনুপাত $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4}$ ছিল। 4 মাস পরে **ক** তাহার অর্ধেক মূলধন তুলিয়া লইল এবং তাহার 8 মাস পরে মোট 2024 টাকা লাভ হইল। **ক**-এর লাভের পরিমাণ নির্ণয় কর। [পা. প্র. 1910]

*13. ক ও খ এক ব্যবসায় আরম্ভ করিল। ক 500 টাকা 9 মাসের জন্য এবং খ তাহার মূলধন 6 মাসের জন্য ঐ ব্যবসায়ে নিয়োজিত করিল। উহাতে মোট 69 টাকা লাভ হইল এবং খ 46 টাকা লাভ পাইল। তাহার মূলধন কত ছিল? [বো. প্র. 1925]

*14. এক যৌথ ব্যবসায়ে খ-এর মূলধন ক-এর মূলধনের দেড়গুণ ছিল। 8 মাস পরে খ তাহার মূলধনের অর্ধাংশ এবং আরও 2 মাস পরে ক তাহার মূলধনের এক-চতুর্থাংশ তুলিয়া লইল। বৎসরান্তে 530 টাকা লাভ হইলে, কে কত লভ্যাংশ পাইবে? [সি. সা.]

*15. কোন ব্যবসায়ে ক 1800 টাকা এবং খ 9 মাসের জন্য 1000 টাকা খাটাইল। উভয়ের লাভের অংশ সমান হইলে ক-এর টাকা কত সময়ের জন্য খাটান হইয়াছিল?

*16. ক, খ ও গ যথাক্রমে 600 টাকা, 800 টাকা ও 900 টাকা দিয়া যৌথ ব্যবসায় আরম্ভ করিল। কয়েক মাস পরে ক আরও 300 টাকা উহাতে নিয়োজিত করিল। বৎসরান্তে মোট 300 টাকা লাভ হইল এবং গ 108 টাকা লভ্যাংশ পাইল। ক 300 টাকা কখন দিয়াছিল?

মিশ্রণ (Alligation or Mixture)

বিভিন্ন পরিমাণে বিভিন্ন মূল্যের দ্রব্য মিশ্রিত বা একত্র করিয়া এক নূতন প্রকারের দ্রব্য প্রস্তুত করাকে **মিশ্রণ** বলে।

প্রত্যেক বস্তুর মূল্য ও পরিমাণ বলা থাকিলে উহাদের মিশ্রণে উৎপন্ন দ্রব্যের মূল্য নির্ণয় করা যায়। এই মূল্যকে **পড়তা** বলে। এই পড়তা ও বিভিন্ন দ্রব্যগুলির গড়মূল্য একই।

আবার, বিভিন্ন মূল্যের বিভিন্ন দ্রব্য কি অনুপাতে মিশাইলে নির্দিষ্ট মূল্যের মিশ্রিত দ্রব্য উৎপন্ন হইবে, তাহাও নির্ণয় করা যায়। নিম্নের উদাহরণগুলি দেখ।

উদাহরণ 1. প্রতি কিলো গ্রাম 4 টাকা 5 পয়সা দরের চায়ের সহিত প্রতি কিলো গ্রাম 4 টাকা 21 পয়সা দরের চা কি অনুপাতে মিশ্রিত করিলে মিশ্রিত চায়ের প্রতি কিলোগ্রামের মূল্য 4 টাকা 9 পয়সা হইবে?

প্রথম প্রকারের 1 কি. গ্রাম চায়ের মূল্য 1 কি. গ্রা. মিশ্রিত চায়ের মূল্য অপেক্ষা (4 টাকা 9 প. – 4 টা. 5 প.) বা 4 পয়সা কম।

∴ প্রতি কিলোগ্রাম চায়ে 4 পয়সা লাভ।

আবার, দ্বিতীয় প্রকারের 1 কি. গ্রাম চায়ের মূল্য 1 কি. গ্রাম মিশ্রিত চায়ের মূল্য অপেক্ষা (4 টা. 21 প. – 4 টা. 9 প.) বা 12 পয়সা বেশী।

∴ প্রতি কিলো গ্রাম চায়ে 12 পয়সা ক্ষতি।

এক্ষণে, উভয় প্রকারের চা এরূপে মিশাইতে হইবে, যেন প্রথম পক্ষের লাভ ও দ্বিতীয় পক্ষের ক্ষতি সমান হয়।

∴ উভয়ের অনুপাত 4 ও 12-র **ব্যস্ত অনুপাত** হইবে।

∴ নির্ণেয় অনুপাত $= 12 : 4 = 3 : 1$.

উদাহরণ 2. 107 টাকা কুইণ্টাল দরের চিনির সহিত 106 টাকা কুইণ্টাল দরের চিনি কি অনুপাতে মিশাইয়া মিশ্রিত চিনি 120 টাকা কুইণ্টাল দরে বিক্রয় করিলে $12\frac{1}{2}\%$ লাভ হইবে?

মিশ্রিত চিনি 120 টাকা কুইণ্টাল দরে বিক্রয় করিলে $12\frac{1}{2}\%$ লাভ হয়, স্বতরাং উহার প্রতি কুইণ্টালের আসল মূল্য $= \frac{100}{112\frac{1}{2}} \times 120$টা. $= 106\frac{2}{3}$ টাকা।

এক্ষণে, প্রথম প্রকারের 1 কুইণ্টাল চিনির মূল্য 1 কুইণ্টাল মিশ্রিত চিনির ক্রয়মূল্য অপেক্ষা (107 টা. $-$ $106\frac{2}{3}$ টা.) বা $\frac{1}{3}$ টাকা বেশী।

দ্বিতীয় প্রকারের 1 কুইণ্টাল চিনির মূল্য 1 কুইণ্টাল মিশ্রিত চিনির ক্রয়-মূল্য অপেক্ষা ($106\frac{2}{3}$ টা. $-$ 106 টা.) বা $\frac{2}{3}$ টাকা কম।

∴ নির্ণেয় মিশ্রণের অনুপাত $= \frac{2}{3} : \frac{1}{3} = 2 : 1$.

তরল পদার্থের মিশ্রণ

উদাহরণ 3. সম-আয়তনের দুইটি গ্লাসে যথাক্রমে $\frac{1}{5}$ ও $\frac{1}{6}$ অংশ দুগ্ধ ছিল। পরে প্রত্যেক গ্লাস জল দ্বারা পূর্ণ করিয়া একটি বড় পাত্রে গ্লাস দুইটির মিশ্রিত দুগ্ধ ঢালা হইল। এখন দুগ্ধ ও জলের অনুপাত কত হইল?

প্রথম পাত্রের $\frac{1}{5}$ অংশ দুধ, স্বতরাং $(1-\frac{1}{5})$ বা $\frac{4}{5}$ অংশ জল,

দ্বিতীয় " $\frac{1}{6}$ " " " $(1-\frac{1}{6})$ বা $\frac{5}{6}$ অংশ জল।

∴ তৃতীয় পাত্রে $(\frac{1}{5}+\frac{1}{6})$ বা $\frac{11}{30}$ অংশ দুধ এবং $(\frac{4}{5}+\frac{5}{6})$ বা $\frac{49}{30}$ অংশ জল।

∴ নির্ণেয় অনুপাত $= \frac{11}{30} : \frac{49}{30} = 11 : 49$.

উদাহরণ 4. একটি পূর্ণ পাত্রে 3 ভাগ দুধ ও 1 ভাগ জল মিশ্রিত ছিল। ঐ মিশ্রিত দুগ্ধের কত অংশ তুলিয়া লইয়া সেই পরিমাণ জল ঢালিলে ঐ পাত্রে অর্ধেক দুধ ও অর্ধেক জল হইবে?

প্রথমে মিশ্রিত দুধে 3 ভাগ দুধ ও 1 ভাগ জল ছিল অর্থাৎ $(3+1)$ বা 4 ভাগে 3 ভাগ দুধ ও 1 ভাগ জল ছিল, স্বতরাং উহার $\frac{3}{4}$ অংশ দুধ ও $\frac{1}{4}$ অংশ জল ছিল। পরে $\frac{3}{4}$ অংশ দুধের স্থলে $\frac{1}{2}$ অংশ দুধ হইবে; স্বতরাং দুধের অংশ $(\frac{3}{4}-\frac{1}{2})$ বা $\frac{1}{4}$ কমাইতে হইবে।

এখন দেখ, $\frac{1}{4}$ অংশ দুধ কমাইতে ঐ মিশ্রিত পদার্থ কতটুকু তুলিয়া লইতে হইবে।

$\frac{3}{4}$ অংশ দুধ আছে সমস্ত মিশ্রিত দুধে

$\therefore$ 1 " " " $\frac{4}{3}$ ভাগ " "

$\therefore$ $\frac{1}{4}$ " " " $\frac{4}{3} \times \frac{1}{4}$ বা $\frac{1}{3}$ অংশ মিশ্রিত দুধে।

অতএব, ঐ মিশ্রিত দুধের $\frac{1}{3}$ অংশ তুলিয়া লইয়া ঐ পরিমাণ জল মিশাইতে হইবে।

উদাহরণ 5. 72 কিলো লিটার জলমিশ্রিত সিরাপে সিরাপ ও জলের অনুপাত 11 : 1 ; উহাতে আর কত কিলো লিটার জল ঢালিলে সিরাপ ও জলের অনুপাত 9 : 1 হইবে ?

[**দ্রষ্টব্য :** এই প্রকার অঙ্ক কষিবার সময় যে দ্রব্যের পরিমাণ পরিবর্তিত হয় নাই তাহা ধরিয়া কষাই সুবিধাজনক।]

প্রথম মিশ্রণে সিরাপের পরিমাণ = সমস্ত পদার্থের $\frac{11}{11+1}$ বা $\frac{11}{12}$ অংশ

$= 72$ কি. লি. $\times \frac{11}{12} = 66$ কিলো লিটার

দ্বিতীয় মিশ্রণে সিরাপের পরিমাণ সমস্ত পদার্থের $\frac{9}{9+1}$ বা $\frac{9}{10}$ অংশ। দ্বিতীয় মিশ্রণেও সিরাপ 66 কি. লি. থাকায় সমস্ত পরিমাণের $\frac{9}{10}$ অংশ = 66 কি. লি.

$\therefore$ সমস্ত পদার্থ = $\frac{66 \times 10}{9}$ কি. লি. = $73\frac{1}{3}$ কি. লি.

$\therefore$ $(73\frac{1}{3} - 72)$ বা $1\frac{1}{3}$ কিলো লিটার জল মিশাইতে হইবে।

প্রশ্নমালা 27

1. 36 টাকা ও 41 টাকা কুইণ্টাল দরের দুই প্রকার চিনি 2 : 3 অনুপাতে মিশাইলে প্রতি কুইণ্টাল মিশ্রিত চিনির মূল্য কত হইবে ?

2. এক ব্যক্তি 4 টাকা 12 পয়সা কিলোগ্রাম দরে 6 কি. গ্রাম ও 5 টাকা 22 পয়সা কি. গ্রাম দরে 5 কিলো গ্রাম চা ক্রয় করিয়া মিশ্রিত করিল। মিশ্রিত চা কি দরে বিক্রয় করিলে তাহার $12\frac{1}{2}\%$ লাভ হইবে ?

3. এক গোয়ালা 37 পয়সা ও 50 পয়সা লিটার দরের দুই প্রকার দুগ্ধ 2 : 3 অনুপাতে মিশাইল। উহা প্রতি লিটার কি দরে বিক্রয় করিলে তাহার 25% লাভ হইবে ?

4. এক কি. লি. দুগ্ধে 2 হে. লি. 5 ডে. লি. হিসাবে জল মিশাইয়া এক ব্যক্তি এক কি. লি. দুগ্ধের ক্রয়মূল্যে প্রতি কি. লি. মিশ্রিত দুগ্ধ বিক্রয় করিল ; ইহাতে তাহার শতকরা কত লাভ হইবে ?

5. 2 : 8 অনুপাতে দুই প্রকার গম মিশ্রিত করায় প্রতি কুইণ্টালের মূল্য 80 টাকা 12 পয়সা হইল। এক কুইণ্টাল প্রথম প্রকার গমের মূল্য 80 টাকা 60 পয়সা হইলে, দ্বিতীয় প্রকার গমের প্রতি কুইণ্টালের মূল্য কত ?

6. 3 : 5 অনুপাতে দুই প্রকার মদ্য মিশ্রিত করায় প্রতি লিটারের মূল্য 1 টা. 19 পয়সা হইল। প্রতি লিটার প্রথম প্রকার মদ্যের মূল্য 1 টা. 9 পয়সা হইলে, দ্বিতীয় প্রকারের প্রতি লিটার মদ্যের মূল্য কত ?

7. প্রতি কুইন্টাল 180 টাকা ও 250 টাকা দরের দুই প্রকার চিনি কি অনুপাতে মিশাইলে মিশ্রিত চিনির প্রতি কুইন্টালের মূল্য 220 টাকা হইবে ?

8. 72 পয়সা কিলোগ্রাম দরের চিনির সহিত 48 পয়সা কিলোগ্রাম দরের চিনি কি অনুপাতে মিশাইয়া মিশ্রিত চিনি 63 পয়সা কিলোগ্রাম দরে বিক্রয় করিয়া $16\frac{2}{3}\%$ লাভ হইবে ?

9. দুইটি সমান আয়তনের পাত্রের যথাক্রমে $\frac{1}{3}$ ও $\frac{1}{4}$ অংশ দুগ্ধপূর্ণ ছিল। উহাদিগের অবশিষ্টাংশ জলপূর্ণ করিয়া অপর একটি পাত্রে সমগ্র জলমিশ্রিত দুগ্ধ ঢালা হইল। নূতন পাত্রে দুগ্ধ ও জলের অনুপাত নির্ণয় কর।

10. একটি পাত্রে 3 ভাগ জল ও 5 ভাগ সিরাপ মিশ্রিত করা আছে। ঐ মিশ্রণের কত অংশ তুলিয়া লইয়া সেই পরিমাণ জল ঢালিয়া দিলে জল ও সিরাপের পরিমাণ সমান হইবে ? [মা. 1924 ; ব. প্র.]

11. একটি পিপায় 65 মিরিয়া লিটার জল-মিশ্রিত মদ্য ছিল এবং উহাতে মদ্য ও জলের অনুপাত 10 : 3 ছিল। উহাতে আর কত মিরিয়া লিটার জল মিশ্রিত করিলে মদ্য ও জলের অনুপাত 8 : 5 হইবে ?

12. একটি পাত্রে 3 ভাগ দুধ ও 1 ভাগ জল আছে। ঐ জল-মিশ্রিত দুধের কতটুকু তুলিয়া লইয়া তাহার পরিবর্তে জল ঢালিলে, অর্ধেক দুধ ও অর্ধেক জল হইবে ? [যু. প্র. 1911]

ঐকিক নিয়ম (Unitary Method)

ঐকিক নিয়ম তোমরা পূর্বে শিখিয়াছ। ঐ বিষয়ে এস্থানে আরও কিছু আলোচনা করা হইতেছে।

আয়কর (Income tax) : প্রত্যেক ব্যক্তিকে, ব্যবসায়ীকে বা যৌথ পরিবারকে আয়ের উপর কিছু কর দিতে হয়। ইহাকে আয়কর বলে। দেশের গভর্ণমেণ্ট এই কর ধার্য ও আদায় করেন। আয়ের উপর প্রতি টাকায় কোন নির্দিষ্ট হারে এই কর ধার্য করা হয়। যথা, টাকা প্রতি 4 পয়সা, প্রতি পাউণ্ডে 3 পেন্স ইত্যাদি।

গভর্ণমেণ্ট প্রত্যেকের মোট আয়ের কতকটা ছাড়িয়া দিয়া বাকি আয়ের উপর নির্দিষ্ট হারে আয়কর ধার্য করেন। মনে কর 3000 টাকা পর্যন্ত আয় ছাড়িয়া দেওয়া হয়। এখন কোন ব্যক্তির আয় যদি 2000 টাকা হয় (অর্থাৎ 3000 টাকার কম হয়) তবে তাহাকে আয়কর দিতে হইবে না, কিন্তু তাহার আয় যদি 5000 টাকা হয়, তবে তাহাকে (5000 – 3000) বা 2000 টাকার উপর নির্দিষ্ট হারে আয়কর দিতে হইবে।

আয়ের পরিমাণ অনুসারে আয়করের হার ক্রমশঃ বেশী হইয়া থাকে। গভর্ণমেণ্ট এই হারগুলি নিধারিত করিয়া একটি তালিকা (schedule) প্রস্তুত করিয়া দেন।

যদি কোন ব্যক্তি জীবনবীমার প্রিমিয়াম্ বাবদ টাকা জমা দেন, তবে তাহার উপর আয়কর রেহাই দেওয়া হয়। সাধারণতঃ মোট আয়ের এক-চতুর্থাংশ পর্যন্ত ঐরূপ জমা দেওয়া টাকা আয়করমুক্ত করা হয়, কিন্তু যদি ঐ $\frac{1}{4}$ অংশ 8000 টাকার অধিক হয়, তবে ঐ জমা দেওয়া টাকার কেবল 8000 টাকা পর্যন্ত আয়কর মুক্ত করা হয়। ইহা নির্ণয় করিতে হইলে প্রথমে হিসাব অনুসারে মোট আয়ের উপর কত আয়কর হয় তাহা নির্ণয় করিতে হইবে। তৎপরে মোট আয়ের উপর যদি ঐ আয়কর হয়, তবে মকুব টাকার উপর সেই অনুপাতে কত আয়কর হয়, দেখিতে হইবে। এইরূপে যত আয়কর হয়, তাহাই মোট আয়কর হইতে বাদ যাইবে।

ঐকিক নিয়মে আয়কর সংক্রান্ত প্রশ্নের সমাধান নিম্নে দেখ।

উদাহরণ 1. 3600 টাকার অতিরিক্ত যে আয় তাহার উপর টাকায় 6 পয়সা হিসাবে 126 টাকা আয়কর দিতে হইল। মোট আয় কত ছিল ?

6 পয়সা $=\frac{6}{100}$ টাকা

$\therefore$ $\frac{6}{100}$ টাকা আয়কর হয় 1 টাকা আয়ে

$\therefore$ 1 টা. " " $\frac{100}{6}$ টা. "

$\therefore$ 126 টা. " " $\frac{100\times126}{6}$ টা. আয়ে বা 2100 টা. আয়ে।

$\therefore$ নির্ণেয় মোট আয় $=3600$ টা. $+2100$ টা. $=5700$ টাকা।

উদাহরণ 2. যদি আয়ের প্রথম 3000 টাকা আয়করমুক্ত, তাহার পর 2500 টাকা পর্যন্ত টাকায় 3 পয়সা হারে এবং তৎপরে 2000 টাকা পর্যন্ত 5% হারে আয়কর হয়, তবে যে ব্যক্তির মাসিক আয় 600 টাকা, তাহাকে বৎসরে কত আয়কর দিতে হইবে ?

লোকটির বার্ষিক আয় $=600$ টা. $\times 12=7200$ টাকা,

এই আয়ের প্রথম 3000 টাকা আয়করমুক্ত।

অতএব, $(7200-3000)$ বা 4200 টাকার মধ্যে 2500 টাকার উপর টাকায় 3 পয়সা হিসাবে এবং বাকী $(4200-2500)$ বা 1700 টাকার উপর 5% হিসাবে আয়কর দিতে হইবে।

এক্ষণে, 1 টাকার উপর আয়কর হয় 3 পয়সা

$\therefore$ 2500 " " " " 3 প. $\times 2500=75$ টাকা।

আবার, 100 টাকার উপর আয়কর $=5$ টাকা

$\therefore$ 1700 " " " $=5\times17=85$ টাকা।

$\therefore$ লোকটিকে বার্ষিক মোট $(75+85)$ টা. বা 160 টা. আয়কর দিতে হইবে।

উদাহরণ 3. এক ব্যক্তির বার্ষিক আয় 5000 টাকা এবং তিনি বৎসরে 1360 টাকা জীবনবীমার প্রিমিয়াম দেন। আয়ের প্রথম 3000 টাকায় কোন আয়কর দিতে হয় না এবং প্রিমিয়ামের জন্য মোট আয়ের $\frac{1}{4}$ অংশ অথবা 8000 টাকা (যেটি কম) আয়করমুক্ত হয়। টাকা প্রতি 5 পয়সা হারে তাহাকে বৎসরে কত আয়কর দিতে হইবে?

লোকটিকে (5000 টা. − 3000 টা.) বা 2000 টাকার উপর আয়কর দিতে হইবে।

1 টাকার উপর আয়কর = 5 পয়সা

∴ 2000 " " " = 5 পয়সা × 2000 = 100 টাকা।

লোকটি প্রিমিয়াম জমা দেন 1360 টাকা, কিন্তু তাঁহার মোট আয় 5000 টাকার $\frac{1}{4}$ অংশ = 1250 টাকা, সুতরাং 1250 টাকার উপর আয়কর মোট টাকার উপর আয়করের অনুপাতে মকুব হইবে।

∵ 5000 টাকার উপর আয়কর = 100 টাকা

∴ 1 " " " = $\frac{100}{5000}$ টা. বা $\frac{1}{50}$ টা.

∴ 1250 " " " = $\frac{1}{50}$ টা. × 1250 = 25 টা.

∴ লোকটিকে বৎসরে (100 টা. − 25 টা.) বা 75 টাকা আয়কর দিতে হইবে।

প্রশ্নমালা 28

1. টাকায় 3 পয়সা হারে 2200 টাকা আয়ের উপর কত আয়কর দিতে হইবে?

2. 450 টাকা আয়ের উপর 2·5% হারে আয়কর দিয়া কত আয় থাকিবে?

3. প্রতি টাকায় 4 পয়সা হারে আয়কর দিয়া এক ব্যক্তির 480 টাকা 24 পয়সা থাকিল। তাহার মোট আয় কত ছিল?

4. প্রতি টাকায় 1 পয়সা আয়কর বৃদ্ধি হইলে এক ব্যক্তির আয়কর বাদে আয় 12 টাকা 10 পয়সা কমিয়া যায়। তাহার মোট আয় কত?

5. এক ব্যক্তির মোট আয় 4650 টাকা। তাহার 2500 টাকা ছাড়িয়া অতিরিক্ত আয়ের উপর টাকায় 3 পয়সা হারে আয়কর দিতে হইল। আয়কর দিয়া তাহার কত আয় থাকিল?

6. 1500 টাকা ছাড় দিয়া অবশিষ্ট আয়ের প্রতি টাকায় $3\frac{1}{2}$ পয়সা হারে মোট 68 টাকা আয়কর দিতে হইল। আয়কর বাদে তাহার মোট কত আয় থাকিল?

7. প্রতি টাকায় 8 পয়সা হারে আয়কর দিয়া 552 টাকা আয় থাকে। প্রতি টাকায় 7 পয়সা হারে আয়কর দিলে অবশিষ্ট আয় কত থাকিবে ?

8. এক ব্যক্তির বার্ষিক আয় 9875 টাকার মধ্যে 2000 টাকা আয়করমুক্ত এবং আয়কর দিয়া তাঁহার 9481 টাকা 25 পয়সা থাকে। প্রতি টাকায় কত আয়কর দিতে হয় ?

9 এক ব্যক্তির মাসিক আয় 625 টাকা। আয়ের প্রথম 3000 টাকা আয়করমুক্ত। তাহার পর 3500 টাকার উপর টাকায় 4 পয়সা হিসাবে এবং তাহার উর্ধ্বে আয়ের উপর 5% হারে বার্ষিক আয়কর হইলে, বৎসরে তাঁহাকে কত আয়কর দিতে হইবে ?

*10. এক ব্যক্তির বার্ষিক আয় 5600 টাকা এবং তিনি বৎসরে 1520 টাকা জীবনবীমার প্রিমিয়াম দেন। আয়ের প্রথম 3000 টাকা এবং প্রিমিয়ামের জন্য মোট আয়ের $\frac{1}{6}$ অংশ অথবা 8000 টাকা (যেটি কম) আয়করমুক্ত। টাকা প্রতি $6\frac{2}{5}$ পয়সা হারে তাঁহাকে বৎসরে কত আয়কর দিতে হয় ?

*11. এক ব্যক্তির বার্ষিক আয় 7225 টাকা। আয়ের প্রথম 3000 টাকা আয়করমুক্ত এবং অবশিষ্ট আয়ের উপর টাকা প্রতি 3 পয়সা হারে আয়কর দিতে হয়। কিন্তু সে ব্যক্তি প্রভিডেন্ট ফণ্ডে বৎসরে যে 150 টাকা জমা দেয় তাহার উপর 3% হারে আয়কর মকুব হয়। বৎসরে তাহাকে মোট কত আয়কর দিতে হইবে ?

12. আয়ের প্রথম 2500 টাকা আয়করমুক্ত। তাহার পর 2320 টাকার উপর টাকা প্রতি 4 পয়সা হারে এবং তদূর্ধ্ব আয়ের টাকা প্রতি 6 পয়সা হারে এক ব্যক্তিকে মোট বৎসরে 169 টাকা 60 পয়সা আয়কর দিতে হয়। তাঁহার বার্ষিক আয় কত ?

মুদ্রাবিনিময় ও শৃঙ্খল নিয়ম

(Foreign Exchange and Chain Rule)

ভিন্ন ভিন্ন দেশে বিভিন্ন ধাতুনির্মিত বিভিন্ন রকমের মুদ্রা প্রচলিত আছে। এক দেশের মুদ্রা অন্য দেশে চলে না। কোন এক দেশের মুদ্রার পরিবর্তে অন্য কোন দেশের সমান মূল্যের মুদ্রা গ্রহণ করাকে **মুদ্রাবিনিময়** (Exchange) বলে। ব্যবসায় ক্ষেত্রে দ্রব্য কেনাবেচা প্রভৃতিতে এইভাবে মূল্য আদান-প্রদান হয়।

স্বর্ণকে এই বিনিময়ের মাধ্যম বলা হয়। এক দেশের কোন মুদ্রায় যে পরিমাণ স্বর্ণ আছে তাহার প্রকৃত মূল্যের সহিত অন্য দেশীয় কোন মুদ্রাগত স্বর্ণ-পরিমাণের প্রকৃত মূল্যের যে সম্বন্ধ বা অনুপাত তাহাকে **বিনিময়ের সমতা** (Par of Exchange) বলে। ইংলণ্ডীয় মুদ্রা পাউণ্ড এবং ফরাসী

দেশীয় মুদ্রা ফ্রাঙ্ক। এক ফ্রাঙ্কে যে পরিমাণ স্বর্ণ আছে যদি এক পাউণ্ডে তাহার 25·2 গুণ স্বর্ণ থাকে, তবে এক পাউণ্ডের বিনিময় সমতা 25·2 ফ্রাঙ্ক হইবে।

এক দেশের প্রচলিত কোন মুদ্রার মূল্যের বিনিময়ে অপর কোন দেশের যে পরিমাণ মুদ্রা পাওয়া যায়, তাহাকে **বিনিময়ের হার** (Par Rate of Exchange.) বলে।

বিনিময়ের হার বিনিময়-সমতা অপেক্ষা বেশী হইলে তাহাকে **অধিহার** (Premium) এবং সমতা অপেক্ষা কম হইলে তাহাকে **উনহার** (Discount) বলে।

দুই দেশের মধ্যে এই বিনিময় সাক্ষাৎভাবে হইতে পারে, অথবা এক বা একাধিক অন্য দেশের মাধ্যমে হইতে পারে।

বিদেশের সহিত ব্যবসায়ে মূল্য আদান-প্রদান সাধারণতঃ "বিল" (Bill of Exchange), ড্রাফ্‌ট্ (Draft), হুণ্ডি প্রভৃতি দ্বারা হইয়া থাকে।

ভারতের এক ব্যবসায়ী লণ্ডনের কোন ব্যবসায়ীকে মূল্য দিবার জন্য যদি স্থানীয় কোন ব্যাঙ্কে স্থানীয় মুদ্রায় সেই মূল্য জমা দেয়, তবে ঐ ব্যাঙ্ক লণ্ডনের কোন ব্যাঙ্কের উপর বিল বা হুণ্ডি বা draft লিখিয়া তাহা লণ্ডনের ঐ ব্যবসায়ীকে পাঠাইয়া দিবে। লণ্ডনের ঐ ব্যবসায়ী লণ্ডনস্থ ঐ ব্যাঙ্কে সেই হুণ্ডি জমা দিয়া অর্থ লইবে। এই draft সম্বন্ধে পরে আলোচনা করা হইয়াছে।

কতিপয় বিদেশী প্রধান মুদ্রা। ইংলণ্ডে 1 পাউণ্ড, ফ্রান্সে 1 ফ্রাঙ্ক, আমেরিকা ও কানাডায় 1 ডলার, জাপানে 1 ইয়েন = 100 সেন, জার্মানীতে 1 মার্ক = 100 পেনিজ, রাশিয়ায় 1 রুবল = 100 কোপেক, পাকিস্তানে 1 টাকা = 100 পয়সা, সিংহলে 1 টাকা = 100 সেণ্ট, ইটালিতে 1 লিরা।

এই বিনিময় সংক্রান্ত প্রশ্নের সমাধান শৃঙ্খল নিয়মে (Chain Rule) সহজে করা যায়।

পুনঃপুনঃ ঐকিক নিয়ম প্রয়োগের সংক্ষিপ্ত প্রণালীকে শৃঙ্খল নিয়ম বলা হয়। শৃঙ্খল নিয়মে প্রদত্ত রাশিগুলিকে এরূপে স্থাপন করিবে যেন সমশ্রেণীর দুইটি রাশি একই স্তম্ভে না পড়ে। শৃঙ্খল নিয়মে সমাধান দেখ।

উদাহরণ 1. যদি 8টি মেষের মূল্য 12টি ছাগলের মূল্যের সমান হয়, 6টি ছাগলের মূল্য 40টি মোরগের মূল্যের সমান এবং 20টি মোরগের মূল্য 32টি হাঁসের মূল্যের সমান হয় এবং একটি হাঁসের মূল্য 10 আনা হয়, তবে একটি মেষের মূল্য কত ?

8টি মেষের মূল্য = 12টি ছাগলের মূল্য
6টি ছাগলের মূল্য = 40টি মোরগের মূল্য
20টি মোরগের মূল্য = 32টি হাঁসের মূল্য
1টি হাঁসের মূল্য = 10 আনা = $\frac{5}{8}$ টাকা

∴ নির্ণেয় একটি মেষের মূল্য = $\frac{12 \times 40 \times 32 \times 5}{8 \times 6 \times 20 \times 8}$ টাকা = 10 টাকা।

উদাহরণ 2. 19 ডলার=80 মার্ক, 16·1 মার্ক=100 ফ্রাঙ্ক, 25 ফ্রাঙ্ক =1 পাউণ্ড, এবং 1 শি. 4 পে.=1 টাকা হইলে, কত টাকা 3059 ডলারের সমান হইবে ?

মনে কর, নির্ণেয় টাকার সংখ্যা=x.

অতএব এখানে শৃঙ্খলটি নিম্নরূপ হইল—

x টাকা=3059 ডলার

19 ডলার=80 মার্ক

16·1 মার্ক=100 ফ্রাঙ্ক

25 ফ্রাঙ্ক=1 পাউণ্ড=240 পেন্স

1 শি. 4 পে. বা 16 পেন্স=1 টাকা

$$\therefore \quad x=\frac{3059\times 80\times 100\times 240\times 1}{19\times 16{\cdot}1\times 25\times 16}=48000$$

∴ নির্ণেয় টাকা=48000 টাকা।

উদাহরণ 3. নিউ ইয়র্কের এক বণিক জেনেভায় 4004 ফ্রাঙ্কের মাল কিনিল। যদি বিনিময়ের হার লণ্ডন ও নিউ ইয়র্কের মধ্যে 4·865 ডলার =1 পা. এবং লণ্ডন ও জেনেভার মধ্যে 25·48 ফ্রাঙ্ক=1 পাউণ্ড হয়, তবে ঐ মালের মূল্য কত ডলার হইবে ? [C. U. '38, '42]

মনে কর, ঐ মালের মূল্য x ডলার।

অতএব, x ডলার=4004 ফ্রাঙ্ক

24·58 ফ্রাঙ্ক=1 পাউণ্ড

1 পাউণ্ড=4·865 ডলার

$$\therefore \quad x=\frac{4004\times 4{\cdot}865}{25{\cdot}48}=764{\cdot}5 \text{ (প্রায়)}$$

∴ ঐ মালের মূল্য 764·5 ডলার (প্রায়)।

উদাহরণ 4. বোম্বাই-এর এক বণিককে প্যারীতে 10000 ফ্রাঙ্কের দেনা শোধ করিতে হইবে। উহা পরিশোধের জন্য প্যারীর হুণ্ডি কিনিয়া পাঠান অথবা লণ্ডনের মাধ্যমে টাকা পাঠান কোন্‌টি লাভজনক ? বিনিময়ের হার প্রথম পক্ষে 1 ফ্রাঙ্ক=10 আ. 6 পাই, এবং দ্বিতীয় পক্ষে 1 শি. 3 পে.=1 টাকা ও 25 ফ্রাঙ্ক=1 সভারিন। [C. U. '34]

প্রথম পক্ষে, বরাবর প্যারীতে হুণ্ডি কিনিয়া দেনা শোধ করিবার জন্য খরচ=10 আনা 6 পাই×10000=6562 টাকা 8 আনা।

দ্বিতীয় পক্ষে, মনে কর, x টাকা = 10000 ফ্রাঙ্ক

25 ফ্রা. = 1 পাউণ্ড = 240 পেন্স

1 শি. 3 পে. বা 15 পে. = 1 টাকা

$$\therefore \quad x = \frac{10000 \times 240}{25 \times 15} \text{ টাকা} = 6400 \text{ টাকা।}$$

অতএব লণ্ডনের মাধ্যমে টাকা পাঠাইলে কম ব্যয় হইবে অর্থাৎ লাভজনক হইবে।

উদাহরণ 5. বিনিময়ের সমতা 1 টাকা = 3 ফ্রাঙ্ক এবং প্যারিসের মুদ্রার অধিহার 10% হইলে 2310 টাকার বিনিময়ে কত ফ্রাঙ্ক পাওয়া যাইবে?

বিনিময় সমতায় 3 ফ্রা. = 1 টাকা

∴ 10% অধিহারে 3 ফ্রা. = $\frac{110}{100}$ টা. = $\frac{11}{10}$ টাকা।

অতএব অধিহারে $\frac{11}{10}$ টাকা দিয়া 3 ফ্রা. পাওয়া যায়

∴ 1 টাকা দিয়া $\frac{30}{11}$ ফ্রা. পাওয়া যায়

∴ 2310 টা. দিয়া $\frac{30}{11} \times 2310$ ফ্রা. বা 6300 ফ্রাঙ্ক পাওয়া যায়।

প্রশ্নমালা 29

1. বিনিময়ের হার 1 টাকা = 1 শি. 6 পে. হইলে, 100000 টাকার বিনিময়ে কত পাউণ্ড ইত্যাদি পাওয়া যাইবে?

2. যদি এক মিটার বস্ত্রের মূল্য 16·5 ফ্রাঙ্ক, এবং 100 টাকা = 780 ফ্রা. ও 1 গজ = 91·44 সে. মি. হয়, তবে 1 গজ বস্ত্রের মূল্য টাকা আনায় কত হইবে?

3. বিনিময়ের হার 1 শি. 6 পে. = 1 টাকা হইলে 2 পা. 5 শি.-এর পরিবর্তে কত টাকা পাওয়া যায়?

4. বিনিময়ের হার কলিকাতা ও ইয়োকোহামার মধ্যে প্রতি ইয়েনে (Yen) 1 টা. $9\frac{1}{4}$ আ., লণ্ডন ও কলিকাতার মধ্যে প্রতি টাকায় 1 শি. $5\frac{1}{2}$ পে. এবং ইয়োকোহামা ও নিউ ইয়র্কের মধ্যে প্রতি ইয়েনে ·52 ডলার। লণ্ডন ও নিউ ইয়র্কের মধ্যে মাধ্যমিক প্রক্রিয়ায় বিনিময়ের হার কত হইবে? [C. U.]

5. টাকায় 1 শি. 3 পে. হারে কলিকাতায় একটি হুণ্ডি কিনিয়া প্রতি পাউণ্ডে 24 ফ্রাঙ্ক হিসাবে প্যারীতে বিক্রয় করা হইল। কলিকাতা ও প্যারীর মধ্যে বিনিময়ের হার নির্ণয় কর।

6. কলিকাতার এক বণিক লণ্ডনের এক বণিককে 300 পাউণ্ড পাঠাইতে চান। যদি বিনিময়ের হার 1 টা. = 1 শি. 4 পে. হয়, তবে কলিকাতার কোন ব্যাঙ্কে কত টাকা জমা দিলে 300 পাউণ্ডের হুণ্ডি পাওয়া যাইবে?

7. যদি বিনিময়ের হার লণ্ডনের সহিত কলিকাতার 15 ও প্যারীর 25·23 হয়, তবে লণ্ডনের মাধ্যমে কলিকাতা ও প্যারীর বিনিময়ের হার কত ?

*8. লণ্ডন হইতে একখানি বই আনাইতে ডাকখরচ 1 টা. 2 আ. সমেত মোট 12 টা. 1 আ. ব্যয় হইল। পুস্তক-বিক্রেতা লিখিত মূল্যের প্রতি শিলিংএ 2 পেন্স করিয়া কমিশন দিয়া থাকিলে এবং বিনিময়ের হার 1 টাকা = 1 শি. 4 পে. হইলে পুস্তকের মূল্য ইংলণ্ডীয় মুদ্রায় কত লিখিত ছিল ? [C. U. 1906]

9. যদি 4টি ছাগলের মূল্য 3টি মেষের মূল্যের সমান হয়, 7টি মেষের মূল্য 2টি গরুর মূল্যের ও 9টা গরুর মূল্য 7 টা. ঘোড়ার মূল্যের সমান হয় এবং একটি ঘোড়ার মূল্য 90 টাকা হয়, তবে একটি ছাগলের মূল্য কত ?

10. 6টা ঘোড়ার বিনিময়ে 24 টা গরু, 10 টা গরুর বিনিময়ে 8টা মহিষ, 4টা মহিষের বিনিময়ে 15টা গাধা এবং 8টা গাধার বিনিময়ে 32টা মেষ পাওয়া যায়। 9টা মেষের মূল্য 25 টাকা হইলে একটি ঘোড়ার মূল্য কত ?

[D. B. 1926]

11. টাকা প্রতি 1 শি. $3\frac{1}{4}\frac{5}{8}$ পে. হারে লণ্ডন ব্যাঙ্কের উপর 1030 পা. 7 শি. 6 পে. ড্রাফ্‌টের (Draft) মূল্য কত ?

*12. বোম্বাই-এর কোন ব্যবসায়ী লণ্ডনের এক ব্যবসায়ীকে 1000 পাউণ্ড পাঠাইবে। সে যদি সোজাসুজি লণ্ডনে উহা না পাঠাইয়া প্যারিসের মাধ্যমে পাঠায়, তবে তাহার 200 টাকা কম লাগে। বোম্বাই ও প্যারিসের বিনিময়ের হার 617 টাকা = 2016 ফ্রাঙ্ক এবং প্যারিস ও লণ্ডনের বিনিময়ের হার 50·40 ফ্রাঙ্ক = 1 পাউণ্ড হইলে, লণ্ডন ও বোম্বাই-এর বিনিময়ের হার কত ?

[বো. প্র. 1922]

13. বার্লিনের কোন বণিকের নিকট বোম্বাই-এর এক বণিকের 1410 টাকা ধার আছে। সে লণ্ডন ব্যাঙ্কের মারফতে উহা পরিশোধ করিল। যদি বিনিময়ের হার 1 টাকা = 1 শি. 4 পে. এবং 1 মার্ক = $11\frac{3}{4}$ পেন্স হয়, তবে বার্লিনের বণিক কত পাইবে ? [I. I. B.]

14. নিউ ইয়র্কের এক ব্যবসায়ীকে লণ্ডনে 5000 ডলার মূল্যে ক্রীত মালের দাম দিতে হইবে (1 ডলার = 4 শি. 6 পে.)। লণ্ডনে বিলের দর $9\frac{1}{2}\%$ অধিহার হইলে তাহাকে ইংলণ্ডীয় মুদ্রায় কত মূল্যের বিল কিনিতে হইবে ?

[C. U. 1945]

15. বিনিময়ের সমতা 1 টাকা = 1 শি. 6 পে. ; লণ্ডনে মুদ্রার অধিহার 12% হইলে 2240 টাকার বিনিময়ে কত পাউণ্ড পাওয়া যাইবে ?

16. বিনিময়ের সমতা 1 টাকা = 1 শি. 6 পে. এবং লণ্ডনে মুদ্রার ডিস্কাউন্ট 3% হইলে 2910 টাকার বিনিময়ে কত পাউণ্ড পাওয়া যাইবে ?

মেট্রিক প্রণালী (Metric System)

মেট্রিক প্রণালী তোমরা পূর্বেই শিখিয়াছ। এখানে মেট্রিক এককাবলীর সহিত অন্যান্য এককাবলীর সম্বন্ধ দেখান হইতেছে।

মেট্রিক রৈখিক পরিমাণ

তোমরা জান 1 মিটার $= \dfrac{\text{পৃথিবীর পরিধি}}{40000000} = 39{\cdot}370113\ldots$ ইঞ্চি ধরা হয়।

1 মিটার $= 1\frac{3}{32}$ গজ (প্রায়) $= 1{\cdot}09$ গজ (প্রায়)

1 কি. মি. $= \frac{5}{8}$ মাইল (প্রায়) $= {\cdot}62$ মাইল (প্রায়)

1 ইঞ্চি $= {\cdot}025399$ মি. $= 2{\cdot}54$ সে. মি. (প্রায়)

1 ফুট $= {\cdot}3048\cdots$ মিটার $= 30{\cdot}48$ সে. মি.

1 গজ $= {\cdot}91438\cdots$ মিটার $= {\cdot}91$ মি. (প্রায়)

1 মাইল $= 1609{\cdot}3149\cdots$ মিটার $= 1{\cdot}61$ কি. মি. (প্রায়)

10 মাইল $= 16{\cdot}09$ কি. মি.।

এই প্রণালীতে 1 মিটারকে দৈর্ঘ্য একক ধরা হয়।

মেট্রিক বর্গ পরিমাণ

এই প্রণালীতে যে বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য এক ডেকামিটার তাহার ক্ষেত্রফলকে ভূমির বর্গ পরিমাণের একক ধরা হয়। ইহার নাম **আর** (Are)।

1 আর $= 1$ বর্গ ডেকামিটার $= 100$ বর্গমিটার।

1 আর $= 120$ বর্গগজ (প্রায়), 1 হেক্টো আর (hectare) $= 2{\cdot}5$ একর (প্রায়)।

1 একর $= {\cdot}40$ হেক্টার, 2 একর $= {\cdot}81$ হেক্টার, 5 একর $= 2{\cdot}02$ হেক্টার,

1 বর্গগজ $= {\cdot}84$ বর্গমিটার, 2 ব. গ. $= 1{\cdot}67$ ব. মি., 5 ব. গ. $= 4{\cdot}18$ ব. মি.।

1 বর্গমিটার $= 1\frac{1}{5}$ বর্গগজ (প্রায়)। [হেক্টো আরকে হেক্টার বলা হয়]।

মেট্রিক ঘন পরিমাণ

দুই প্রকারের ঘন পরিমাণ প্রচলিত আছে। কাঠের তক্তা প্রভৃতি বৃহদায়তনের দ্রব্যাদি মাপিতে যে ঘন পরিমাণের একক ব্যবহৃত হয় তাহাকে **স্টেয়ার** (Stere) বলে। আর, তরল পদার্থ মাপিতে যে ঘন পরিমাণের একক ব্যবহৃত হয় তাহাকে **লিটার** (Litre) বলে।

স্টেয়ার :—1 ঘন মিটারকে (অর্থাৎ 1 মি. $\times$ 1 মি. $\times$ 1 মি.) 1 স্টেয়ার বলে।

লিটার :—1 ঘন ডেসিমিটারকে 1 লিটার বলে।

1 লিটার $= 61{\cdot}024$ ঘন ইঞ্চি $= 1\frac{3}{4}$ পাঁইট (প্রায়),

1 পাঁইট $= {\cdot}568$ লিটার, 1 গ্যালন $= 4{\cdot}55$ লিটার,

1 হেক্টো লিটার $= 22$ গ্যালন।

মেট্রিক গুরুত্ব পরিমাণ

এই প্রণালীতে গুরুত্ব পরিমাণের বা ওজনের এককেক **গ্রাম** (Gramme) বলে। ইহা 4 ডিগ্রী (সেন্টিগ্রেড) উত্তাপবিশিষ্ট **এক ঘন সেন্টিমিটার** বিশুদ্ধ পরিস্রুত জলের ওজনের সমান।

1 কিলোগ্রাম = 1000 গ্রাম = 1000 ঘন সেন্টিমিটার জলের ওজন
= 1 ঘন ডেসিমিটার জলের ওজন।

100 কিলোগ্রাম = 1 কুইণ্টাল (Quintal)

1000 কিলোগ্রাম = 1 টোনে (Tonne) বা 1 মেট্রিক টন।

1 টোনে = 0·98 টন, 1 টন = 1·02 টোনে। 1 কুইণ্টাল = 1·97 হন্দর।

1 গ্রাম = ·09 তোলা, 1 তোলা = 11·66 গ্রাম ; 1 কি. গ্রাম = 1·07 সের।

1 সের = 0·93 কি. গ্রাম ; 1 কি. গ্রাম = $2\frac{1}{5}$ পাউণ্ড (এভড্‌) = 86 তোলা প্রায়।

1 পাউণ্ড = 0·45 কি. গ্রাম ; 1 মণ = 0·37 কুইণ্টাল ; 1 কুই. = 2·68 মণ।

1 ছটাক = 58 গ্রাম (প্রায়) ; 1 গ্রাম = $15\frac{1}{2}$ গ্রেণ (প্রায়) ;

1 গ্যালন জলের ওজন = 10 পাউণ্ড।

ফ্রান্সের মুদ্রাবিষয়ক এককাবলী

10 সেণ্টাইম (Centime) = 1 ডেসাইম (Decime)।

10 ডেসাইম = 1 ফ্রাঙ্ক (Franc) = $\frac{4}{5}$ শিলিং (প্রায়)।

20 ফ্রাঙ্ক = 1 নেপোলিয়ান (Napoleon)।

মেট্রিক প্রণালী সম্বন্ধীয় বিবিধ সমাধান

উদা. 1. 3 মাইলকে কিলোমিটারে প্রকাশ কর।

∵ 1 মাইল = 1609·31 মি. = 1·61 কি. মি. (2 দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধ)

∴ 3 মাইল = 1·61 × 3 কি. মি. = 4·83 কিলো মিটার।

উদা. 2. 1 কিলোলিটার কত গ্যালনের সমান ?

∵ 4·55 লিটার = 1 গ্যালন, ∴ 1 লিটার = $\frac{1}{4{\cdot}55}$ গ্যালন।

∴ 1 কিলোলিটার = $\frac{1000}{4{\cdot}55}$ গ্যালন = 219·78 গ্যালন।

উদা. 3. এক ছটাক চিনির মূল্য 5 পয়সা হইলে 1 কিলো গ্রাম চিনির মূল্য কত ?

1 কি. গ্রাম = 1·07 সের = 1·07 × 16 ছটাক।

∴ নির্ণেয় মূল্য = 1·07 × 16 × 5 প. = 85·6 পয়সা।

উদা. 4. পৃথিবীর পরিধির এক-চতুর্থাংশের কোটিভাগের এক ভাগকে মিটার বলে এবং ইহা দৈর্ঘ্যে 39·37079 ইঞ্চির সমান। পৃথিবীর পরিধি কত মাইল ? [C. U. '10 ; D. B. '37]

$\because$ 1 মিটার $= \dfrac{\text{পৃথিবীর পরিধি}}{40000000}$,

$\therefore$ নির্ণেয় পরিধি $= 40000000$ মিটার $= 40000000 \times 39{\cdot}37079$ ইঞ্চি

$= 400 \times 3937079$ ই. $= \dfrac{400 \times 3937079}{12 \times 3 \times 1760}$ মাইল

$= 24855{\cdot}2\cdots$ মাইল $= 24855$ মাইল (আসন্ন)।

উদা. 5. আলোকের গতি প্রতি সেকেণ্ডে 3×10^8 মিটার এবং সূর্য হইতে পৃথিবীতে আলোক পৌঁছিতে 8 মিনিট সময় লাগে। পৃথিবী হইতে সূর্য্যের দূরত্ব কত মাইল ? (1 মি. = 39·37 ইঞ্চি)। [C. U. '43 ; D. B. '37]

$\because$ 1 সেকেণ্ডে আলোক যায় 3×10^8 মিটার,

$\therefore$ 8 মিনিটে „ „ $3 \times 10^8 \times 60 \times 8$ মিটার

$= 3 \times 10^8 \times 60 \times 8 \times 39{\cdot}37$ ইঞ্চি

$= \dfrac{3 \times 10^6 \times 60 \times 8 \times 3937}{12 \times 3 \times 1760}$ মাইল

$= 89477272\frac{8}{11}$ মাইল।

$\therefore$ নির্ণেয় দূরত্ব $= 89477272{\cdot}\dot{7}\dot{2}$ মাইল।

উদা. 6. যদি এক মিটার $39\frac{3}{8}$ ইঞ্চির সমান হয়, তবে এক ঘনফুটে কত আসন্ন অখণ্ড লিটার আছে ? [C. U. '11 ; D. B. '38]

$39\frac{3}{8}$ ই. বা 39·375 ইঞ্চি = 1 মিটার = 100 সেন্টিমিটার

$\therefore$ 1 ইঞ্চি $= \dfrac{100}{39{\cdot}375}$ সে. মি., $\therefore$ 1 ফুট $= \dfrac{100 \times 12}{39{\cdot}375}$ সে. মি.

$\therefore$ 1 ঘন ফুট $= (1 \text{ ফুট})^3 = \left(\dfrac{1200}{39{\cdot}375}\right)^3$ ঘন সে. মি.

$= (30{\cdot}4\ldots)^3$ ঘন সে. মি.

$= \dfrac{(30{\cdot}4)^3}{1000}$ ঘন ডেসি মিটার বা লিটার [$\because$ 1 লিটার = 1 ঘন ডেসি মিটার]

= 28 লিটার (আসন্ন)।

উদা. 7. এক ঘনফুট জলের ওজন 1000 আউন্স এবং 1 মিটার = 39·37 ইঞ্চি হইলে, কত লিটার জলের ওজন 1000 পাউণ্ড হইবে ?

[C. U. '27 ; P. U. '18 ; D. B. '47]

[এখানে প্রথমে 1 ঘন ফুট = কত ঘন ডেসি মিটার হয় তাহা নির্ণয় কর ; কারণ, যত ঘন ডেসি মিটার হইবে তত লিটার উত্তর হইবে।]

$$1 \text{ ঘন ফুট} = 12 \times 12 \times 12 \text{ ঘন ইঞ্চি} = \frac{12^3}{(39{\cdot}37)^3} \text{ ঘন মিটার}$$

$$= \frac{12^3}{(39{\cdot}37)^3} \times 10^3 \text{ ঘন ডেসি মি.} = \frac{12^3 \times 10^3}{(39{\cdot}37)^3} \text{ লিটার।}$$

এক্ষণে, 1000 পাউণ্ড = 16000 আউন্স = 16 ঘন ফুট জলের ওজন

$$= \frac{16 \times 12^3 \times 10^3}{(39{\cdot}37)^3} \text{ লিটার জলের ওজন} = 453{\cdot}0696 \text{ লিটার জলের ওজন।}$$

উদা. 8. যদি 1 গজ = 0·9144 মিটার, 1 পাউণ্ড = 25 ফ্রাঙ্ক হয় এবং ফ্রান্সে প্রতি কিলোমিটারের রেলভাড়া 6 সেণ্টাইম ও ইংলণ্ডে প্রতি মাইলের ভাড়া $1\frac{1}{2}$ পেন্স হয়, তবে 250 মাইল ইংলণ্ডে ও ফ্রান্সে রেলভ্রমণে ভাড়ার পার্থক্য কত হইবে তাহা আসন্ন ফার্দিং পর্যন্ত নির্ণয় কর। [G. U. '50]

250 মাইল = 250 × 1760 গজ = 250 × 1760 × ·9144 মিটার
= 402336 মি. = 402·336 কিলোমিটার,

∴ ফ্রান্সে 250 মাইলের ভাড়া

$$= 402{\cdot}336 \times 6 \text{ সেণ্টাইম} = \frac{402{\cdot}336 \times 6}{100} \text{ ফ্রাঙ্ক} = \frac{2414{\cdot}016}{100} \text{ ফ্রা.}$$

$$= 24{\cdot}14016 \text{ ফ্রা.} = \frac{24{\cdot}14016}{25} \text{ পাউণ্ড} = {\cdot}9656064 \text{ পাউণ্ড।}$$

আবার, ইংলণ্ডে 250 মাইলের ভাড়া = $1\frac{1}{2}$ পে. × 250 = $\frac{3 \times 250}{2 \times 12 \times 20}$ পা.
= $\frac{25}{16}$ পা. = 1·5625 পাউণ্ড।

∴ দুই দেশের ভাড়ার অন্তর = 1·5625 পা. − ·9656064 পা.
= ·5968936 পা. = 11 শি. 11 পে. 1 ফা. (আসন্ন)।

উদা. 9. এক ঘনফুট জলের ওজন 1000 আউন্স এবং এক ইঞ্চি 2·54 সেণ্টিমিটারের সমান। এক পাউণ্ড কত আসন্ন অখণ্ড গ্রামের সমান তাহা নির্ণয় কর। [C. U. '49]

1 ঘন সেণ্টিমিটার জলের ওজন = 1 গ্রাম।

এখানে দেখিতে হইবে 1 পাউণ্ড কত ঘন সে. মি. জলের ওজনের সমান।

1 ফুট = 12 ইঞ্চি = 2·54 × 12 সে. মি. = 30·48 সে. মি.

∴ 1 ঘন ফুট = $(30{\cdot}48)^3$ ঘন সেণ্টিমিটার।

∵ 1 ঘন ফুট জলের ওজন = 1000 আউন্স = $\frac{1000}{16}$ পা. = $\frac{125}{2}$ পাউণ্ড,

∴ $\frac{125}{2}$ পাউণ্ড = $(30{\cdot}48)^3$ ঘন সে.মি. জলের ওজন = $(30{\cdot}48)^3$ গ্রাম,

$$\therefore \quad 1 \text{ পাউণ্ড} = \frac{(30{\cdot}48)^3 \times 2}{125} \text{ গ্রাম} = 453 \text{ গ্রাম (প্রায়)।}$$

উদা. 10. যদি এক ঘন মিটার $=35\cdot3$ ঘনফুট, 1 গ্রাম $=15\cdot43$ গ্রেণ এবং এক ঘন ইঞ্চি বায়ুর ওজন 31 গ্রেণ হয়, তবে 10 লিটার বায়ুর ওজন কত গ্রাম হইবে ? [W. B. S. F. 1953]

10 লিটার = 10000 ঘন সেন্টি মিটার।

আবার, 1 ঘন মিটার $=35\cdot3$ ঘনফুট $=35\cdot3\times(12)^3$ ঘন ই.

বা, $(100)^3$ ঘন সে. মি. $=35\cdot3\times(12)^3$ ঘন ই.

$\therefore$ 1 ঘন সে. মি. $=\dfrac{35\cdot3\times(12)^3}{1000000}$ ঘন ই.

$\therefore$ 10 লিটার বা 10000 ঘন সে. মি. $=\dfrac{35\cdot3\times(12)^3}{100}$ ঘন ই.

$\therefore$ 10 লিটার বায়ুর ওজন $=\dfrac{35\cdot3\times(12)^3}{100}$ ঘন ইঞ্চি বায়ুর ওজন

$=\dfrac{35\cdot3\times(12)^3}{100}\times31$ গ্রেণ [$\because$ 1 ঘন ই. বায়ুর ওজন = 31 গ্রেণ]

$=\dfrac{35\cdot3\times1728}{100}\times\dfrac{31}{15\cdot43}$ গ্রাম $=1225\cdot5$ গ্রাম (প্রায়)।

প্রশ্নমালা 30

1. এক মিটার $=39\cdot37$ ইঞ্চি হইলে 10 ফুটে কত সেন্টিমিটার হয় ? [C. U. '48]

2. যদি এক মিটার $3\cdot2809$ ফুটের সমান হয় এবং উত্তরমেরু হইতে বিষুবরেখা পর্যন্ত রেখার দৈর্ঘ্য 10000000 মিটার হয়, তবে পৃথিবীর পরিধি কত আসন্ন মাইল হইবে ? [C. U. '12]

3. পৃথিবীর পরিধি 40000 কিলোমিটার, উহাকে মাইলে প্রকাশ কর। (1 মিটার $=39\cdot3709$ ইঞ্চি)। [C. U. '38]

4. 5 মাইলকে কিলোমিটার ও মিটারে (আসন্ন) প্রকাশ কর। (1 মিটার $=39\cdot37$ ইঞ্চি)।

5. 1 মিটার $=39\cdot3701$ ইঞ্চি হইলে, প্রমাণ কর যে 981 সে. মি. = 32 ফুট (প্রায়)। [E. B. S. B. '50]

6. এক কিলোগ্রাম $=2\cdot2$ পাউণ্ড এবং এক মিটার $=1\cdot09$ গজ। যদি এক মিটার দীর্ঘ কোন তারের ওজন 55 গ্রাম হয়, তবে 100 গজ ঐ তারের ওজন কত পাউণ্ড হইবে তাহা 3 দশমিক অঙ্কে প্রকাশ কর। [D. B. '46]

7. একটি ঘরের দৈর্ঘ্য 20 মিটার ও প্রস্থ 12 মিটার। যদি 1 মিটার $=39\cdot37$ ইঞ্চি হয়, তবে ঐ ঘরের ক্ষেত্রফল বর্গগজে (আসন্ন 2 দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত) নির্ণয় কর। [C. U. '47]

8. 15 ফু. 6 ই. দীর্ঘ ও 14 ফু. 2 ই. প্রশস্ত গৃহের মেঝের ক্ষেত্রফল আসন্ন দুই দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত বর্গমিটারে নির্ণয় কর। (1 মি.=39·37 ই.)।
[C. U. '46]

9. মিটার প্রতি বেড়া দিবার খরচ 2·5 ফ্রাঙ্ক হইলে, যে বর্গক্ষেত্রের আয়তন 40804 বর্গ কিলোমিটার তাহাকে বেড়া দিয়া ঘিরিতে কত ব্যয় হইবে ? [G. U. '49]

10. এক সেন্টিমিটার=·3937 ইঞ্চি হইলে যে মেঝের দৈর্ঘ্য 21 ফুট ও প্রস্থ 10 ফু. 8 ই. তাহার ক্ষেত্রফল কত বর্গমিটার হইবে ? [C. U. '14]

11. ব্যাবিলন-রাজপ্রাসাদে 60 মিটার দীর্ঘ ও 54 মিটার প্রশস্ত এক সহস্র প্রাঙ্গণ ছিল। প্রাঙ্গণগুলি 18 ইঞ্চি দৈর্ঘ্য ও 18 ইঞ্চি প্রস্থের পাথর দিয়া বাঁধান ছিল। মোট কতগুলি পাথর লাগিয়াছিল ? (1 মিটার= 39·37 ইঞ্চি)। [C. U. '15, '51]

12. এক লিটারকে ঘন ইঞ্চিতে প্রকাশ কর। (1 মি.=39·3701 ই.)।

13. 2·56 মিটার গভীর এক জলাধারের দৈর্ঘ্য প্রস্থের 3 গুণ এবং উহাতে 3000 লিটার জল ধরে। উহার দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।
[C. U. '18 ; D. B. '41]

14. একটি জলাধারের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও গভীরতা যথাক্রমে 20·5 মি., 10·2 মি. ও $\frac{1}{2}$ মিটার, উহাতে কত লিটার জল ধরে ?

15. ফ্রান্সে এক কিলোমিটারের রেলভাড়া 5 সেণ্টাইম এবং ইংলণ্ডে প্রতি মাইলের ভাড়া 1 পেন্স। যদি 1 গজ=·9144 মিটার এবং 1 পাউণ্ড=25·17 ফ্রাঙ্ক হয়, তবে ঐ দুই দেশে 100 মাইল রেলে ভ্রমণ করিলে ভাড়ার পার্থক্য কত হইবে তাহা ইংলণ্ডীয় মুদ্রায় আসন্ন ফার্দিং পর্যন্ত নির্ণয় কর।
[C. U. '51 ; D. B. '44]

16. বর্গাকার তলাবিশিষ্ট একটি খোলা জলাধারে 28900 লিটার জল ধরে এবং উহার উচ্চতা 2·5 মিটার। প্রতি বর্গমিটারে 5 টাকা হিসাবে উহার ভিতরে সীসা লাগাইতে কত ব্যয় হইবে ? [D. B. '24]

17. একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের অনুপাত 3 : 2 এবং উহার ক্ষেত্রফল 1109400 বর্গমিটার। প্রতি মিটারে 2·5 ফ্রাঙ্ক হারে উহাকে বেড়া দিতে কত ব্যয় হইবে ? [C. U. '41]

18. একটি ইঞ্জিনের চাকার পরিধি 12·5 মিটার এবং প্রতি সেকেণ্ডে উহা 2·5 বার ঘোরে। 100 মাইল যাইতে উহার কত সময় লাগিবে ? (1 মাইল=1·6 কি. মি.)। [E. B. S. B. '50]

19. একটি আয়তাকার চৌবাচ্চার দৈর্ঘ্য প্রস্থের 3 গুণ এবং উচ্চতা 3 মিটার। উহার আয়তন 81000 লিটার হইলে, উহার দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ কত? উহার ভিতরের দেওয়াল চারিটি রং করিতে প্রতি আরে (are) 200 টাকা হিসাবে কত ব্যয় হইবে? [G. U. '54]

20. এক মুদী ভুলক্রমে এক সের চিনির স্থানে এক কিলোগ্রাম চিনি দিল। যদি 1 সের = ·94 কিলোগ্রাম হয়, তবে তাহার শতকরা কত লাভ বা ক্ষতি হইল?

21. যদি এক কিলোগ্রাম $2\frac{1}{5}$ পাউণ্ডের সমান হয় এবং এক গ্যালন জলের ওজন 10 পাউণ্ড হয়, তবে উহার আয়তন কত ঘন সেন্টিমিটার হইবে? [C. U. '48]

22. এক পাউণ্ড = 7000 গ্রেণ, এবং এক গ্রাম = 15·432 গ্রেণ হইলে, এক আউন্সে (এভড্‌.) কত গ্রাম হইবে তাহা আসন্ন 3 দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত নির্ণয় কর। [C. U. '49]

23. যদি পৃথিবীর পরিধি 40000 কি. মিটার হয় এবং পরিধি ব্যাসের $\frac{22}{7}$ গুণ হয়, তবে উহার ব্যাসার্ধ কত মাইল হইবে? (1 মিটার = 39·3709 ই.)

24. চীনের প্রাচীর যদি 2400 কি. মিটার দীর্ঘ ও উহার তলদেশ 7625 মিলিমিটার পুরু হয়, তবে উহা কত আসন্ন বর্গফুট ভূমির উপর অবস্থিত তাহা নির্ণয় কর। (1 মি. = 39·37 ই.)। [P. U. '20 ; D. B. '43]

*25. যদি 1 ইঞ্চি = 2·54 সে. মি., 1 কিলোগ্রাম = 2·2 পাউণ্ড হয়, এবং প্রতি বর্গইঞ্চির উপর বায়ুমণ্ডলের চাপ 15 পাউণ্ড (এভড্‌.) হয়, তবে প্রতি বর্গ সেন্টিমিটারে ঐ চাপ কত গ্রাম হইবে? [D. B. '28]

*26. এক লিটার খাঁটি দুধের ওজন 1·032 কিলোগ্রাম। একদিন সকালে 6 লিটার দুধ কিনিয়া দেখা গেল উহার ওজন 6·128 কিলোগ্রাম। উহাতে কত ঘন সেন্টিমিটার জল মিশান হইয়াছিল? [C. S. '31 ; D. B. '46]

বিভিন্ন এককাবলীর ব্যবহার

ত্রৈরাশিক ও বহুরাশিক

সমানুপাতী চারিটি রাশির মধ্যে প্রথম তিনটি রাশি দেওয়া থাকিলে চতুর্থ রাশি নির্ণয়ের প্রণালীকে **ত্রৈরাশিক** (Rule of Three) বলে। ইহা চতুর্থ সমানুপাতী নির্ণয়ের অনুরূপ।

বহুরাশিক ত্রৈরাশিকের অনুরূপ। বহুরাশিকে অনুপাতের 5টি, 7টি, 9টি বা ততোধিক অযুগ্ম সংখ্যক রাশি প্রদত্ত থাকে এবং তাহাদের সাহায্যে অপর একটি রাশি (ষষ্ঠ, অষ্টম, প্রভৃতি) নির্ণয় করা হয়। এই নির্ণয় প্রণালীকে **বহুরাশিক** (Double Rule of Three) বলে। ঐকিক নিয়মের প্রশ্নগুলি ত্রৈরাশিক ও বহুরাশিকের সাহায্যেও করা যায়।

ত্রৈরাশিকে ও বহুরাশিকে রাশি স্থাপন প্রণালী নিম্নে দেখ :—

উদাহরণ 1. 10 জন লোকে 18 দিনে একটি কাজ করিতে পারে। 12 জন লোকে উহা কত দিনে করিবে ?

12 : 10 : : 18 : x (দিন)

$\therefore \quad x=\frac{10\times18}{12}$ দিন $=15$ দিন। $\quad\therefore$ নির্ণেয় সময় $=15$ দিন।

[**দ্রষ্টব্য :** এখানে নির্ণেয় রাশি x (দিন)-কে চতুর্থ স্থানে এবং উহার সমশ্রেণীর 18 দিনকে তৃতীয় স্থানে বসান হইল। এইবার মনে মনে প্রশ্ন করা হইল 10 জনে কাজটি যদি 18 দিনে করে, তবে 12 জনে কম দিনে অথবা বেশী দিনে করিবে। বুঝা গেল কম দিনে করিবে (কারণ, লোক বেশী থাকিলে কাজ কম দিনে হয়)। সেইজন্য 10 ও 12-এর মধ্যে কমটিকে অর্থাৎ 10কে দ্বিতীয় স্থানে এবং 12কে প্রথম স্থানে বসান হইল। কম উত্তর হইবে মনে হইলে কমটিকে এবং বেশী উত্তর হইবে মনে হইলে বেশীটিকে দ্বিতীয় স্থানে বসাইতে হয়।]

উদাহরণ 2. যখন গমের মণ 24 টাকা, তখন 4 আনায় 10 ছটাক ওজনের রুটি পাওয়া যায় ; 20 টাকা গমের মণ হইলে 3 আনা মূল্যের রুটির ওজন কত হইবে ?

গমের দাম	রুটির দাম	রুটির ওজন
24 টাকা	4 আনা	10 ছটাক
20 টাকা	3 আনা	নির্ণেয় রাশি x (ছটাকে)

$$\left.\begin{array}{r}20:24\\ 4:\ 3\end{array}\right\}::10:x\text{ (ছটাক)}$$

$\therefore$ নির্ণেয় ওজন $(x)=\frac{24\times3\times10}{20\times4}$ ছটাক $=9$ ছটাক।

[গমের দর কমিলে বেশী ওজনের রুটি পাওয়া যায়, আর গমের দর বাড়িলে রুটির ওজন কম পাওয়া যায়।]

সময় ও কার্য

উদাহরণ 1. ক ও খ একটি কাজ যথাক্রমে 18 ও 12 দিনে করিতে পারে। উভয়ে একত্রে কাজ আরম্ভ করিয়া কাজ শেষ হইবার 3 দিন পূর্বে খ চলিয়া গেল। কাজটি মোট কত দিনে শেষ হইল ?

শেষ 3 দিন ক একা কাজ করিয়া উহার $\frac{1}{18}\times 3$ বা $\frac{1}{6}$ অংশ করিয়াছে।

∴ পূর্বে উভয়ে একত্রে কাজের $(1-\frac{1}{6})$ বা $\frac{5}{6}$ অংশ করিয়াছে।

উভয়ে 1 দিনে করে $(\frac{1}{18}+\frac{1}{12})$ বা $\frac{5}{36}$ অংশ।

∴ তাহারা $\frac{5}{6}$ অংশ করিয়াছে $(\frac{5}{6}\div\frac{5}{36})$ দিনে বা 6 দিনে।

∴ সমস্ত কাজটি (6+3) বা 9 দিনে শেষ হইয়াছে।

উদাহরণ 2. কোন চৌবাচ্চা জলপূর্ণ করিবার জন্য একটি বালক 3 মিনিটে 4 সের এবং একটি বালিকা 4 মিনিটে 3 সের করিয়া জল উহাতে ঢালিতে লাগিল। চৌবাচ্চায় যদি 2 মণ 4 সের জল ধরে, তবে কতক্ষণে উহা জলপূর্ণ হইবে ?

3 মি. ও 4 মিনিটের ল. সা. গু. = 12 মিনিট। 12 মিনিটে বালকটি 4 বার ও বালিকাটি 3 বার জল ঢালে। বালক 4 বারে 4 সের × 4 বা 16 সের এবং বালিকা 3 বারে 3 সের × 3 বা 9 সের জল ঢালে।

∴ প্রতি 12 মিনিটে (16+9) বা 25 সের জল ঢালা হয়।

2 মণ 4 সের = 84 সের। 84 সেরের মধ্যে 25 সের 3 বার আছে।

∴ 12 মি. × 3 বা 36 মিনিটে 25 সের × 3 বা 75 সের জল ঢালা হইবে। আর জল ঢালিতে বাকী থাকিল (84 − 75) বা 9 সের। ঐ 36 মিনিটের পরবর্তী তৃতীয় মিনিটে বালক জল ঢালিল আরও 4 সের এবং চতুর্থ মিনিটে বালিকা ঢালিল 3 সের, ইহাতে মোট (75+7) বা 82 সের জল ঢালা হইল। বালকটি ষষ্ঠ মিনিটে আবার 4 সের জল আনিয়া মাত্র 2 সের জল ঢালিলেই চৌবাচ্চাটি পূর্ণ হইবে।

∴ চৌবাচ্চাটি (36+6) বা 42 মিনিটে জলপূর্ণ হইবে।

উদাহরণ 3. একটি চৌবাচ্চায় তিনটি নল আছে। প্রথম দুইটি নল দ্বারা উহা যথাক্রমে 3 ও 4 ঘণ্টায় জলপূর্ণ হয় এবং তৃতীয়টি দ্বারা উহা এক ঘণ্টায় খালি হয়। যদি নল তিনটি যথাক্রমে 1টা, 2টা ও 3টার সময় খোলা হয়, তবে কখন চৌবাচ্চাটি খালি হইবে ?

1 ঘণ্টায় প্রথম ও দ্বিতীয় নল যথাক্রমে চৌবাচ্চার $\frac{1}{3}$ ও $\frac{1}{4}$ অংশ ভর্তি করে। তৃতীয় নলটি 1 ঘণ্টায় সমস্ত চৌবাচ্চা খালি করিতে পারে।

প্রথম নলটি 1টা হইতে 3টা পর্যন্ত 2 ঘণ্টায় $\frac{1}{3}\times 2$ বা $\frac{2}{3}$ অংশ জলপূর্ণ করে এবং দ্বিতীয় নলটি 2টা হইতে 3টা পর্যন্ত 1 ঘণ্টায় $\frac{1}{4}$ অংশ ভর্তি করে।

$\therefore$ 3টার সময় মোট $(\frac{2}{3}+\frac{1}{4})$ বা $\frac{11}{12}$ অংশ জলপূর্ণ হইয়াছে। 3টার সময় তৃতীয় নলটি খোলায় তখন 3টি নলই খোলা থাকিল। 3টি নল একত্রে খোলা থাকিলে 1 ঘণ্টায় খালি হয় $(1-\frac{1}{3}-\frac{1}{4})$* বা $\frac{5}{12}$ অংশ।

$\therefore$ $\frac{11}{12}$ অংশ খালি হইবে $(\frac{11}{12} \div \frac{5}{12})$ ঘণ্টায় বা 2 ঘ. 12 মিনিটে।

$\therefore$ চৌবাচ্চাটি 3টার 2 ঘণ্টা 12 মিনিট পরে অর্থাৎ 5টা 12 মিনিটে জলশূন্য হইবে।

[***দ্রষ্টব্য :** তৃতীয় নলটি খোলা থাকিলে 1 ঘণ্টায় পূরা চৌবাচ্চা (পূরা 1) খালি হয়, কিন্তু ঐ সঙ্গে অন্য নল দুইটি $\frac{1}{3}$ ও $\frac{1}{4}$ অংশ ভর্তি করে।
$\therefore$ 1 ঘণ্টায় $(1-\frac{1}{3}-\frac{1}{4})$ অংশ খালি হয়।]

বার নির্ণয়। ইহা পূর্বের শ্রেণীতে তোমরা শিখিয়াছ।

উদাহরণ। প্রথম খৃষ্টাব্দের (1 A. D.) জানুয়ারীর প্রথম দিন সোমবার ছিল। 1931 সালের 10ই মার্চ কি বার ছিল ? [ক. প্র. '43]

প্রথম খৃষ্টাব্দের 1লা জানুয়ারী হইতে 1930 খৃষ্টাব্দের শেষ তারিখ পর্যন্ত (লিপ্ ইয়ার বাদে) দিন সংখ্যা $=365 \times 1930=704450$. এখন দেখিতে হইবে, 1930 বৎসরে কয়টি লিপ্ ইয়ার হয়। 1930কে 4 দিয়া ভাগ করিলে ভাগফল হয় 482, সুতরাং 482টি লিপ্ ইয়ার হইবার কথা. কিন্তু শতাব্দীগুলি যদি 400 দ্বারা বিভাজ্য হয়, তবে লিপ্ ইয়ার হইয়া থাকে, সুতরাং 1930 বৎসরে যে 19টি শতাব্দী আছে তন্মধ্যে মাত্র 4টি লিপ্ ইয়ার, আর 15টি লিপ্ ইয়ার নহে বলিয়া মোট লিপ্ ইয়ার হইবে (482 – 15) বা 467টি।
$\therefore$ লিপ্ ইয়ার ধরিয়া 1930 বৎসরে মোট দিন সংখ্যা $=704450+467$.

আবার, 1931 খৃষ্টাব্দের 1লা জানুয়ারী হইতে 10ই মার্চ পর্যন্ত দিন সংখ্যা $=(31+28+10)=69$.

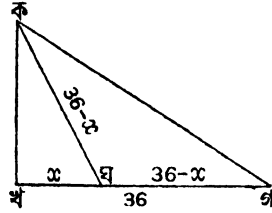
$\therefore$ মোট দিন সংখ্যা $=704450+467+69=704986$, ইহাকে 7 দিয়া ভাগ করিলে অবশিষ্ট থাকে 2.

প্রথম খৃষ্টাব্দের প্রথম দিন সোমবার হইতে পরবর্তী রবিবার পর্যন্ত 7 দিনে সপ্তাহ পূর্ণ হয়, এইভাবে প্রত্যেক সপ্তাহের শেষ দিন রবিবার হয় ; সুতরাং এখানে শেষ সপ্তাহের পর আর 2 দিন থাকায় নির্ণেয় বার **মঙ্গলবার** ছিল।

পাটীগণিতে বীজগণিতের প্রয়োগ

উদাহরণ 1. 12 গজ উচ্চ একটি বৃক্ষের মূলে একটি সর্পের গর্ত ছিল। সর্পটি গর্তের দিকে যাইবার সময় যখন গর্ত হইতে 36 গজ দূরে তখন বৃক্ষ-চূড়াস্থিত একটি ময়ূর তাহাকে আক্রমণ করিতে ধাবিত হইল। সর্পটি যেস্থানে ময়ূর কর্তৃক আক্রান্ত হইল তাহা সর্পটি প্রথম যেখানে দৃষ্ট হয় সেস্থান

হইতে যতদূর, বৃক্ষচূড়া হইতেও ততদূর। গর্ত হইতে কতদূরে সর্পটি ধৃত হইয়াছিল ?

চিত্রে **খক** বৃক্ষ, **ক** বিন্দুতে ময়ূর ও **খ** বিন্দুতে সর্পের গর্ত আছে। সর্পটি প্রথমে **গ** বিন্দুতে দৃষ্ট হইয়া **ঘ** বিন্দুতে ধৃত হইল। **কঘ** ও **গঘ** সমান। **খঘ** দূরত্ব নির্ণয় করিতে হইবে।

এখানে **কখ** $=12$ গজ এবং **খগ** $=36$ গজ।

মনে কর, **খঘ** $=x$ গজ, সুতরাং **কঘ** $=$ **গঘ** $=(36-x)$ গজ।

এক্ষণে, $\angle$ **কখঘ** সমকোণ বলিয়া, $(\text{কখ})^2+(\text{খঘ})^2=(\text{কঘ})^2$,

বা, $12^2+x^2=(36-x)^2$, বা, $12^2+x^2=36^2-72x+x^2$,

বা, $72x=36^2-12^2=(36+12)(36-12)=48\times 24$,

$\therefore \quad x=\frac{48\times 24}{72}=16$. $\quad\therefore$ গর্ত হইতে 16 গজ দূরে সর্পটি ধৃত হয়।

উদাহরণ 2. একই সময়ে একটি ট্রেণ কলিকাতা হইতে মধুপুর অভিমুখে এবং অন্য একটি ট্রেণ মধুপুর হইতে কলিকাতা অভিমুখে রওনা হয়। উভয় ট্রেণের সাক্ষাৎ হইবার 1 ঘণ্টা ও 4 ঘণ্টা পরে ট্রেণ দুইটি যথাক্রমে মধুপুর ও কলিকাতা পৌঁছিল। প্রমাণ কর যে, একটি ট্রেণের গতিবেগ অন্য ট্রেণের গতিবেগের দ্বিগুণ। (ক. প্র. 1946)

মনে কর, প্রথম ও দ্বিতীয় ট্রেণের গতিবেগ যথাক্রমে ঘণ্টায় x ও y মাইল। অতএব, উভয় ট্রেণের সাক্ষাতের পর মধুপুরগামী ট্রেণ 1 ঘণ্টায় গিয়াছে x মাইল, এবং কলিকাতাগামী ট্রেণ 4 ঘণ্টায় গিয়াছে $4y$ মাইল। সুতরাং যখন উভয়ের সাক্ষাৎ হয় তখন সমকালে প্রথম ট্রেণ $4y$ মাইল এবং দ্বিতীয় ট্রেণ x মাইল গিয়াছিল। প্রথম ট্রেণ ঘণ্টায় x মাইল বেগে $4y$ মাইল যায় $\frac{4y}{x}$ ঘণ্টায় এবং দ্বিতীয় ট্রেণ ঘণ্টায় y মাইল বেগে x মাইল যায় $\frac{x}{y}$ ঘণ্টায়।

$\therefore \quad \frac{4y}{x}=\frac{x}{y}$, বা, $x^2=4y^2$, $\quad\therefore \quad x=2y$.

$\therefore$ প্রথম ট্রেণের গতিবেগ দ্বিতীয় ট্রেনের গতিবেগের দ্বিগুণ।

বিবিধ সমাধান

উদাহরণ 1. চাউলের মণ 20 টাকা হইলে কোন গৃহস্থের মোট 450 টাকা সংসার খরচ হয় এবং চাউলের মণ 15 টাকা হইলে মোট 375 টাকা খরচ হয়। ঐ গৃহস্থের চাউলের খরচ ছাড়া অন্যান্য খরচ কত হয় ? (প. ব. বো. 1954)

1 মণ চাউলের মূল্য (20 টা. − 15 টা.) বা 5 টাকা কমিলে মোট খরচ কমে (450 টা. − 375 টা.) বা 75 টাকা।

∴ ঐ গৃহস্থের মোট চাউল লাগে (75÷5) মণ বা 15 মণ।

এক্ষণে, প্রথম পক্ষে 20 টাকা দরে 15 মণ চাউলের মূল্য = 20 টা. × 15 = 300 টাকা। ∴ নির্ণেয় অন্যান্য খরচ = 450 টা. − 300 টা. = 150 টাকা।

উদাহরণ 2. কিছু বস্ত্র ও 216 পাউণ্ড বেতনে এক বৎসরের জন্য একটি ভৃত্য নিযুক্ত করা হইল, কিন্তু 10 মাস কাজ করিয়া সে ঐ বস্ত্র ও 176 পাউণ্ড লইয়া চলিয়া গেল। ঐ বস্ত্রের মূল্য কত?

12 মাসের মোট পাওনা = বস্ত্রের মূল্য + 216 পাউণ্ড

এবং 10 " " " = বস্ত্রের মূল্য + 176 পাউণ্ড

∴ 2 মাসের মোট পাওনা = 40 পাউণ্ড (বিয়োগ করিয়া)

∴ 12 মাসের মোট পাওনা = 240 পাউণ্ড।

∴ বস্ত্রের মূল্য + 216 পাউণ্ড = 240 পাউণ্ড

∴ নির্ণেয় বস্ত্রের মূল্য = 240 পা. − 216 পা. = 24 পাউণ্ড।

উদাহরণ 3. একটি মাঠের ঘাস প্রতিদিন সমহারে বৃদ্ধি পায়। ঐ মাঠের ঘাস 30টি গরু 160 দিনে এবং 36টি গরু 120 দিনে খাইতে পারে। কয়টি গরু 90 দিনে ঐ মাঠের ঘাস খাইবে? (গৌ. প্র. 1952)

মূল ঘাস + 160 দিনের বর্ধিত ঘাস = 1টা গরুর (30 × 160) বা 4800 দিনের খাদ্য···(1)

এবং মূল ঘাস + 120 দিনের বর্ধিত ঘাস = 1টা গরুর (36 × 120) বা 4320 দিনের খাদ্য···(2)

এক্ষণে, (1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া পাই,

40 দিনের বর্ধিত ঘাস = 1টা গরুর (4800 − 4320) বা 480 দিনের খাদ্য,

∴ 1 দিনের বর্ধিত ঘাস = 1টা গরুর $\frac{480}{40}$ বা 12 দিনের খাদ্য

∴ 90 দিনের বর্ধিত ঘাস = 1টা গরুর (12 × 90) বা 1080 দিনের খাদ্য।

আবার, মূল ঘাস + 160 দিনের বর্ধিত ঘাস = 1টা গরুর 4800 দিনের খাদ্য,

∴ মূল ঘাস + 1টা গরুর (160 × 12) বা 1920 দিনের খাদ্য = 1টা গরুর 4800 দিনের খাদ্য,

∴ মূল ঘাস = 1টা গরুর (4800 − 1920) বা 2880 দিনের খাদ্য।

অতএব, মূল ঘাস + 90 দিনের বর্ধিত ঘাস = 1টা গরুর (2880 + 1080) বা 3960 দিনের খাদ্য।

∴ মূল ঘাস + 90 দিনের বর্ধিত ঘাস = $\frac{3960}{90}$ বা 44টি গরুর 90 দিনের খাদ্য।

∴ 90 দিনের ঐ মাঠের ঘাস 44টি গরুতে খাইবে।

প্রশ্নমালা 31

[ত্রৈরাশিক ও বহুরাশিক]

1. কোন কাজ 12 জন লোক 30 দিনে করিতে পারে। উহা 20 দিনে করিতে হইলে আর কতজন অতিরিক্ত লোক লাগিবে?

2. যখন এক বুশেল গমের মূল্য 12 শিলিং, তখন 4 পেনি মূল্যের রুটির ওজন 50 আউন্স। এক বুশেল গমের মূল্য 25 শিলিং হইলে 5 পেনি মূল্যের রুটির ওজন কত হইবে?

3. 8 জন পুরুষ বা 15 জন স্ত্রীলোক 30 দিনে 120 পাউণ্ড উপার্জন করে। 21 জন পুরুষ ও 24 জন স্ত্রীলোক 45 দিনে কত উপার্জন করিবে?

4. কোন ঠিকাদার 350 দিনে 12 মাইল দীর্ঘ খাল কাটিয়া দিবার চুক্তি করিল। সে 45 জন লোক নিযুক্ত করিয়া 200 দিন পরে দেখিল মাত্র $4\frac{1}{2}$ মাইল খাল কাটা হইয়াছে। তখন আরও কতজন লোক নিযুক্ত করিলে নির্দিষ্ট সময়ে কাজটি শেষ হইবে? [পা. প্র. 1942]

[সময় ও কার্য]

5. ক একটি কাজ 12 দিনে ও খ 6 দিনে করিতে পারে। তাহারা একত্রে 2 দিন কাজ করার পর খ চলিয়া গেল। আর কতদিনে ক কাজটি শেষ করিবে? [ক. প্র. '31]

6. একটি কাজ ক ও খ 12 দিনে, খ ও গ 15 দিনে এবং ক ও গ 20 দিনে করিতে পারে। প্রত্যেকে পৃথক্ ভাবে ইহা কতদিনে করিবে?

7. একটি লোক ও একটি বালক 24 দিনে একটি কাজ করিতে পারে। লোকটি যদি শেষ 6 দিন একা কাজ করে, তবে 26 দিনে কাজটি শেষ হয়। বালক একা কতদিনে কাজটি করিবে?

8. ক ও খ যথাক্রমে 9 ও 18 দিনে একটি কাজ করিতে পারে। তাহারা একত্রে কাজ আরম্ভ করিয়া কাজটি শেষ হইবার 3 দিন পূর্বে ক চলিয়া গেল। কাজটি মোট কতদিনে সম্পন্ন হইল? [ক. প্র. '44]

9. ক 8 দিনে ও খ 6 দিনে একটি কাজ করিতে পারে; কিন্তু গ-এর সাহায্যে তাহারা 3 দিনে কাজটি শেষ করিয়া 7 টাকা 8 আনা মজুরী পাইল। কে কত মজুরী পাইবে? [ঢা. বো. '26]

10. একটি কাজ ক 20 দিনে এবং ক ও খ একত্রে $11\frac{1}{9}$ দিনে করিতে পারে। ক একা 8 দিন, পরে ক ও গ একত্রে 6 দিন কাজ করার পর খ একা 3 দিনে কাজটি শেষ করিল। খ ও গ একত্রে কাজটি কতদিনে করিতে পারে? [ঢা. বো. '35]

11. তিনটি নল কোন চৌবাচ্চাকে যথাক্রমে 5, 6 ও $7\frac{1}{2}$ মিনিটে জলপূর্ণ করে। নল তিনটি একসঙ্গে খুলিয়া 1 মিনিট পরে প্রথমটি বন্ধ করা হইল। আর কতক্ষণে চৌবাচ্চাটি জলপূর্ণ হইবে? [ক. প্র. 1903]

12. দুইটি নল দ্বারা যথাক্রমে 20 ও 30 মিনিটে একটি চৌবাচ্চা ভর্তি হয়। উভয় নল খুলিয়া দিবার কতক্ষণ পরে প্রথম নলটি বন্ধ করিলে আর 10 মিনিটে চৌবাচ্চাটি পূর্ণ হইবে? [ক. প্র. '26]

13. একটি চৌবাচ্চায় 3টি নল সংযুক্ত আছে। প্রথম নলটি 3 ঘণ্টায় ও দ্বিতীয় নলটি 3 ঘ. 45 মিনিটে চৌবাচ্চাটি জলপূর্ণ করিতে পারে এবং তৃতীয় নলটি 1 ঘণ্টায় উহাকে জলশূন্য করে। নল তিনটি যথাক্রমে 1টা, 2টা ও 3টার সময় খুলিয়া দেওয়া হইল; কখন চৌবাচ্চাটি জলশূন্য হইবে? [পা. প্র. '29]

14. একটি চৌবাচ্চায় দুইটি নল আছে। প্রথমটি দ্বারা উহা 40 মিনিটে ভর্তি হয় এবং দ্বিতীয়টি দ্বারা 1 ঘণ্টায় খালি হয়। যদি পর পর মিনিটে পর্যায়-ক্রমে একটি করিয়া নল খোলা থাকে, তবে কত সময়ে চৌবাচ্চাটি জলপূর্ণ হইবে? [পা. প্র. '31]

15. তিনটি বালক একটি চৌবাচ্চা জলপূর্ণ করিতে আরম্ভ করিয়া প্রথম বালক 5 মিনিটে 1 পাঁইট, দ্বিতীয় বালক 6 মিনিটে 1 কোয়ার্ট এবং তৃতীয় বালক 8 মিনিটে 1 গ্যালন জল ঢালিতে লাগিল। যদি ঐ চৌবাচ্চায় $50\frac{1}{2}$ গ্যালন জল ধরে, তবে কতক্ষণে উহা জলপূর্ণ হইবে? [ক. প্র. '45]

[2 পাঁইট = 1 কোয়ার্ট, 4 কোয়ার্ট = 1 গ্যালন]

[বিবিধ]

16. এক ব্যক্তির আয় 150 পাউণ্ড কমিয়া গেল; কিন্তু আয়কর প্রতি পাউণ্ডে 6 পেন্স হইতে 7 পেন্স বর্ধিত হওয়ায় তাহাকে পূর্বের সমান আয়কর দিতে হইল। এখন তাহার আয় কত?

17. একটি জামা ও 192 পাউণ্ড নগদ দিবার চুক্তিতে একটি ভৃত্যকে এক বৎসরের জন্য নিযুক্ত করা হইল। সে 8 মাস কাজ করিয়া জামাটি ও 125 পাউণ্ড নগদ লইয়া চলিয়া গেল। জামাটির মূল্য কত?

18. 1942 খৃষ্টাব্দের 8ই জানুয়ারী বৃহস্পতিবার হইলে, 1900 খৃষ্টাব্দের প্রথম দিন কি বার ছিল?

19. কানপুর হত্যাকাণ্ড 1857 খৃষ্টাব্দের 28শে জুন অনুষ্ঠিত হয়। ঐ দিন কি বার ছিল? [পা. প্র. 1905]

[এরূপ স্থলে প্রথম খৃষ্টাব্দের প্রথম দিন সোমবার ধরিবে।]

20. 1925 খৃষ্টাব্দের 18ই ফেব্রুয়ারী কি বার ছিল? [পা. প্র. '34]

21. চালের দর টাকায় 12 সের হইলে কোন গৃহস্থের মাসিক 80 টাকা সংসার খরচ হয় এবং চালের দর টাকায় 15 সের হইলে 77 টাকা খরচ হয়। চালের দর টাকায় 18 সের হইলে মাসিক খরচ কত হইবে ?

22. একই স্থানের দুইজন ট্রেণযাত্রীর মোট 8 মণ মাল ছিল এবং অতিরিক্ত মালের জন্য তাহাদিগকে যথাক্রমে 8 টাকা ও 4 টাকা মাশুল দিতে হইল। সমস্ত মাল একজনের হইলে অতিরিক্ত মালের মাশুল 14 টাকা লাগিত। একজনে কত মাল বিনা মাশুলে লইতে পারে এবং প্রত্যেকের নিকট কত মাল ছিল ? [B. C. S. '39]

23. আমার বর্তমান বয়সের দ্বিগুণ হইতে, 6 বৎসর পূর্বে আমার যে বয়স ছিল তাহার 3 গুণ বাদ দিলে আমার বর্তমান বয়স পাওয়া যায়। আমার বর্তমান বয়স কত ?

24. একটি মাঠের ঘাস প্রতিদিন সমহারে বৃদ্ধি পায়। ঐ মাঠের ঘাস 30টি গরু 80 দিনে এবং 36টি গরু 60 দিনে খাইতে পারে। কয়টি গরু 45 দিনে ঐ মাঠের ঘাস খাইবে ? [C. U. '45]

বিবিধ প্রশ্নমালা 32

1. 7 প. 18 শি. 8 পে. এর $\frac{\text{3 হ. 3 কো. 14 পা.}}{\text{2 হ. 1 কো. 20 পা.}}$ কে সরল কর।

[ক. প্র. '12]

2. সরল কর : 3 গিনির $\frac{\text{1 টা. 9 আনা}}{\text{৬ টা. 4 আনা}}$. [পা. প্র. '18]

3. একটি গাড়ীর সম্মুখের চাকার পরিধি 9 ফুট 11 ইঞ্চি এবং পশ্চাতের চাকার পরিধি 12 ফুট 9 ইঞ্চি। গাড়ীখানি কোন্ ক্ষুদ্রতম পথ যাইলে উভয় চাকা পূর্ণসংখ্যকবার ঘুরিবে ? [ক. প্র. '17]

4. 5 টাকা 10 আনায় ও 7 টাকা 5 আনায় অখণ্ড কয়েক সের করিয়া লবণ পাওয়া যায়। প্রতি সেরের মূল্য যদি 4 আনা ও 5 আনার মধ্যে হয়, তবে 1 সের লবণের মূল্য কত ? [ঢা. বো. '40]

5. 15 টা. 10 আনা, 21 টা. 14 আনা ও 28 টা. 2 আনা যথাক্রমে কতকগুলি পুরুষ, স্ত্রীলোক ও বালককে ভাগ করিয়া দেওয়ায় প্রত্যেকে সমান ভাগ পাইল। লোক সংখ্যা যতদূর সম্ভব কম হইলে মোট কত লোক ছিল ?

[ক. প্র. '39]

6. কোন ব্যক্তি তাহার গন্তব্য পথের $\frac{3}{7}$ অংশ নৌকায়, $\frac{2}{5}$ অংশ ট্রেণে এবং অবশিষ্ট 12 মাইল হাঁটিয়া গেল। ঐ পথের দৈর্ঘ্য কত ?

[ঢা. বো. '26]

7. যখন চাউলের মণ 5 টাকা তখন যে খরচে 20 জন লোককে এক দিন খাওয়ান যায়, চাউলের মণ যখন 4 টাকা তখন সেই খরচে কত জনকে একদিন খাওয়ান যাইবে ?

8. যদি 45 জন স্ত্রীলোক 48 দিনে 207 টাকা উপার্জন করে, তবে কত জন পুরুষ 16 দিনে 76 টা. 10আ. 8 পাই উপায় করিবে ? (প্রত্যেক পুরুষের দৈনিক বেতন প্রত্যেক স্ত্রীলোকের বেতনের দ্বিগুণ।)

9. কতকগুলি বালক একত্রে 81 টাকা খরচ করিল। যতজন বালক ছিল, প্রত্যেকে তাহার দ্বিগুণ সংখ্যক দুয়ানি খরচ করিয়াছিল। বালকদিগের সংখ্যা নির্ণয় কর। [ক. প্র. '26]

10. ঘণ্টায় 4 মাইল করিয়া হাঁটিয়া 8·1 একর পরিমিত একটি বর্গাকার জমির পরিসীমা প্রদক্ষিণ করিতে কত সময় লাগিবে ? [প. প্র. '32]

11. একটি ষ্টীম-রোলারের পরিধি 12 ফুট 6 ইঞ্চি এবং বিস্তার 5 ফুট 9 ইঞ্চি। উহা 10 বার ঘুরিলে কি পরিমাণ স্থানের উপর দিয়া যাইবে ?

12. একটি বাগানের দৈর্ঘ্য 21 গজ ও প্রস্থ 10 গজ এবং উহার বাহিরে চারিধারে 6 ফুট প্রশস্ত একটি পথ আছে। প্রতি বর্গগজ $5\frac{4}{7}$ পাই হিসাবে পথটি পাকা করিতে কত খরচ হইবে ? [ঢা. প্র. '33]

13. একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 48 ফুট ও প্রস্থের 3 গুণ। উহার পরিসীমার সমান পরিসীমা-বিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রকে $18'' \times 8''$ মাপের পাথর দিয়া বাঁধাইতে কতগুলি পাথর লাগিবে ? [ঢা. প্র. '32]

14. 100 ফুট দীর্ঘ ও 80 ফুট বিস্তৃত মাঠের ভিতরে চারিধারে 8 ফুট প্রশস্ত একটি পথ আছে। পথটির ক্ষেত্রফল কত, এবং উহাকে প্রতি বর্গগজ 5 আনা 3 পাই হিসাবে বাঁধাইতে কত ব্যয় হইবে ? [ক. প্র. '12]

15. একটি ঘরের উচ্চতা 13 ফুট এবং দৈর্ঘ্য প্রস্থের দ্বিগুণ। উহার দেওয়ালগুলি ঢাকিতে 2 ফুট প্রস্থের 143 গজ কাগজ লাগিল। ঘরটির মেঝের ক্ষেত্রফল কত ? [ঢা. বো. '34]

16. প্রতি বর্গফুট 5 শিলিং হিসাবে একটি 10 ফুট উচ্চ ও 20 ফুট দীর্ঘ ঘরের দেওয়ালগুলি রং করিতে 190 পাউণ্ড খরচ হইল। উহার মেঝেতে প্রতি বর্গগজে 3 টাকা 2 আনা হিসাবে কার্পেট বসাইতে কত খরচ হইবে ? [ক. প্র. '50]

17. 16 ফুট বর্গ একটি ঘরের দেওয়ালগুলি কাগজ দ্বারা আবৃত করিতে প্রতি বর্গগজে 8 আনা হিসাবে মোট 40 টাকা খরচ হইল। ঘরটির উচ্চতা কত ? [ঢা. প্র. '26]

18. এক গ্যালন জলের ওজন 10 পাউণ্ড এবং 1000 আউন্স জল 1 ঘনফুট আধারে থাকে। 12 ফুট × 10 ফুট × 2 ফুট 6 ইঞ্চি আয়তনের চৌবাচ্চায় কত গ্যালন জল ধরিবে ?

19. কোন স্থানে 7″ বৃষ্টিপাত হইল। যদি প্রতি ঘনফুট জলের ওজন 800 আউন্স হয়, তবে ঐ স্থানে প্রতি একরে কত টন বৃষ্টিপাত হইয়াছে ?

20. লবণের মূল্য $12\frac{1}{2}\%$ কমিয়া যাওয়ায় 14 আনায় 2 সের লবণ বেশী পাওয়া গেল। পূর্বে প্রতিসের লবণের মূল্য কত ছিল ? [পা. প্র. '32]

21. বার্ষিক $4\frac{1}{4}\%$ হার সুদে 2187 পা. 10 শিলিং-এর 219 দিনের সুদ কত ? [সি. সা.]

22. বার্ষিক 4% হার সুদে যে সময়ে 120 পাউণ্ডের সুদ 15 পাউণ্ড হয়, সেই সময়ে 500 টাকার সবৃদ্ধিমূল 700 টাকা হইলে সুদের হার কত ?

23. $3\frac{3}{4}\%$ হার সুদে 375 পা. 10 শি. এর 2 বৎসর 4 মাসের চক্রবৃদ্ধি কত ?

24. 3% হার সুদে 3 বৎসরে 3143 পা. 6 শি. 8 পেন্সের চক্রবৃদ্ধি কত ?

25. 5% হার সুদে 6 বৎসরে 1000 পাউণ্ডের সমূল চক্রবৃদ্ধি কত হয় ?

26. $4\frac{1}{2}\%$ হার সুদে $2\frac{1}{4}$ বৎসরে 660 টাকা 10 আনার সমূল চক্রবৃদ্ধি নির্ণয় কর।

27. কোন দ্রব্য 3 টাকা 2 আনায় ক্রয় করিয়া 4 টাকায় বিক্রয় করিলে শতকরা কত লাভ হইবে ?

28. প্রতি পাউণ্ড চা 5 শিলিং 6 পেন্স দরে বিক্রয় করায় এক ব্যক্তির মূলধনের $\frac{1}{21}$ লাভ হইল। সে 200 পাউণ্ড চা কি মূল্যে ক্রয় করিয়াছিল ? [ঢা. প্র. 1926]

29. আনায় 4টি দরে কতকগুলি কলা এবং আরও ততগুলি আনায় 3টি দরে কিনিয়া সমস্তগুলি দুই আনায় 7টি করিয়া বিক্রয় করিলে শতকরা কত লাভ বা ক্ষতি হইবে ? [ক. প্র. '26]

30. কোন ব্যবসায়ী মালের ধার্য মূল্যের 5% ক্রেতাকে কমিশন ছাড়িয়া দেয়। যে মালের আসল মূল্য 712 টাকা 8 আনা তাহা বিক্রয় করিয়া $33\frac{1}{3}\%$ লাভ করিতে হইলে ধার্য মূল্য কত করিতে হইবে ? [ক. প্র. 1908]

31. এক ব্যক্তিকে কোন নির্দিষ্ট সময়ে একটি সভায় পৌঁছিতে হইবে। ঘণ্টায় 6 মাইল করিয়া গেলে তাহার তথায় পৌঁছিতে 12 মিনিট বিলম্ব হয়, কিন্তু ঘণ্টায় 8 মাইল বেগে গেলে 8 মিনিট পূর্বে পৌঁছায়। তাহাকে কতদূর যাইতে হইবে ?

32. কোন ট্রেণ ঘণ্টায় 42 মাইল চলিলে যথাসময়ে গন্তব্য স্থানে পৌঁছায়, কিন্তু ঘণ্টায় 40 মাইল চলিলে সেখানে পৌঁছিতে 15 মিনিট বিলম্ব হয়। গন্তব্যস্থানের দূরত্ব কত ?

33. ঘণ্টায় $33\frac{9}{4}$ মাইল বেগে ধাবমান 130 গজ দীর্ঘ একখানি ট্রেণ কতক্ষণে 200 গজ দীর্ঘ একটি স্টেশনকে অতিক্রম করিবে ?
[ক. প্র. '54 ; ঢা. বো. '37]

34. 110 গজ ও 88 গজ দীর্ঘ দুইটি ট্রেণ যথাক্রমে ঘণ্টায় 20 মাইল ও 25 মাইল বেগে যাইতেছে। যদি উহারা (1) একই দিকে, (2) বিপরীত দিকে চলিতে থাকে, তবে কতক্ষণে পরস্পরকে অতিক্রম করিবে ? [ক. প্র. '47]

35. দুইজন লোক একই দিকে যাইতেছিল। 110 গজ দীর্ঘ একটি গাড়ী প্রথম ব্যক্তিকে 9 সেকেণ্ডে এবং দ্বিতীয় ব্যক্তিকে $9\frac{3}{8}$ সেকেণ্ডে অতিক্রম করিল। প্রথম ব্যক্তির গতি ঘণ্টায় 3 মাইল হইলে দ্বিতীয় ব্যক্তির গতিবেগ কত ? [প. ব. বো. '52]

36. ঘণ্টায় 5 মাইল বেগে কোন নগরের দিকে আসিতেছে এরূপ এক ব্যক্তির নিকট নগর হইতে একই সময় অন্তর পর পর দূত পাঠান হইতেছিল। দূতগণ যদি ঘণ্টায় 10 মাইল বেগে যায় এবং 8 মিনিট অন্তর তাহাদের সহিত লোকটির সাক্ষাৎ হয়, তবে কত মিনিট অন্তর দূত পাঠান হইয়াছিল ?

37. একটি বৃত্তাকার পথের পরিধি 984 গজ। দুই ব্যক্তি একই স্থান হইতে রওনা হইয়া পরস্পর বিপরীত দিকে দৌড়াইতে লাগিল। উহাদের গতিবেগ যথাক্রমে ঘণ্টায় 10 ও $10\frac{1}{2}$ মাইল। কখন ও কোথায় তাহারা (1) প্রথমবার ও (2) দ্বিতীয়বার মিলিত হইবে ? [ক. প্র. 1934]

38. কোন নগর হইতে 10 সেকেণ্ড অন্তর কামান দাগা হইতেছিল। একটি ট্রেণ ঘণ্টায় 30 মাইল বেগে নগরের দিকে আসিতেছিল। যদি শব্দের গতিবেগ সেকেণ্ডে 1144 ফুট হয়, তবে ঐ ট্রেণের যাত্রীরা কত সেকেণ্ড অন্তর কামানের শব্দ শুনিতেছিল ? [বো. প্র. 1897-98]

39. একখানি জাহাজ 9 দিন 14 ঘণ্টায় 2760 মাইল এবং একটি ট্রেণ 18 ঘণ্টায় 405 মাইল যায়। উভয়ের গতির তুলনা কর। [সি. সা.]

40. প্রতিমণ গমের মূল্য 10 টাকা 50 পয়সা হইলে 12 পয়সায় 4 ছটাক ওজনের রুটি পাওয়া যায়। 12 পয়সায় যখন $3\frac{1}{2}$ ছটাক ওজনের রুটি পাওয়া যায়, তখন একমণ গমের মূল্য কত ?

41. 25 জন লোকের 16 দিনের বেতন 766 টা. 10 আ. 8 পাই। বেতনের হার উহার অর্ধেক হইলে কয়জন লোকের 24 দিনের বেতন 1035 টাকা হইবে ? [ক. প্র. 1865]

42. কোন শিবিরে যে খাদ্য আছে তাহাতে সৈন্য প্রতি প্রত্যহ 13 আউন্স হিসাবে দিলে 4500 জনের 15 সপ্তাহ চলে। কত সৈন্য চলিয়া

গেলে ঐ খাদ্যে প্রত্যহ প্রতি সৈন্যকে 10 আউন্স হিসাবে দিয়া 27 সপ্তাহ চলিবে ? [সি. সা.]

43. আমার কাছে আধুলি, সিকি ও দুয়ানিতে মোট 280টি মুদ্রা আছে। যদি প্রত্যেক প্রকার মুদ্রাগুলির মূল্য সমান হয়, তবে কোন্ প্রকারের মুদ্রা কয়টি আছে এবং আমার নিকট মোট কত টাকা আছে ?

44. ক 800 পাউণ্ড লইয়া 1লা জানুয়ারী কোন ব্যবসায় আরম্ভ করিল এবং 3 মাস পরে খ-কে অংশীদাররূপে গ্রহণ করিল। ঐ সময়ে খ কত মূলধন নিয়োজিত করিলে বৎসরান্তে উভয়ের লভ্যাংশ সমান হইবে ? [সি. সা.]

45. 2 শিলিং 5 পেন্স ও 3 শিলিং 4 পেন্স পাউণ্ড দরের দুই প্রকার চা কি অনুপাতে মিশাইলে প্রতি পাউণ্ড মিশ্রিত চা-এর মূল্য 2 শিলিং 9 পেন্স হইবে ? [ঢা. বো. '30]

46. আয়ের প্রথম 3000 টাকা আয়করমুক্ত। আয়ের অবশিষ্টাংশের উপর টাকা প্রতি 9 পাই হারে আয়কর দেওয়ায় এক ব্যক্তিকে 120 টাকা আয়কর দিতে হইল। তাঁহার মোট আয় কত এবং মোট আয়ের উপর গড়ে টাকা প্রতি কত আয়কর দিতে হইল ? [W. B. S. F. '58]

47. লণ্ডনে এক আউন্স স্বর্ণের মূল্য 7 পা. 6 পেন্স। যদি 1 আউন্স =28·35 গ্রাম এবং 1 পাউণ্ড=4·86 ডলার হয়, তবে 21 গ্রাম স্বর্ণের মূল্য কত ডলার হইবে ? [P. U.]

48. 1 টাকা যদি 1 শি. $6\frac{3}{4}$ পেন্সের সমান হয়, তবে 1 সভারিন কত টাকার সমান ? ঐ হারে 250 সভারিন ক্রয় করিয়া যখন 1 টাকা=1 শি. 6 পে. হইল, তখন উহা বিক্রয় করিলে কত লাভ বা ক্ষতি হইবে ? [C. U. 1886]

49. একটি বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $432\frac{16}{25}$ বর্গ কিলোমিটার। 100 ফুট বেড়ার খরচ 18 টাকা 12 আনা এবং 1 মিটার=39·37 ইঞ্চি হইলে, ঐ ক্ষেত্রকে বেড়া দিয়া ঘিরিতে কত ব্যয় হইবে ? [W. B. S. E. '52]

50. আধ মাইল দৌড়ে খ 40 গজ এবং গ 75 গজ দৌড়াইলে ক দৌড়াইতে আরম্ভ করিল। যদি ক, খ ও গ-এর গতিবেগের অনুপাত 23 : 22 : 21 হয়, তবে তাহাদের মধ্যে কে কত গজে জিতিবে ?

[পা. প্র. '28]

ব্যবসায়ী বিল বা হুণ্ডি (Bill of Exchange)

বড় বড় ব্যবসায়ে সাধারণতঃ ধারে মাল বেচা-কেনা হইয়া থাকে। পরে উহার মূল্য আদান-প্রদান হয়। ধারে বেচা-কেনার সময় নগদ মূল্য না দিয়া একটি 'বিল' লেখা হয়, ঐ 'বিল' ভাঙ্গাইয়া মূল্য পাওয়া যায়।

যে ব্যক্তি ধারে মাল বিক্রয় করে তাহাকে **উত্তমর্ণ** বা **পাওনাদার** (Creditor) বলে। আর যে ব্যক্তি ধারে মাল ক্রয় করে তাহাকে **অধমর্ণ** বা **খাতক** (Debtor) বলে।

ব্যবসায়ী বিল বা হুণ্ডি (Bill of Exchange)

উত্তমর্ণ ধারে মাল বিক্রয় করিয়া সাধারণতঃ অধমর্ণের উপর এক লিখিত আদেশ বা লিখিত হুকুম (order) জারি করে। উহাতে লেখা থাকে অধমর্ণকে মালের মূল্যস্বরূপ নির্দিষ্ট পরিমাণ টাকা নির্দিষ্ট সময় অন্তে বিনা সর্তে নির্দিষ্ট ব্যক্তিকে বা তাহার নির্দেশ মত অন্য কোন ব্যক্তিকে অথবা ঐ বিলের বাহককে দিতে হইবে। অতএব বিল (Bill of Exchange) হইল— কোন ব্যক্তি কর্তৃক অন্য এক ব্যক্তিকে লিখিত ও স্বাক্ষরিত একটি হুকুম (order) যাহাতে দ্বিতীয় ব্যক্তিকে হুকুম দেওয়া হয় যে তাহাকে চাহিবামাত্র বা কোন নির্দিষ্ট সময় অন্তে নির্দিষ্ট পরিমাণ অর্থ নির্দিষ্ট ব্যক্তিকে বা তাহার নির্দেশমত কোন ব্যক্তিকে বা ঐ বিলের বাহককে (bearer) বিনা সর্তে দিতে হইবে। ঐ বিলে লিখিত অর্থের পরিমাণ অনুসারে ঐ বিলের উপর নিয়মিত মূল্যের stamp লাগাইতে হয়। বিক্রেতা এই বিল লিখিয়া ক্রেতাকে পাঠাইয়া দেয়। ঐ ক্রেতা বা অধমর্ণ ঐ বিলের উপর 'Accepted' (স্বীকৃত) এই কথাটি লিখিয়া তাহার নীচে তাহার নাম সহি করিয়া উত্তমর্ণের নিকট ফেরত পাঠায়। তখন সে আইনতঃ ঐ টাকার জন্য দায়ী হইয়া থাকিল। এইরূপ বিল সহি করাকে স্বীকৃতি (Acceptance) বলে। এই স্বীকৃতির পরেই বিলটির যথার্থ মূল্য হয়।

উপরিলিখিতভাবে বিল লেখাকে 'Drawing of the Bill' বলে। যে ব্যক্তি ঐ বিল লেখে (অর্থাৎ উত্তমর্ণ বা মাল বিক্রেতা) তাহাকে "**বিল লেখক**" বা "**হুণ্ডি লেখক**" (Drawer of the Bill) বলে। তাহাকে বিল-প্রেরক বা হুণ্ডি-প্রেরকও বলা যায়।

আর যে ব্যক্তির উপর হুকুম জারি করিয়া ঐ বিল লেখা হয় তাহাকে (অর্থাৎ অধমর্ণ বা মাল ক্রেতাকে) **"বিল-গ্রাহক"** বা **"হুণ্ডি-গ্রাহক"** (Drawee) বলা হয়।

এক্ষণে তোমরা লক্ষ্য কর যে—

(1) ব্যবসায়ের সুবিধার জন্য মূল্যের আদান-প্রদান 'বিল' বা 'হুণ্ডি' বা Draft-এর দ্বারা হইয়া থাকে।

(2) যে ব্যক্তি এই বিল লেখে (উত্তমর্ণ) তাহাকে Drawer বলে। ঐ বিলে তিনি নাম স্বাক্ষর করেন।

(3) যে ব্যক্তির উপর ঐ বিল লেখা হয় (অধমর্ণ) তাহাকে Drawee বলে। Drawee ঐ বিলে "Accepted" লিখিয়া ও নাম সহি করিয়া Drawerকে বিলটি ফেরত পাঠায়।

(4) অন্য কোন ব্যক্তিকে ঐ বিলে নির্দিষ্ট টাকা দিবার কথা লেখা থাকিলে, ঐ ব্যক্তিকে Payee (প্রাপক) বলা হয়।

(5) যে সময় অন্তে ঐ বিলের টাকা দিবার উল্লেখ থাকে তাহাকে ঐ বিলের Term বলে।

(6) ঐ বিলে বা Draft-এ টাকার পরিমাণ কথায় লেখা থাকে এবং সাধারণতঃ তাহা অঙ্কেও বামদিকের কোণে লেখা থাকে।

(7) বিলে লিখিত অর্থের পরিমাণ অনুসারে উহাতে বিভিন্ন মূল্যের Stamp দিতে হয়।

বিল ভাঙ্গান : উত্তমর্ণ অধমর্ণ-কর্তৃক স্বীকৃত (accepted) বিলটি নিজের কাছে রাখেন এবং বিলে নির্দিষ্ট তারিখের পর বিলটি দিয়া ক্রেতা বা অধমর্ণের নিকট হইতে টাকা লইয়া থাকেন।

আর যদি ঐ নির্দিষ্ট তারিখের পূর্বেই তাঁহার টাকার প্রয়োজন হয়, তবে তিনি কোন ব্যাঙ্কে গিয়া ঐ ব্যাঙ্কের নামে ঐ বিলটি লিখিয়া দিয়া ব্যাঙ্ক হইতে টাকা লইতে পারেন। ঐ ব্যাঙ্ক কিন্তু ঐ সময় হইতে যে সময় অন্তে বিলের টাকা দেয় (due) সেই তারিখ পর্যন্ত সময়ের বিলে লিখিত টাকার কোন নির্দিষ্ট হারে সুদ ঐ বিলের টাকা হইতে বাদ দিয়া বাকি টাকা দিয়া থাকে। ব্যাঙ্ক যে টাকা (সুদ) কাটিয়া রাখে তাহাকে **ব্যাঙ্কারের বাটা** (Banker's discount) বলে।

বিলের লিখিত সময় অনুসারে যে তারিখে বিলের টাকা দেয়, আইনতঃ তাহার পর আরও 3 দিন পরে টাকা দেওয়া যায়। এই 3 দিনকে অনুগ্রহের তিন দিন (Three days of grace) বলে।

এইভাবে বিলের টাকা লওয়াকে 'বিল ভাঙ্গান' (Discounting of Bill) বলে। ব্যাঙ্কার নির্দিষ্ট তারিখ অন্তে অধমর্ণের নিকট হইতে ঐ টাকা আদায় করে।

দৃষ্টান্ত ঃ এক ব্যক্তি 5ই এপ্রিল তারিখে লিখিত 6 মাস পরে দেয় 500 টাকার একটি বিল 27শে জুলাই ভাঙ্গাইল। সুদের হার 5% হইলে, ব্যাঙ্কারের বাটা কত এবং বিলের মালিক বিল ভাঙ্গাইয়া কত টাকা পাইল ?

5ই এপ্রিল তারিখে লিখিত বিলটি 6 মাস পরে দেয়, সুতরাং বিলের টাকা নামতঃ 5ই অক্টোবর দেয় ; কিন্তু অনুগ্রহের 3 দিন ধরিয়া উহা আইনতঃ 8ই অক্টোবর দেয়। বিলটি 27শে জুলাই ভাঙ্গান হইয়াছে।

28শে জুলাই হইতে 8ই অক্টোবর পর্যন্ত মোট সময়

$=(4+31+30+8)$ বা 73 দিন $=\frac{1}{5}$ বৎসর।

∴ ব্যাঙ্কার 500 টাকার 5% হারে $\frac{1}{5}$ বৎসরের সুদ কাটিয়া রাখিবে।

এখন 100 টাকার 1 বৎসরের সুদ $=5$ টাকা

∴ " " $\frac{1}{5}$ " " $=5$টা. $\times \frac{1}{5}=1$ টা.

∴ 1 " " " " $=\frac{1}{100}$ টা.

∴ 500 " " " " $=\frac{1}{100}\times 500$ টা. $=5$ টাকা।

∴ নির্ণেয় ব্যাঙ্কারের বাটা $=5$ টাকা,

এবং বিলের মালিক পাইবে $(500-5)$ টাকা বা 495 টাকা।

আর এক প্রকারে বিলটির ব্যবহার হইতে পারে। ঐ বিলের গ্রাহক বা মালিক তাঁহার নিজের কোন পাওনাদারের দেনা শোধ করার জন্য ঐ বিলখানি ঐ পাওনাদারের নামে লিখিয়া দিতে পারেন। এইভাবে লিখিয়া দিতে হইলে বিলটির উল্টা পিঠে যাহাকে বিল দেওয়া হইল তাহার নাম লিখিয়া নীচে যে ব্যক্তি বিল দিতেছে তাহার নাম সহি করিতে হয়। ইহাকে বলে **"Endorsing of a Bill" (পিঠ-সহিকরণ)**। যে ব্যক্তি ঐ বিল অন্যকে লিখিয়া দেয় তাহাকে বলে "পিঠ-সহিকারক" (Endorser), এবং যাহাকে লিখিয়া দেওয়া হয় তাহাকে বলে "পিঠ-সহি-প্রাপক" (Endorsee)। এই Endorsee আবার অন্য কোন ব্যক্তিকে ঐ ভাবে বিলটি endorse করিয়া দিতে পারে। এইভাবে বিল হস্তান্তরিত হইয়া থাকে। Endorsee ঐ বিলের টাকার মালিক হইল।

নমুনা : মনে কর, শ্রীরসিক ধর 300 টাকা মূল্যের পুস্তক শ্রীপরেশ ভাওয়ালের নিকট হইতে দুই মাসের মেয়াদে ধারে ক্রয় করিয়াছেন। এখানে পরেশ ভাওয়াল কিভাবে বিল বা draft লিখিবেন তাহা নিম্নে দেখ।

> Stamp
>
> 1/1, College Square
> Calcutta, 5th April, '56
>
> Rs, 300/-
>
> Two months after date, pay to me or my order, the sum of Rupees Three Hundred for value received.
>
> To
> Sri Rasik Dhar
> 10, Beadon Street
> Calcutta-6
>
> Paresh Bhowal

নিম্নের বিলটি ব্যাখ্যা কর :—

> Stamp
>
> 32, Wellington Street
> Calcutta, 15th June, 1932
>
> Rs. 1000/-
>
> On demand pay to Mr. Haridas Sen or order, the sum of Rupees One Thousand only for value received.
>
> M. C. Laha, Esq.
> Calcutta
>
> Rabindranath Palit

ব্যাখ্যা : এই বিলটি Inland Bill. রবীন্দ্রনাথ পালিত বিলের লেখক (Drawer of the Bill), M. C. Laha এই বিল-গ্রাহক বা অধমর্ণ (Drawee) এবং হরিদাস সেন ইহার প্রাপক (Payee)। রবীন্দ্রনাথ পালিত অধমর্ণ এম. সি. লাহাকে হুকুম (order) দিতেছেন যেন চাহিবামাত্র তিনি বিলে লিখিত এক হাজার টাকা হরিদাস সেনকে অথবা হরিদাস সেন কর্তৃক নির্দিষ্ট ব্যক্তিকে দেন।

Bank draft : কোন ব্যাঙ্ক যদি তাহারই কোন শাখা-ব্যাঙ্কের উপর বিল লেখে তবে সেই বিলকে Bank Draft বলে। বিদেশে বা স্বদেশে

কোন ব্যক্তিকে প্রাপ্য টাকা দিবার জন্য ঐ নির্দিষ্ট টাকা অনুযায়ী কমিশন সমেত স্থানীয় কোন ব্যাঙ্কে টাকা জমা দিলে, ঐ ব্যাঙ্ক প্রাপকের নিকটবর্তী স্থানীয় তাহার কোন শাখা-ব্যাঙ্কে ঐ নির্দিষ্ট টাকা দিবার জন্য যে আদেশপত্র দেয় তাহাই হইল **ব্যাঙ্ক-ড্রাফ্‌ট**।

প্রমিসরি নোট (Promissory Notes)

প্রমিসরি নোট বা **অঙ্গীকারপত্র :** কখনও কখনও অধমর্ণ উত্তমর্ণকে নির্দিষ্ট পরিমাণ অর্থ চাহিবামাত্র বা কোন নির্দিষ্ট তারিখে দিবার জন্য লিখিত অঙ্গীকারপত্র দেয়। উহাকে বলে Promissory Note. উহার নমুনা নিম্নে দেখ :—

Stamp	17, Russa Road Madras, 10th March, 1950
Rs. 500/-	

Six months after date, I promise to pay Yakub Ahmed the sum of Rupees Five Hundred only for value received.

Sukur Hossain

ব্যাখ্যা : উপরের নমুনা দেখিয়া বুঝা যাইতেছে যে উহা একটি প্রমিসরি নোট। উহাতে অধমর্ণ সুকুর হোসেন প্রতিশ্রুতি দিতেছে যে সে 10ই মার্চের 6 মাস পরে উত্তমর্ণ ইয়াকুব আমেদকে পাঁচশত টাকা দিবে।

দ্রষ্টব্য : যদি চাহিবামাত্র ঐ টাকা দিতে হয়, তবে উপরের ঐ নমুনাটিতে 'Six months after date'-এর স্থানে 'On demand' এই কথা দুইটি লিখিতে হয়।

বিল ও প্রমিসরি নোটের পার্থক্য :

(1) বিল হইল উত্তমর্ণ কর্তৃক লিখিত অধমর্ণের উপর **হুকুম** (order), কিন্তু প্রমিসরি নোট হইল উত্তমর্ণের নামে লিখিত অধমর্ণের **প্রতিশ্রুতি** (promise), ইহা হুকুম নহে।

(2) বিলে তিন পক্ষ সংশ্লিষ্ট। যথা, Drawer, Drawee এবং Payee, প্রমিসরি নোটে মাত্র দুই পক্ষ সংশ্লিষ্ট। যথা, যে অঙ্গীকারপত্র দেয় (অধমর্ণ) এবং যাহাকে দেয় (উত্তমর্ণ)।

(3) বিলের জন্য 'স্বীকৃতি'র প্রয়োজন হয়, কিন্তু প্রমিসরি নোটের জন্য তাহার প্রয়োজন হয় না।

CLS/100

№ A959705

Rs 25000/-

Name Bholanath Paper House Private Ltd

Balance	86957
Deposit	9862
Total	96819
Withdrawn	25000
Balance	71819

Date 15. 7. 63

CLS/100

№ A959705

Payee's A/C only

Indian

CALCUTTA 15-7-1963

United Bank of India Ltd.

REGD. OFFICE:- 4, CLIVE GHAT STREET, CALCUTTA-1.

58

COLLEGE STREET BRANCH

Pay Bholanath Paper House Private Ltd. or Bearer

Rupees Twenty five thousand only

Rs. 25,000/-

For CALCUTTA BOOK HOUSE

P. C. Bhowal

Proprietor

A/C

চেক (Cheque)

ব্যাঙ্ক (Bank) ঃ যদি কোন ব্যক্তি বা ব্যবসায়ী তাঁহার নিত্য প্রয়োজনের অতিরিক্ত অর্থ নিজের কাছে রাখিতে না চান, তবে তিনি উহা তাঁহার নামে কোন ব্যাঙ্কে গচ্ছিত রাখিতে পারেন। ইহাতে ব্যাঙ্কে তাঁহার নামে হিসাব (Account) খোলা হইল। তিনি ইচ্ছামত ঐ ব্যাঙ্কে মধ্যে মধ্যে আরও টাকা জমা দিতে বা প্রয়োজন অনুসারে টাকা তুলিয়া লইতে পারেন। ইহার জন্য ব্যাঙ্কে গচ্ছিতকারীর সহির নমুনা রাখিয়া দেওয়া হয়। এইরূপে ব্যাঙ্কে হিসাব খোলায় সুবিধা এই যে—

(1) ইহাতে অর্থ নিরাপদে থাকে।

(2) ঐ গচ্ছিত অর্থের উপর ব্যাঙ্ক নির্দিষ্ট হারে সুদ দিয়া থাকে।

(3) গচ্ছিতকারী তাহার কোন পাওনাদারকে টাকা দিবার জন্য ঐ ব্যাঙ্কের মাধ্যমে অর্থাৎ ঐ ব্যাঙ্কের উপর ঐ ব্যক্তির নামে ঐ টাকার চেক দিতে পারেন। এইভাবে ব্যবসায়ক্ষেত্রে টাকা দেওয়ার বিশেষ সুবিধা হয়।

চেক (Cheque) ঃ কোন ব্যক্তি যখন কোন ব্যাঙ্কে হিসাব খোলে তখন ব্যাঙ্ক লোকটিকে একখানি জমা দিবার বই (Paying-in-Book) এবং একখানি চেক বই (Cheque Book) দেয়।

ঐ ব্যক্তি যদি ঐ ব্যাঙ্কে পুনরায় কোন নগদ টাকা বা অন্যস্থান হইতে প্রাপ্ত তাহার নামে লিখিত কোন চেক জমা দিতে চায়, তবে ঐ জমা দিবার বই-এ লিখিয়া উহা জমা দেয়। ঐ বই-এর প্রত্যেক পাতা দুই অংশে বিভক্ত। প্রত্যেক অংশে ঐ ব্যক্তির হিসাবের নম্বর, নাম, টাকার পরিমাণ (নগদ টাকা, নোট বা চেক) প্রভৃতি লিখিবার ঘর আছে। ঐগুলি পূরণ করিয়া লিখিয়া ব্যাঙ্কে ঐ টাকা বা চেক জমা দিতে হয়। তখন ব্যাঙ্ক ঐ পাতার একটি অংশ কাটিয়া লয় এবং অন্য অংশে ব্যাঙ্কের ছাপ (Seal) ও গ্রহণকারী কর্মচারীর সহি দিয়া বইটি ঐ ব্যক্তিকে ফেরত দেয়। যথারীতি ঐ টাকা তাহার হিসাবে জমা হইয়া যায়। ইহাই হইল ব্যাঙ্কে টাকা জমা দিবার পদ্ধতি।

এখন দেখ ব্যাঙ্ক হইতে টাকা বাহির করিবার পদ্ধতি কিরূপ :

ঐ ব্যক্তি যদি কোন পাওনাদারকে কিছু টাকা দিতে চায়, তবে সে ঐ ব্যক্তির নামে ব্যাঙ্কের উপর চেক লিখিয়া দিতে পারে। সে ঐ চেক বই-এর একটি পাতায় যাহাকে টাকা দিতেছে তাহার নাম (payee), টাকার পরিমাণ প্রভৃতি লিখিয়া উহাতে নিজের নাম স্বাক্ষর করিয়া ঐ চেকটি পাওনাদারকে

Paying-in-slip-এর নমুনা

Date...............196

Notes......			
Silver......			
Gold......			
Cheques...			
Rs.			

Cashier........

Particulars of Payment

Notes........			
Silver.........			
Gold...			
Cheques			
"			
"			
Rs.			

Entd........ *Cashier*........

SOUTHERN BANK OF INDIA

Calcutta.......196

Paid to the credit of..............

....

the sum of Rupees.................

....

in Current Deposit Account........

By.....................

Folio........ *Ledger-keeper*.........

দেয়। চেক্ বই-এ প্রত্যেক পাতায় দুইটি অংশ আছে, একটি অংশ চেকদাতার নিকট থাকে (উহাকে counterfoil বলে) এবং অন্য অংশটি পাওনাদারকে দেওয়া হয়—উহাই চেক।

অতএব চেক হইল কোন নির্দিষ্ট ব্যক্তিকে বা ঐ ব্যক্তির নির্দেশ মত অন্য ব্যক্তিকে বা চেকের বাহককে চাহিবামাত্র কোন নির্দিষ্ট পরিমাণ অর্থ দিবার জন্য কোন ব্যাঙ্কের উপর লিখিত গচ্ছিতকারীর হুকুম (order)।

এই চেকে তিনটি পক্ষ সংশ্লিষ্ট। যথা, যে ব্যাঙ্কের উপর চেক লেখা হইতেছে (The Drawee), যে ব্যক্তি ঐ চেক দিতেছে (The Drawer) এবং যাহার নামে অর্থাৎ যাহাকে টাকা দিবার জন্য ঐ চেক লেখা হইয়াছে (The Payee)।

Payee যখন ঐ চেক ব্যাঙ্কে দিয়া টাকা লইতে যায়, তখন ব্যাঙ্ক প্রথমে দেখে যে চেকটি ঠিকভাবে লেখা হইয়াছে কি না, তাহাতে চেক-দাতার যে সহি আছে তাহা ঐ ব্যক্তির ব্যাঙ্কে রক্ষিত নমুনা-স্বাক্ষরের সহিত ঠিক মেলে কি না এবং যত টাকার চেক তত টাকা তাহার হিসাবে ব্যাঙ্কে জমা আছে কি না। এই সব যদি ঠিক থাকে, তবে ব্যাঙ্ক ঐ ব্যক্তিকে চেকে লিখিত টাকা দেয় এবং চেকের উল্টাপিঠে তাহার স্বাক্ষর লয়।

চেকের টাকা হয় উহার বাহককে দিতে হয় (payable to *Bearer*) অথবা উহাতে লিখিত কোন ব্যক্তিবিশেষকে দিতে হয় (payable to *Order*)। চেক লেখক যদি নিজেই টাকা তোলেন, তবে চেকে 'Pay' কথাটির পর অন্য নাম না লিখিয়া 'Self' কথাটি লিখিতে হয়।

Crossed cheque (রেখাঙ্কিত চেক) : চেক আবার দুই প্রকারের হইতে পারে। যথা, রেখাঙ্কিত (crossed) চেক এবং সাধারণ চেক বা অরেখাঙ্কিত (uncrossed বা open) চেক।

যদি সাধারণ চেকের উপরে বা তাহার এক কোণে দুইটি সমান্তরাল রেখা টানা হয়, তবে ঐ চেককে crossed চেক বলে। এখানে একটি বিশেষ রেখাঙ্কিত চেকের নমুনা দেওয়া হইল। ঐ চেকে যদি দুইটি রেখা ও তন্মধ্যে Payee's A/C only না লেখা হইত, তবে উহা একটি সাধারণ চেক হইত।

চেক রেখাঙ্কিত করার উদ্দেশ্য এই যে উহা উদ্দিষ্ট ব্যক্তি ভিন্ন অপর কাহারও হাতে পড়িলেও সে উহা ভাঙ্গাইতে পারিবে না। Crossed চেক ব্যাঙ্কের কাছে দিলেই উহা ভাঙ্গান যায় না, উহা কোন ব্যাঙ্কের মাধ্যমে ভাঙ্গাইতে হয়। মনে কর, তুমি Punjab Bank-এর উপর তোমার নামে লিখিত একটি crossed চেক পাইয়াছ। তুমি সোজাসুজি Punjab Bank-এ ঐ চেক দিয়া টাকা পাইবে না। উহা ভাঙ্গাইবার জন্য তোমাকে ঐ চেকখানি যে ব্যাঙ্কে তোমার

নিজের হিসাব (account) আছে সেই ব্যাঙ্কে (মনে কর State Bank of India) জমা দিতে হইবে। তোমার ঐ ব্যাঙ্ক তখন ঐ চেকখানি Punjab Bank হইতে ভাঙ্গাইয়া সেই টাকা তোমার হিসাবে জমা দিবে।

রেখাঙ্কিত চেক নানা প্রকারের হইতে পারে। নিম্নের নমুনা দেখ :—

উপরের রেখাঙ্কিত চেকগুলিকে সাধারণ রেখাঙ্কিত (Generally crossed) চেক বলে।

সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যে Not Negotiable লিখিয়া দেওয়ার উদ্দেশ্য এই যে, কোন ব্যক্তি চেকখানি কুড়াইয়া পাইয়া বা চুরি করিয়া যদি অন্য এক ব্যক্তির নামে উহা endorse করিয়া দেয়, তবে সেই endorsement ব্যাঙ্কে গ্রাহ্য হইবে না।

(5)
The State Bank of India

(6)
The Bank of India, Ltd.
A/c. Payee only

(7)
The Southern Bank, Ltd.
Not Negotiable

(8)
The Punjab Bank
Under Rupees sixty

উপরের রেখাঙ্কিত চেকগুলিকে বিশেষ রেখাঙ্কিত (specially crossed) চেক বলে। এইরূপ বিশেষ রেখাঙ্কিত করিবার অর্থ এই যে, সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যে যে ব্যাঙ্কের নাম আছে কেবল সেই ব্যাঙ্কই ঐ চেকের টাকা পাইবে।

A/c এর অর্থ Account ; সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যে A/c Payee only লিখিবার উদ্দেশ্য এই যে, যে-ব্যাঙ্কের মারফত ঐ চেক ভাঙ্গান হইতেছে সেই ব্যাঙ্ককে জানান হইতেছে যেন চেকে লিখিত ব্যক্তির হিসাবেই (Account-এ)

ঐ চেকের টাকা জমা করা হয়। মনে কর, 58 টাকার একটি চেক লিখিয়া তাহা cross করিবার সময় রেখা দুইটির মধ্যে Under Rupees Sixty লেখা হইল [নমুনা (8) দেখ]। ইহার উদ্দেশ্য এই যে প্রতারণা করিয়া ঐ চেকে লিখিত টাকার পরিবর্তন করা যাইবে না।

Cheque Dishonoured : চেক-লেখক (Drawer) কোন ব্যাঙ্কের উপর যত টাকার চেক দিয়াছে ব্যাঙ্কে তাহার নামে যদি তত টাকা জমা না থাকে, তবে ঐ ব্যাঙ্ক Payee-কে সেই চেকের টাকা দিবে না। ইহাকেই বলা হয় চেকটি dishonoured (অসম্মানিত) হইল।

চেক-লেখকের সই যদি ব্যাঙ্কে রক্ষিত তাহার স্বাক্ষরের সহিত না মেলে অথবা চেক লেখার অন্য কোন ত্রুটি থাকে তাহা হইলেও চেক অসম্মানিত হইতে পারে।

Banker's Draft : কোন এক ব্যাঙ্কার কর্তৃক অন্য এক ব্যাঙ্কারের উপর লিখিত চেককে Banker's Draft বলে। ইহাতে লিখিত টাকা চাহিবামাত্র দিতে হয়।

Exercise 33

1. Bill of Exchange কাহাকে বলে ?
2. Bill of Exchange কিরূপে লিখিতে হয় তাহার নমুনা দেখাও।
3. প্রমিসরি নোট কাহাকে বলে ? উহার নমুনা দাও।
4. চেক কাহাকে বলে ? উহা কিরূপে লিখিতে হয় ?
5. তুমি একখানি চেক পাইলে উহা ভাঙ্গাইবার জন্য কি করিবে ?
6. বিল, প্রমিসরি নোট ও চেকের পার্থক্য কি ?
7. চেক রেখাঙ্কিত করার অর্থ কি ?
8. কিরূপে চেক রেখাঙ্কিত করিতে হয় দেখাও।
9. Bill Endorse করার উদ্দেশ্য কি ?
10. পরবর্তী পৃষ্ঠাগুলিতে প্রদত্ত নমুনাগুলি ব্যাখ্যা কর :—

(*a*)

(1)

No. 30251

Rs. 1500/-

Name............Ramhari Roy

Last Balance...	3208/-
Deposit...	502/-
Total...	3710/-
Withdrawal...	1500/-
Balance...	2210/-

Fol............

Entd............

Date 5. 6. 56.

$\text{No.}\frac{\text{B.O.}}{\text{D.}}13026$

& Co.

Calcutta, 5th June, 1965

PUNJAB BANK Ltd.

51, Russa Road, Calcutta

Pay Ramhari Roy............*Or Bearer*

Rupees One Thousand Five Hundred only.

Rs. 1500/-

Mitra & Co.

(*b*)

Stamp

8, Linton Street
Bombay, 8th May, 1950

Rs. 3000/-

Two months after date, pay to Ramdas Chetty or order the sum of Rupees Three Thousand for value received.

To
S. Chetty
20, Mudaliar Rd.
Bombay

R. Naidu

(*c*)

Stamp

11, Clive Street
Calcutta, 10th July, 1943

Rs. 300/-

On demand I promise to pay Sri Jatin Das the sum of Rupees Three Hundred only for value received.

Ram Charan Koley

রাশিবিজ্ঞান (STATISTICS)

প্রথম অধ্যায়

1. রাশিবিজ্ঞানের সংজ্ঞা

কোন বিষয়ে পর্যবেক্ষণের দ্বারা সংখ্যামূলক তথ্য (data) সংগ্রহ করিয়া সেইগুলি হইতে তুলনা, বিশ্লেষণ, ব্যাখ্যা প্রভৃতি দ্বারা তত্ত্বনির্ণয় করাকে **রাশিবিজ্ঞান** (statistics) বলা হয়।

কেবলমাত্র কতিপয় তথ্যরাশি (data) সংগ্রহই রাশিবিজ্ঞানের লক্ষ্য নহে, উপরন্তু ঐ তথ্যগুলির বিশ্লেষণ ও ব্যাখ্যা দ্বারা তাৎপর্য নির্ণয় করাই রাশি-বিজ্ঞানের প্রধান উদ্দেশ্য।

অতএব তথ্যরাশির সংকলন (collection of data) এবং তাহাদের ছকবিন্যাস (tabulation), বিশ্লেষণ (analysis) এবং তাৎপর্য নির্ণয় (interpretation) এই রাশিবিজ্ঞানের অঙ্গ।

রাষ্ট্রের জনসংখ্যা, জনস্বাস্থ্য, শিল্প, শিক্ষাবিস্তার প্রভৃতি বিষয়ে নানাবিধ তথ্য নির্ণয়ের জন্য এই রাশিবিজ্ঞানের বিশেষ আবশ্যকতা আছে।

বিদ্যালয়ের ছাত্রগণের দৈনিক উপস্থিতি, তাহাদের বয়স, ওজন, উচ্চতা, পরীক্ষায় লব্ধাঙ্ক (scores) প্রভৃতি বিষয়ের বহুবিধ প্রয়োজনীয় তত্ত্ব রাশিবিজ্ঞানের সাহায্যে নির্ণয় করা যায়।

রাশিবিজ্ঞানের সাহায্যে উপরোক্তরূপে বিস্তৃত তথ্যমালার সংক্ষিপ্তসার বাহির করা হয় বলিয়া রাশিবিজ্ঞানকে **গড়-বিজ্ঞানও** (Science of averages) বলা হয়।

2. তথ্যরাশি সংগ্রহ ও ছকবিন্যাস (Collection of data and tabulation)

এলোমেলোভাবে সংগৃহীত তথ্যরাশি (data) হইতে সহজে কোন তাৎপর্য নির্ণয় করা যায় না।

ঐ সংগৃহীত তথ্যগুলিকে তাহাদের মানের ঊর্ধ্বক্রমে বা অধঃক্রমে তালিকা-ভুক্ত বা ছকে (table) বিন্যস্ত না করিলে ঐ এলোমেলো তথ্যরাশি হইতে কোন তত্ত্ব নির্ণয় করা যায় না।

মনে কর, একটি বিদ্যালয়ের 400 জন ছাত্রের এলোমেলোভাবে ওজন লইয়া দেখা গেল ওজনগুলি 24 কি. গ্রাম হইতে 56 কি. গ্রাম পর্যন্ত আছে (এখানে ওজনগুলি আসন্ন পূর্ণসংখ্যায় সংগ্রহ করা হইয়াছে)।

এক্ষণে যদি কেহ প্রশ্ন করেন যে (i) সবাপেক্ষা অধিক ওজনের ছাত্রসংখ্যা কত, (ii) কতগুলি ছাত্রের ওজন সর্বাপেক্ষা কম, (iii) কত ওজনের ছাত্রসংখ্যা সর্বাপেক্ষা অধিক, (iv) বিভিন্ন ওজনের ছাত্রসংখ্যাই বা কত, তবে ঐ সংগৃহীত ওজনগুলি দেখিয়া প্রশ্নগুলির উত্তর করা, অথবা সমগ্র 400 জন ছাত্রের ওজন সম্বন্ধে কোন ধারণা করা যায় না। এই সকল প্রশ্নের উত্তর দিতে হইলে আমাদিগকে ঐ সংগৃহীত ওজনগুলিকে (এই ক্ষেত্রে ঐগুলিই তথ্য বা data) মানের উর্ধ্ব বা অধঃক্রমে ছকে বিন্যস্ত করিতে হইবে। তৎপরে উহাদের বিশ্লেষণ করা এবং ঐ সকল প্রশ্নের সমাধান করা সহজ হইবে।

উপরের দৃষ্টান্তে প্রত্যেকটি ছাত্র হইল **ব্যষ্টি** (individual), সমগ্র 400 জন ছাত্র হইল **সমষ্টি** (aggregate) এবং ওজন হইল **লক্ষণ** (character)। এইরূপ ক্ষেত্রে ব্যষ্টির লক্ষণের মানগুলি একত্র করিয়া তাহা হইতে সমষ্টির বৈশিষ্ট্য নির্ণয় করা যায়।

3. **চল** (variable) ও **চলক** (variate) :

তোমরা জান যে, কোন পরিবর্তনশীল মানকে **চল** (variable) বলে। যে রাশির মান বা যে লক্ষণের (character) মান চল অর্থাৎ পরিবর্তনশীল তাহাকে **চলক** (variate) বলা হয়।

ছাত্রদের ওজন, উচ্চতা, পরীক্ষায় লব্ধাঙ্ক (scores), তাপমানযন্ত্রে গৃহীত তাপ-পরিমাণ প্রভৃতি চলকের দৃষ্টান্ত। অনেক স্থলে **চল** ও **চলক** একই অর্থে ব্যবহৃত হয়।

কাহারও কাহারও মতে যদি একটি রাশির মান পরিবর্তনের সঙ্গে সঙ্গে অপর একটি রাশির মান পরিবর্তিত হয় তবে প্রথমটিকে চলক (variate) এবং দ্বিতীয়টিকে চল (variable) বলা হয়। যথা :—উচ্চতা বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে দেহের ওজন বাড়ে। এখানে উচ্চতা হইল চলক এবং ওজন হইল চল। যদি কেহ ওজনকেই প্রথম পরিমাপের বিষয় বলিয়া গ্রহণ করেন এবং তাহা হইতে উচ্চতার পরিবর্তন নির্ণয় করেন, তবে সেক্ষেত্রে ওজনটি চলক এবং উচ্চতাটি চল হইবে।

এই চলক দুই প্রকার হইয়া থাকে—(1) **পরিমাণগত চলক** (বা **অবিচ্ছিন্ন চলক**) এবং (2) **সাংখ্যচলক** বা **সংখ্যাগত চলক** (বা **বিচ্ছিন্ন চলক**)।

পরিমাণগত চলক : কোন বিদ্যালয়ের ছাত্রগণের উচ্চতা একটি পরিমাণগত চলক। তদ্রূপ বয়স, ওজন প্রভৃতি পরিমাণগত চলক।

পরিমাণগত চলকের দুইটি নির্দিষ্ট সীমার (limits) মধ্যে যে কোন মান হইতে পারে। ঐ সীমার মধ্যে চলকটির মানগুলির অন্তর অতি অল্প হইতে পারে। যথা, কতিপয় বালকের বয়স-চলকের সীমা 4—6 (বৎসর) হইলে ঐ চলকের মানগুলি 4 বৎসর, 4·1 ব., 4·2 ব., 4·3 ব. প্রভৃতি অথবা $4\frac{1}{8}$ ব., $4\frac{1}{4}$ ব., প্রভৃতি হইতে পারে। এইরূপ পরিমাণগত চলককে **অবিচ্ছিন্ন চলক** (**continuous variate**) বলে।

সংখ্যাগত চলক : যে চলকের মান কেবল অখণ্ড সংখ্যায় প্রকাশিত তাহাকে সংখ্যাগত চলক বলে। যথা, কোন শ্রেণীর বালকগণের সংখ্যা, উদ্যানে বৃক্ষসংখ্যা ইত্যাদি। এইরূপ চলকের মান কখনও মিশ্র ভগ্নাংশ হইতে পারে না, উহা সর্বদা পূর্ণসংখ্যা হইবে। যেমন, বালকের সংখ্যা 4 হইতে 6 বলিলে ঐ সংখ্যা 4, 5 অথবা 6 হইতে পারে, কিন্তু $4\frac{1}{2}$, $5\frac{1}{4}$ প্রভৃতি কখনই হইবে না। যেহেতু দুইটি সীমার মধ্যে এই সংখ্যাগত চলকের মান অবিচ্ছিন্ন নহে, সেজন্য সংখ্যাগত চলককে **বিচ্ছিন্ন চলক** (**discrete** বা **discontinuous variate**) বলা হয়।

4. সাঙ্কেতিক চিহ্ন (Symbols) :

চল-কে (variable) সাধারণত X বা Y দ্বারা সূচিত করা হয়। এইরূপ N দ্বারা লব্ধ তথ্যসমূহের সংখ্যা এবং S দ্বারা যোগফল সূচিত হয়। Σ (ইহাকে Capital Sigma বলে) এই সাঙ্কেতিক চিহ্ন দ্বারাও যোগফল বুঝায়। এতদ্ব্যতীত β (beta), γ (gamma), π (pi), ϕ (phi), μ (mu) σ (sigma) প্রভৃতি গ্রীসীয় অক্ষর সাঙ্কেতিক রূপে ব্যবহৃত হয়।

5. তথ্যসংগ্রহ ও ছকবিন্যাসের পদ্ধতি :

তথ্য নানাবিধ পদ্ধতিতে সংগ্রহ করা হইয়া থাকে। যথা :

(1) ব্যক্তিগত পর্যবেক্ষণের সাহায্য লইয়া ;

(2) নানা ব্যক্তি, কোম্পানি বা কারখানার নিকট প্রশ্নাবলী পাঠাইয়া ;

(3) সরকার বা অন্য কোন প্রতিষ্ঠান কর্তৃক প্রকাশিত বার্ষিক বিবরণী (annual report) পাঠ করিয়া ; ইত্যাদি।

সংগৃহীত তথ্যগুলি অসজ্জিতভাবে (unclassified or ungrouped) তালিকাভুক্ত বা ছকে বিন্যস্ত থাকিলে সেগুলিকে **কাঁচা তথ্য** (raw data বা unclassified data) বলে। আর ঐ তথ্যগুলিকে কোন ছকে তাহাদের মানের ঊর্ধ্বক্রমে (বা অধঃক্রমে) সজ্জিত করিলে সেইগুলিকে **পংক্তিক্রমে বিন্যস্ত তথ্য** (arrayed data) বলে।

অবিন্যস্ত তথ্যরাশি

উদাহরণ 4. নিম্নে কোন শ্রেণীর 60 জন ছাত্র একটি পরীক্ষায় যে নম্বরগুলি (scores) পাইয়াছে তাহার তালিকা দেওয়া হইল :

ছক নং 1

86	97	85	92	71	105
96	83	99	102	108	103
71	84	80	108	87	113
97	83	85	93	94	96
76	89	72	90	100	97
79	93	88	98	92	94
111	90	93	75	87	88
94	107	90	94	112	90
94	95	101	90	81	77
87	89	83	104	99	82

ছকটি দেখিয়াই বুঝা যায় যে উহাতে তথ্যগুলি অবিন্যস্তরূপে লিখিত আছে। উহা হইতে সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন নম্বর কত, কতজন 76-এর বেশী, কতজন 83-র কম নম্বর পাইয়াছে, কতগুলি ছাত্র একই নম্বর পাইয়াছে, প্রভৃতি বিষয় সহজে বুঝা যায় না। সেইজন্য উপরের তালিকাভুক্ত কাঁচা তথ্যগুলিকে উহাদের মানের উর্ধ্বক্রমে সাজান হইতেছে (ছক নং 2 দেখ)।

বিন্যস্ত পংক্তি (Array)

ছক নং 2

71	83	88	92	96	102
71	83	88	93	96	103
72	83	89	93	97	104
75	84	89	93	97	105
76	85	90	94	97	107
77	85	90	94	98	108
77	86	90	94	99	108
80	87	90	94	99	111
81	87	90	94	100	112
82	88	92	95	101	113

এই ছক দেখিয়া বলা যায় যে, এখানে সর্বনিম্ন নম্বর 71, সর্বোচ্চ নম্বর 113 এবং নম্বরগুলি 71 হইতে 113 বলিয়া নম্বরগুলির প্রসার (range)=113 – 71

=42 অর্থাৎ 42 রকমের নম্বর আছে। কিন্তু 85 হইতে 95 পর্যন্ত কয়জন নম্বর পাইয়াছে, 100-এর নীচে কতকগুলি ছাত্রের নম্বর আছে, ইত্যাদি প্রশ্নের উত্তর ছক নং 2 হইতেও সহজে দেওয়া যায় না। ইহার জন্য ঐ তথ্যগুলিকে অন্যরূপে সাজাইতে হইবে।

এইরূপে সংগৃহীত তথ্যরাশিকে (1) তাহাদের সাংখ্যমান, গড়, প্রসার-বিভাগ অনুসারে, (2) তাহাদের উর্ধ্বক্রমে বা অধঃক্রমে, অথবা (3) পরিসংখ্যানের উদ্দেশ্য পরিস্ফুট করিয়া বিশেষ প্রণালীতে সারনী বা ছক (table) বা তালিকাভুক্ত করা হইয়া থাকে।

দ্বিতীয় অধ্যায়

Frequency Distribution Table

(পরিসংখ্যা সারনী বা ছক)

6. আমরা পূর্বে 2নং ছকে 60টি তথ্যকে পংক্তিতে সাজাইয়াছি বটে, কিন্তু সেগুলির কোন বিভাগ করা হয় নাই। তথ্যের সংখ্যা অত্যধিক হইলে বিভাগ করিয়া সেগুলিকে না সাজাইলে তত্ত্ব নির্ণয় করা অসুবিধাজনক হয়। চলকের মানগুলি বিভাগ করিবার সময় সাধারণতঃ পরিমাণগত চলকের মানকেই বিভাগবদ্ধ করা হয়। পূর্বের উদাহরণ-1এ নম্বরের মান হইল পরিমাণগত চলক এবং ঐ মানের সংখ্যা হইল সংখ্যাগত চলক; সুতরাং এস্থলে নম্বরের মানগুলিরই বিভাগ (interval) নির্ণয় করিতে হইবে।

এক একটি বিভাগে চলকের যতগুলি মান আছে সেই সংখ্যাকে ঐ বিভাগের **পরিসংখ্যা** বা সংঘটন-হার (frequency) বলা হয়। এইরূপে চলক মানের পরিসংখ্যা বিভাগ করাকেই **পরিসংখ্যা বিভাজন** (frequency distribution) বলা হয়। ঐ বিভাজন কোন ছকে দেখাইলে তাহাকে **পরিসংখ্যা বিভাজন সারনী বা ছক** (frequency distribution table) বলে।

7. ফ্রিকোয়েন্সি ডিস্ট্রিবিউশন্ :

বিভাগ করিবার নিয়ম (পূর্বের উদাহরণ 1 দেখ)

(1) প্রথমে তথ্যগুলির (এখানে উদাহরণ 1-এর নম্বরগুলির) প্রসার অর্থাৎ সর্বোচ্চ নম্বর হইতে সর্বনিম্ন নম্বরের অন্তর কত তাহা দেখিবে। আমাদের উদাহরণ স্থলে প্রসার $=113-71=42$.

(2) তারপর এক একটি বিভাগের আয়তন (size) অর্থাৎ কয় রকম মান লইয়া একটি বিভাগ গঠন করা হইবে তাহা স্থির করিবে। সাধারণতঃ 3, 5, বা 10 রকম মান লইয়া একটি বিভাগ করা হয়। এখানে প্রসার 42, সুতরাং 5 প্রকার করিয়া মান লইয়া এক একটি বিভাগ করিলে 9টি বিভাগ হইবে। $42 \div 5 = 8\frac{2}{5}$, সুতরাং বিভাগের সংখ্যা ভগ্নাংশ হইতে পারে না বলিয়া 9 হইবে

এখানে প্রথম বিভাগ হইবে 70 – 74, দ্বিতীয় বিভাগ 75 – 79, ইত্যাদি, এবং শেষ বিভাগ হইবে 110—114.

প্রতি বিভাগের উচ্চ ও নিম্ন limit (সীমা) থাকে এবং এই সীমার মধ্যবর্তী অংশকে interval (সংক্ষেপে i) বলে। পরে অনুচ্ছেদ 8 দেখ।

বিভাগ নির্ণয় করিবার পর এক একটি বিভাগের **ফ্রিকোয়েন্সি** (frequency) নির্ণয় করিতে হয়। তথ্যগুলি অসজ্জিত বা পংক্তিক্রমে সজ্জিত যেরূপই থাকুক না কেন সেগুলির frequency distribution প্রণালী দেখ। আমরা পূর্বের উদাহরণ-1-এর ছক নং 1 হইতে এই প্রণালী দেখাইতেছি। অবশ্য ছক নং 2 হইতে বিভাজন করাই সুবিধাজনক, কিন্তু যদি ঐরূপে তথ্যগুলি সজ্জিত না থাকে, তবে এলোমেলো তথ্য হইতেই বিভাজন করা যায়। (পরপৃষ্ঠায় ছক নং 3 দেখ)।

একটি ছকে 3টি স্তম্ভ কর—প্রথম স্তম্ভে নম্বরের বিভাগ (interval), দ্বিতীয় স্তম্ভে নম্বরের দাগ (tallies) এবং তৃতীয় স্তম্ভে সংখ্যা অর্থাৎ ছাত্রসংখ্যা (frequency) লেখা হইবে।

প্রথম স্তম্ভে নম্বরের 70—74, 75—79 প্রভৃতি বিভাগগুলি নীচে নীচে লিখ। তারপর ছক নং 1-এর প্রথম নম্বর 86টি 85—89 বিভাগের মধ্যে পড়ে বলিয়া দ্বিতীয় স্তম্ভে ঐ বিভাগের পাশে খাড়াভাবে একটি দাগ দাও। দ্বিতীয় নম্বর 96এর জন্য 95—99 বিভাগের পাশে দ্বিতীয় স্তম্ভে একটি খাড়া দাগ দাও। এইরূপে ঐ ছকের সমস্ত নম্বরগুলি লইয়া দাগ দাও। কোন বিভাগের দাগগুলির সংখ্যা 5 বা 5এর বেশী হইলে প্রত্যেক পঞ্চম দাগটি আড়ভাবে দিবে। কারণ, ঐরূপ একটি দাগ থাকিলে সহজেই বুঝা যাইবে যে ঐ পর্যন্ত পাঁচটি সংখ্যা আছে। প্রতি পঞ্চম দাগের পর একটু ফাঁক রাখিবে। এক একটি বিভাগের দাগের সংখ্যা যত সেই বিভাগের frequency বা ঐ বিভাগের অন্তর্গত নম্বরসংখ্যা অর্থাৎ নম্বর পাওয়া ছাত্রসংখ্যাও তত হইবে। ঐ সংখ্যাগুলি তৃতীয় স্তম্ভে লিখিবে।

ছক নং 3 (Frequency Distribution)

নম্বরের বিভাগ (*Intervals*)	নম্বরের দাগ (*Tallies*)	পরিসংখ্যা বা ছাত্রসংখ্যা *f* (*Frequency*)
70 — 74	///	3
75 — 79	////	4
80 — 84	~~////~~ //	7
85 — 89	~~////~~ ~~////~~	10
90 — 94	~~////~~ ~~////~~ ~~////~~	15
95 — 99	~~////~~ ////	9
100 — 104	~~////~~	5
105 — 109	////	4
110 — 114	///	3
	মোট সংখ্যা N =	60

সাধারণতঃ ছক নং 3-এর ন্যায় frequency distribution না করিয়া মাত্র দুইটি স্তম্ভে ঐ বিভাজনের ছক করা হয়। তাহাতে দ্বিতীয় পংক্তি (tallies-এর স্তম্ভ) থাকে না।

8. বিভাজন বিভাগের সীমা (limits of an interval) ও মধ্যমান (mid point)

মনে কর, কোন শ্রেণীর ছাত্রগণের প্রত্যেকের বয়স 12 বৎসর বলা হইল। এই বিবৃতি দ্বারা সকলেরই যে ঠিক 12 বৎসর করিয়া বয়স এরূপ বুঝায় না। এই মন্তব্যের মূল অর্থ এই যে, উহাদের বয়সগুলি 11·5 বৎসর হইতে 12·5 বৎসরের মধ্যে হইবে, অর্থাৎ কাহারও বয়স 11·5 বৎসরের কম ও 12·5 বৎসরের বেশী হইবে না। এই 11·5 ও 12·5 বৎসর হইল উহাদের বয়সের সীমা। প্রকৃতপক্ষে তাহাদের ব্যষ্টিগত বয়স 11·5—12·5 এই দুই সীমার মধ্যে হইলেও সমষ্টিগতভাবে তাহাদের বয়স 12 বৎসর ধরা হয়।

এখানে লক্ষ্য কর যে 12 বৎসর 11·5 ও 12·5এর ঠিক মধ্যস্থলে পড়ে অর্থাৎ উহাদের গড়। ঐ 12 বৎসরকে 11·5 ও 12·5 বৎসরের **মধ্যমান** (mid point) বলে।

আবার দেখ, যদি বলা হয় কতিপয় প্রস্তরখণ্ডের ওজন 17 কি. গ্রাম হইতে 18 কি. গ্রামের মধ্যে, তবে বিভিন্ন খণ্ডের ওজনগুলি 17 কি. গ্রা. হইতে

18 কি. গ্রামের ঠিক নীচ পর্যন্ত যে কোন ওজন হইতে পারে।* সমষ্টি হিসাবে বা গড়ে উহাদের ওজন 17·5 কি. গ্রাম বলা যায়। এইরূপ যদি কতকগুলি বালকের সর্বনিম্ন উচ্চতা 48—56 (ইঞ্চিতে) হয়, তবে ঐ বিভাগটি 47·5—56·5 এই সীমার মধ্যে বুঝাইবে এবং উহাদের মধ্যমান $\frac{47·5+56·5}{2}$ বা 52 হইবে।

বিভাগগুলির সীমা আসন্ন অখণ্ড সংখ্যায় হইলে সুবিধা হয়। যদি বিভাগগুলির সীমা 48—52, 53—57, 58—62, ইত্যাদি হয়, তবে প্রত্যেক বিভাগে 5টি করিয়া মান থাকায় প্রত্যেক বিভাগের তৃতীয় মানটিই উহার মধ্যমান হইবে। অতএব, উহার মধ্যমানগুলি যথাক্রমে 50, 55, 60 হইবে।

বিভাগগুলির মানসমূহ যদি আসন্ন পূর্ণসংখ্যা না হয়, যদি বলা হয় কতিপয় 3-মানের বিভাগের মানগুলির সর্বনিম্ন মান পূর্ণসংখ্যায় 60 কি. গ্রাম, তবে বিভাগগুলিকে 60 হইতে 63-এর নীচ, 63 হইতে 66-এর নীচ, 66 হইতে 69-এর নীচ ইত্যাদি ক্রমে লেখা যায়। আবার উহাদিগকে 60 ও 60-এর উপর, 63 ও 63-র উপর, 66 ও 66-র উপর ইত্যাদি ক্রমে লেখা যায়।

উদাহরণ 2. কোন বিদ্যালয়ের 324 জন ছাত্র একটি পরীক্ষায় শতকরা যত নম্বর পাইয়াছে তাহার পরিসংখ্যা বিভাজন সীমা নির্দেশ করিয়া নিম্নের ছকে দেখান হইল [ছক নং 4 দেখ]। নম্বরগুলি আসন্ন পূর্ণসংখ্যায় দেওয়া হইয়াছে। বিভাগ-প্রসার দ্বিগুণ করিয়া উহার পরিসংখ্যা বিভাজন ছক দেখাও।

Frequency Distribution

ছক নং 4

নম্বরের বিভাগ	ছাত্রসংখ্যা (f)
32 হইতে 37 এর নীচে	14
37 " 42 " "	22
42 " 47 " "	28
47 " 52 " "	34
52 " 57 " "	56
57 " 62 " "	64
62 " 67 " "	77
67 " 72 " "	19
72 " 77 " "	10
N=	324

* ইহাকে সংক্ষেপে '17 a. u. 18' লেখা হয়, ইহার অর্থ 17 and under 18 (17 হইতে আরম্ভ করিয়া 18-এর ঠিক নীচে পর্যন্ত)।

∴ পূর্বপৃষ্ঠার ফ্রিকোয়েন্সি ডিস্ট্রিবিউশনে প্রত্যেক বিভাগের প্রসার 5 নম্বর,
∴ এখানে প্রশ্নানুসারে উহার দ্বিগুণ প্রসারের অর্থাৎ 10 নম্বর প্রসারের frequency distribution table প্রস্তুত করিতে হইবে।

প্রদত্ত ছকে মোট প্রসার (77 – 32) বা 45 এবং বিভাগ-প্রসার 5 বলিয়া মোট বিভাগ সংখ্যা হইয়াছে (45 ÷ 5) বা 9টি। এক্ষেত্রে 10 নম্বর প্রসার-বিশিষ্ট করিতে হইলে বিভাগ সংখ্যা হয় (45 ÷ 10) বা $4\frac{1}{2}$টি অর্থাৎ শেষ বিভাগটি 5 নম্বর প্রসারের হইয়া পড়ে। উহার পরে 5টি নম্বর বাড়াইয়া শেষ বিভাগটি 10 নম্বরের করা যাইবে না, কারণ 77 নম্বরের অধিক কোন ছাত্র নম্বর পায় নাই। অতএব, এস্থলে প্রথম বিভাগটি আরও 5টি মান আগে হইতে অর্থাৎ 27 হইতে আরম্ভ করিতে হইবে। ইহাতে প্রথম বিভাগটি হইবে '27 হইতে 37-এর নীচে'।

[**দ্রষ্টব্য :** এখানে 100 নম্বরের মধ্যে কে কত নম্বর পাইয়াছে বলা আছে, সুতরাং নম্বর চলকের মোট প্রসার (range) 0 হইতে 100 পর্যন্ত হইবে। সেইজন্য প্রথম প্রসার 27—37 ধরা যায়। কোন ছাত্র 32-এর কম নম্বর পায় নাই, সুতরাং '32 হইতে 37-এর নীচ' বিভাগের ছাত্রসংখ্যা এবং '27 হইতে 37-এর নীচ' বিভাগের ছাত্রসংখ্যা একই থাকিবে।]

নূতন ছকে প্রথম বিভাগের frequency 14ই হইবে। উহার দ্বিতীয় বিভাগের ছাত্রসংখ্যা প্রদত্ত ছকের দ্বিতীয় ও তৃতীয় বিভাগের ছাত্রসংখ্যার সমষ্টি (22 + 28) অর্থাৎ 50 হইবে। এইরূপে অন্যান্য বিভাগের ছাত্রসংখ্যা নির্ণয় করিতে হইবে।

ফ্রিকোয়েন্সি ডিস্ট্রিবিউশন ছক (10 নম্বর প্রসারের)

ছক নং 5

নম্বরের বিভাগ	পরিসংখ্যা (f) বা ছাত্রসংখ্যা
27 হইতে 37 এর নীচে	14
37 " 47 " "	50
47 " 57 " "	90
57 " 67 " "	141
67 " 77 " "	29
N=	324

[দ্রষ্টব্য : ছক নং 4-এর বিভাগগুলিকে 32 – 37, 37 – 42, 42 – 47··· এরূপভাবে লেখা উচিত নহে। কারণ, ইহাতে একই মান (যথা 37, 42···) দুইটি বিভাগেই পড়িতেছে বলিয়া প্রদত্ত কাঁচা তথ্যসমূহ বা তাহাদের frequency হইতে frequency distribution-এর সময় একই মানকে (তথ্যকে) দুই বিভাগেই ধরা যাইতে পারে এবং তাহার ফলে তত্ত্ব নির্ণয়ে ভুল হইবে।]

10. Mid point নির্ণয়। বিভাগের মধ্যমান (mid point) নির্ণয়ের আলোচনা পূর্বে করা হইয়াছে। মধ্যমান নির্ণয়ের সূত্র নিম্নরূপ হইতে পারে।

(1) যদি বিভাগের মানগুলি কেবল দেওয়া থাকে (সীমা না দেওয়া থাকে), তবে সূত্র হইবে, বিভাগের **মধ্যমান** (interval mid point)

$$= \text{বিভাগের প্রথম মান} + \frac{(\text{সর্বোচ্চ মান} - \text{সর্বনিম্ন মান})}{2}$$

(2) যদি বিভাগের সীমা নির্দেশ করা থাকে, তবে সূত্র হইবে, বিভাগের **মধ্যমান** $= \text{বিভাগটির নিম্নতম সীমা} + \frac{(\text{উচ্চতম সীমা} - \text{নিম্নতম সীমা})}{2}$

উদাহরণ 3. (i) 90—94 এবং (ii) 89·5—94·5 এই বিভাগদ্বয়ের মধ্যমান নির্ণয় কর।

(i) নির্ণেয় mid point $= 90 + \frac{94-90}{2} = 90 + 2 = 92$

(ii) নির্ণেয় মধ্যমান $= 89{\cdot}5 + \frac{94{\cdot}5 - 89{\cdot}5}{2} = 89{\cdot}5 + 2{\cdot}5 = 92.$

11. সঞ্চয়ী বা ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজন সারণী (Cumulative frequency table) **:** উপরের ছক নং 4 হইতে ছক নং 5টি প্রস্তুত করিবার সময় প্রত্যেক সারির frequency কিভাবে নির্ণয় করা হইয়াছে তাহা পূর্বে লক্ষ্য করিয়াছ।

ছক নং 4 হইতে দেখা যায় যে, 37-এর নীচে নম্বর পাওয়া ছাত্রসংখ্যা 14, 42-এর নীচে নম্বর পাওয়া ছাত্রসংখ্যা হইতেছে (14+22) বা 36. কারণ, ছকে আছে যে, 37 হইতে 42-এর নীচে নম্বর পাওয়া ছাত্রসংখ্যা 22, আর 37 নম্বরের নীচ পর্যন্ত নম্বর পাওয়া ছাত্রসংখ্যা 14 এবং সেই 14 জনও অবশ্যই 42 নম্বরের কম পাইয়াছে, সুতরাং 42-এর নীচে নম্বর পাওয়া ছাত্রসংখ্যা হইবে 14 ও 22-এর যোগফল অর্থাৎ ছকের দ্বিতীয় সারির ফ্রিকোয়েন্সির সহিত তাহার পূর্ব সারির ফ্রিকোয়েন্সি যোগ করা হইল।

আবার দেখ, 47-এর নীচে নম্বর পাওয়া ছাত্রসংখ্যা হইল (14+22+28) বা 64 অর্থাৎ তৃতীয় সারির ছাত্র-সংখ্যার (পরিসংখ্যার) সহিত তাহার পূর্ববর্তী দুই সারির ছাত্র-সংখ্যার যোগফল। এইরূপে পর পর যোগ করিয়া পরিসংখ্যা স্থির করা হয় বলিয়া ইহাকে বলে **ক্রমযৌগিক বা সঞ্চয়ী**। ছক নং 4 হইতে Cumulative frequency table প্রস্তুত করা হইল।

Cumulative frequency table
(ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজন সারণী)
ছক নং 6 (ছক নং 4 হইতে প্রস্তুত)

নম্বরের বিভাগ	ছাত্রসংখ্যা বা কিউমিউলেটিভ ফ্রিকোয়েন্সি
37 নম্বরের নীচে	14
42 " "	36 (অর্থাৎ 14+22)
47 " "	64 (=14+22+28 অথবা=36+28)*
52 " "	98 (=14+22+28+34 অথবা=64+34)
57 " "	154 (= 98+56)
62 " "	218 (=154+64)
67 " "	295 (=218+77)
72 " "	314 (=295+19)
77 " "	324 (=314+10)

*[**দ্রষ্টব্য :** ছক নং 4 হইতে ছক নং 6-এর তৃতীয় সারির ছাত্রসংখ্যা নির্ণয়ের জন্য ছক নং 4-এর প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় সারির ছাত্রসংখ্যা তিনটি (অর্থাৎ 14, 22, 28) যোগ করিতে হইয়াছে। উহা অপেক্ষা সহজেও করা যায়। এই ছক নং 6-এর তৃতীয় সারির ছাত্রসংখ্যা নির্ণয়ের জন্য কেবল 4 নং ছকের তৃতীয় সারির ছাত্রসংখ্যাটি (অর্থাৎ 28) 6 নং ছকের দ্বিতীয় সারির ছাত্রসংখ্যা 36-এর সহিত যোগ করিলেই হইবে। অনুরূপে 6নং ছকের চতুর্থ সারির ছাত্রসংখ্যা নির্ণয়ের জন্য উহার আগের সারির ছাত্রসংখ্যা 64-এর সহিত ছক নং 4-এর চতুর্থ সারির ছাত্রসংখ্যা 34 যোগ করিলেই হইবে, ইত্যাদি। এখানে লক্ষ্য কর যে, নূতন ছকের প্রথম সারির ছাত্রসংখ্যা ছক নং 4-এর প্রথম সারির ছাত্রসংখ্যার সহিত অবশ্যই সমান হইবে এবং নূতন ছকের শেষ সারির ছাত্রসংখ্যা মোট প্রদত্ত সংখ্যারই সমান হইবে।]

প্রশ্নমালা 1

1. সংজ্ঞা লিখ ও দৃষ্টান্ত দ্বারা বুঝাও :—
চল, চলক, প্রসার, বিভাগ-প্রসার ও ফ্রিকোয়েন্সি।

2. বিভাগের limit ও mid point বলিতে কি বুঝায় ?

3. কাঁচা তথ্য কাহাকে বলে দৃষ্টান্ত দ্বারা বুঝাইয়া দাও।

4. Frequency কাহাকে বলে ?

5. ফ্রিকোয়েন্সি হইতে frequency distribution কিরূপে প্রস্তুত করা যায় ?

6. তথ্য সংগ্রহের কতিপয় বিভিন্ন উপায় বর্ণনা কর।

7. 100 জন ছাত্র কোন পরীক্ষায় শতকরা যত নম্বর পাইয়াছে তাহার তালিকা নিম্নে দেওয়া হইল। উহা হইতে নম্বরগুলির মানের ঊর্ধ্বক্রমে পংক্তি ছক প্রস্তুত কর।

53	28	35	28	49	54	29	30	30	36
50	55	48	35	23	24	37	51	52	27
44	41	42	37	43	47	35	36	42	35
43	44	45	56	39	34	41	44	45	34
38	40	51	42	39	38	40	41	40	41
38	41	40	44	50	39	56	40	40	57
41	45	46	39	36	42	46	45	46	47
42	33	32	39	43	47	43	37	34	46
33	52	39	47	29	33	54	51	55	49
31	31	52	32	38	48	25	26	27	38

8. 7নং প্রশ্নের ছক হইতে পংক্তি নির্ণয় করিয়া বল :

(i) কতগুলি ছাত্র 35 অপেক্ষা অধিক নম্বর পাইয়াছে ?

(ii) কয়জন ছাত্র 32 অপেক্ষা অধিক কিন্তু 53 অপেক্ষা কম নম্বর পাইয়াছে ?

9. প্রশ্ন 7-এ প্রদত্ত তথ্যগুলির frequency distribution প্রস্তুত কর (বিভাগ-প্রসার 5 ধরিয়া)।

10. প্রশ্ন 7-এ প্রদত্ত কাঁচা তথ্য হইতে 4-নম্বর বিভাগ-প্রসার-বিশিষ্ট frequency distribution প্রস্তুত কর।

11. পূর্ণসংখ্যায় প্রদত্ত কোন চলকের 10টি মান 72·5—77·5 এই বিভাগের অন্তর্গত হইলে সেই মানগুলি নির্ণয় কর।

12. কোন শ্রেণীর ছাত্রদের ওজনগুলি (পাউণ্ডে) 75—79, 80—84, ইত্যাদি নিয়মিত বিভাগে সাজান আছে। ঐ বিভাগগুলির সীমা নির্দেশ এবং উহাদের mid point নির্ণয় কর।

13. নিম্নের তালিকাটি সম্পূর্ণ কর :

বিভাগ	বিভাগ সীমা	মধ্যমান
83 হইতে 88এর নীচে		
78 ,, 83 ,, ,,		
73 ,, 78 ,, ,,		

14. নিম্নের ছকে কোন বিদ্যালয়ের 50 জন ছাত্রের উচ্চতা আসন্ন এক দশমিক স্থান পর্যন্ত ইঞ্চিতে দেওয়া হইল। ছকটি সম্পূর্ণ কর।

বিভাগ	বিভাগ সীমা	মধ্যমান	ছাত্রসংখ্যা
50·8 হইতে 52·8এর নীচে		51·75	12
52·8 ,, 54·8 ,, ,,		53·75	18
54·8 ,, 56·8 ,, ,,		55·75	20

15. নিম্নের তালিকায় 100 জন ছাত্রের ওজন সেরে দেওয়া আছে :—

ওজন (সেরে)	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63
ছাত্রসংখ্যা	3	4	2	5	10	18	17	15	14	6	6

তালিকা হইতে ওজনগুলিকে (1) 54 সের ও তাহার নীচে, 55 সের ও তাহার নীচে ইত্যাদি ক্রমে এবং (2) 62 সের ও তাহার উপর, 61 সের ও তাহার উপর, ইত্যাদি ক্রমে এক একটি cumulative frequency distribution নির্ণয় কর।

তৃতীয় অধ্যায়

Graphical representation of Statistical Data

(পরিসংখ্যানে লেখ-চিত্রের ব্যবহার)

12. **বিভিন্ন প্রকার লেখ-চিত্র।** নানা প্রকার চিত্রের সাহায্যে তুলনামূলক তথ্য প্রকাশ করা যায়। যথা—বর্গক্ষেত্র (Square), আয়তক্ষেত্র (Rectangles), বৃত্ত (Circles বা Pie Charts) চিত্রে উপস্থাপন (Pictorial representation), দণ্ডচিত্র (Bar-diagram), স্তম্ভলেখ (Column graph), রৈখিক লেখ (Line graph), প্রভৃতি।

প্রশ্নমালা 1

1. সংজ্ঞা লিখ ও দৃষ্টান্ত দ্বারা বুঝাও :—

চল, চলক, প্রসার, বিভাগ-প্রসার ও ফ্রিকোয়েন্সি।

2. বিভাগের limit ও mid point বলিতে কি বুঝায় ?

3. কাঁচা তথ্য কাহাকে বলে দৃষ্টান্ত দ্বারা বুঝাইয়া দাও।

4. Frequency কাহাকে বলে ?

5. ফ্রিকোয়েন্সি হইতে frequency distribution কিরূপে প্রস্তুত করা যায় ?

6. তথ্য সংগ্রহের কতিপয় বিভিন্ন উপায় বর্ণনা কর।

7. 100 জন ছাত্র কোন পরীক্ষায় শতকরা যত নম্বর পাইয়াছে তাহার তালিকা নিম্নে দেওয়া হইল। উহা হইতে নম্বরগুলির মানের ঊর্ধ্বক্রমে পংক্তি ছক প্রস্তুত কর।

53	28	35	28	49	54	29	30	30	36
50	55	48	35	23	24	37	51	52	27
44	41	42	37	43	47	35	36	42	35
43	44	45	56	39	34	41	44	45	34
38	40	51	42	39	38	40	41	40	41
38	41	40	44	50	39	56	40	40	57
41	45	46	39	36	42	46	45	46	47
42	33	32	39	43	47	43	37	34	46
33	52	39	47	29	33	54	51	55	49
31	31	52	32	38	48	25	26	27	38

8. 7নং প্রশ্নের ছক হইতে পংক্তি নির্ণয় করিয়া বল :

(i) কতগুলি ছাত্র 35 অপেক্ষা অধিক নম্বর পাইয়াছে ?

(ii) কয়জন ছাত্র 32 অপেক্ষা অধিক কিন্তু 53 অপেক্ষা কম নম্বর পাইয়াছে ?

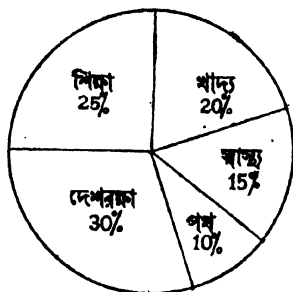
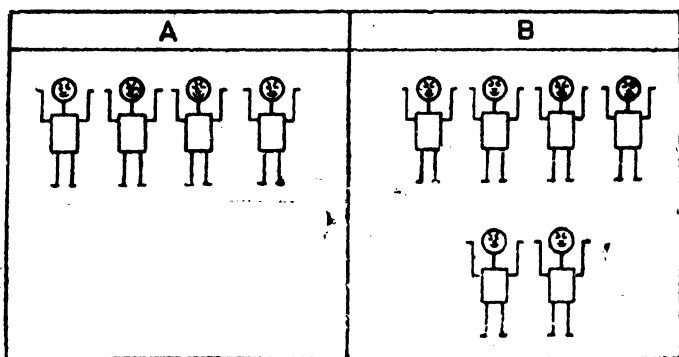
9. প্রশ্ন 7-এ প্রদত্ত তথ্যগুলির frequency distribution প্রস্তুত কর (বিভাগ-প্রসার 5 ধরিয়া)।

10. প্রশ্ন 7-এ প্রদত্ত কাঁচা তথ্য হইতে 4-নম্বর বিভাগ-প্রসার-বিশিষ্ট frequency distribution প্রস্তুত কর।

11. পূর্ণসংখ্যায় প্রদত্ত কোন চলকের 10টি মান 72·5—77·5 এই বিভাগের অন্তর্গত হইলে সেই মানগুলি নির্ণয় কর।

12. কোন শ্রেণীর ছাত্রদের ওজনগুলি (পাউণ্ডে) 75—79, 80—84, ইত্যাদি নিয়মিত বিভাগে সাজান আছে। ঐ বিভাগগুলির সীমা নির্দেশ এবং উহাদের mid point নির্ণয় কর।

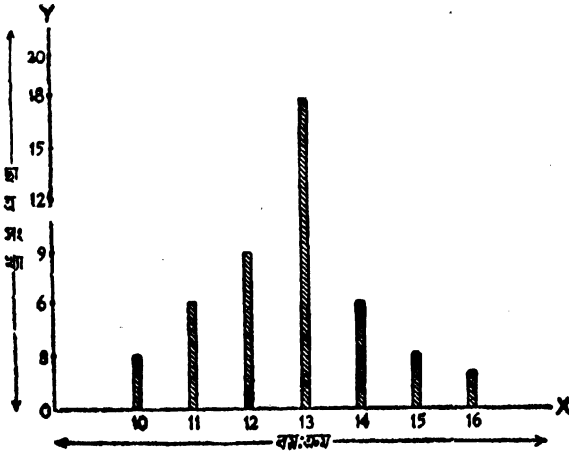
বৃত্তটির ক্ষেত্রফল দ্বারা সমগ্র ব্যয় এবং উহার এক একটি অংশের দ্বারা বিভিন্ন খাতে ব্যয় প্রকাশিত হইয়াছে। ঐ বিভাগসমূহের ক্ষেত্রফলগুলি 10, 15, 20, 25 ও 30-এর সমানুপাতী, অর্থাৎ উহাদের অনুপাত=2 : 3 : 4 : 5 : 6.

ইহাকে **বৃত্তচিত্র** (circle diagram) বা **পাই চিত্র** (Pie chart) বলে। অনুরূপে একটি বর্গক্ষেত্রকে বা একটি আয়তক্ষেত্রকে ঐরূপ অনুপাতে বিভক্ত করিয়া ঐ তথ্যগুলি প্রকাশ করা যাইতে পারে।

চিত্রে উপস্থাপন : মনে কর, দুইটি দেশের (A ও B) প্রথমটির জনসংখ্যা 40,000 এবং দ্বিতীয়টির জনসংখ্যা 60,000. ছবির সাহায্যে ঐ দুই স্থানের জনসংখ্যা সহজেই দেখান যাইতে পারে। তোমরা প্রথমে দুইটি স্তম্ভ (A ও B) চিহ্নিত করিয়া প্রথমটিতে 4টি এবং দ্বিতীয়টিতে 6টি মানুষ অঙ্কিত কর।

এক্ষণে যদি চিত্রের প্রতিটি মানুষ 10,000 জনের নির্দেশক হিসাবে ধরা হয়, তাহা হইলে অতি সহজেই A-র জনসংখ্যা 40,000 এবং B-র জনসংখ্যা 60,000 ইহা বুঝিতে পারা যাইবে। জনসাধারণকে এই জাতীয় চিত্রের সাহায্যে অতি সহজে পরিসংখ্যান তথ্য বুঝাইবার জন্য সরকার হইতে অথবা কোন প্রদর্শনী ইত্যাদিতে এইরূপ চিত্রের বহুল প্রচার আছে।

লেখ-চিত্র : বীজগণিতে তোমরা পরিসংখ্যা তথ্যের দণ্ডলেখ, স্তম্ভলেখ ও রৈখিক লেখ অঙ্কন করিতে শিখিয়াছ। এখানে দুইটি উদাহরণ দেওয়া হইতেছে।

উদাহরণ 1. মনে কর, নিম্নের তালিকায় কোন বিদ্যালয়ের 450 জন ছাত্রের বয়ঃক্রম দেওয়া আছে। ইহাকে দণ্ডলেখ সাহায্যে প্রকাশ করিতে হইবে।

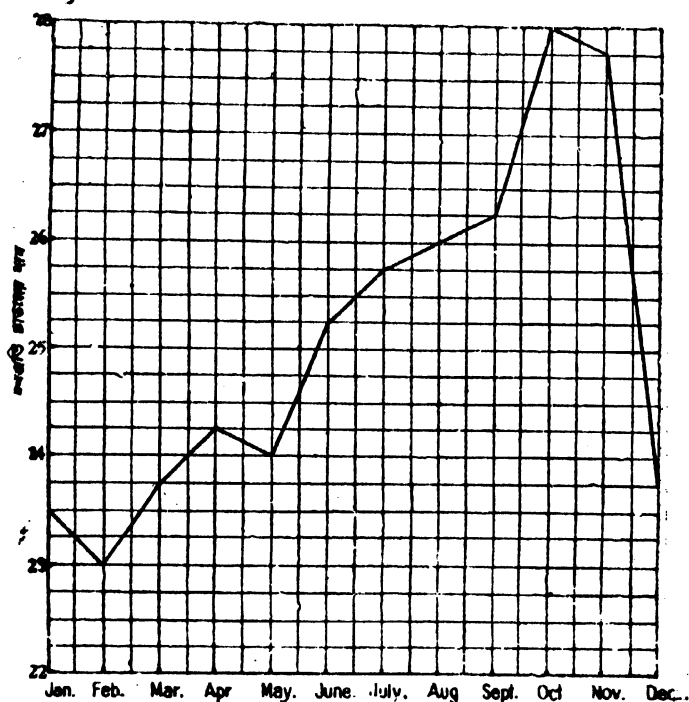
বয়স	10 ব.	11 ব.	12 ব.	13 ব.	14 ব.	15 ব.	16 ব.
ছাত্রসংখ্যা	30	60	80	180	50	30	20

ছক কাগজে OX একটি অনুভূমিক এবং OY একটি উল্লম্ব রেখা লও। একক নির্ধারিত করিয়া OX অনুভূমিক রেখা বরাবর বয়সগুলি চিহ্নিত কর এবং OY উল্লম্ব রেখা বরাবর ছাত্রসংখ্যাগুলি চিহ্নিত কর। তাহার পরে বয়ঃক্রম সূচক প্রত্যেক চিহ্নবিন্দু হইতে উহার ছাত্রসংখ্যা নির্দেশক অঙ্কের দৈর্ঘ্যের সমান উল্লম্ব রেখা অঙ্কিত কর। এইরূপে অঙ্কিত উল্লম্ব রেখাগুলি দ্বারা উপরের তালিকাটি প্রকাশিত হইল। নিম্নের চিত্র দেখ।

দ্রষ্টব্য : যদি অনুভূমিক রেখা বরাবর ছাত্রসংখ্যা এবং উল্লম্ব রেখা বরাবর বয়স নির্দেশ করা হয়, তবে কতিপয় অনুভূমিক রেখা দ্বারা উপরের তথ্য প্রকাশিত হইবে।

রৈখিক চিত্র। অর্থ নৈতিক পরিসংখ্যান ইত্যাদিতে কোন কোন ক্ষেত্রে নির্দিষ্ট সময়ের ব্যবধানে সংগৃহীত তথ্যাবলী **রৈখিক চিত্রের** (line graph) সাহায্যে প্রকাশ করা হয়। (নিম্নের উদাহরণ দেখ)।

উদাহরণ 1. 1957 সালের বিভিন্ন মাসে চাউলের মণ প্রতি গড় বাজার দর নিম্নের তালিকায় দেওয়া আছে। রৈখিক চিত্রের সাহায্যে এই তথ্য প্রকাশ কর।

1957	Jan.	Feb.	Mar.	Apr.	May.	June	July.	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.
চাউলের দাম	23.50	23.00	23.75	24.25	24.00	25.25	25.75	26.00	26.25	28.00	27.75	23.75

অনুভূমিক রেখা বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্যকে মাসের একক এবং উল্লম্ব রেখা বরাবর ঐরূপ চারিটি বাহুর দৈর্ঘ্যকে টাকার একক ধরিয়া রেখাচিত্রটি অঙ্কিত করা হইল।

(1957 সালের বিভিন্ন মাস)

13. পরিসংখ্যান-বিজ্ঞানে **Histogram** (হিস্টোগ্রাম বা আয়তলেখ) এবং **Frequency Polygon** (ফ্রিকোয়েন্সি পলিগন বা পরিসংখ্যা বহুভুজ) ব্যবহৃত হইয়া থাকে। এক্ষণে, আমরা এই দুই প্রকার লেখ অঙ্কন এবং তদ্দারা পরিসংখ্যা প্রকাশ সম্বন্ধে আলোচনা করিব।

14. Histogram বা Column Diagram

তোমরা বীজগণিতে যে স্তম্ভলেখ অঙ্কন শিখিয়াছ, আয়তলেখ তাহারই অনুরূপ। এই লেখ অঙ্কন করিবার জন্য বীজগণিতের ন্যায় দুইটি পরস্পর ছেদী ও লম্বভাবে অবস্থিত সরলরেখা লইতে হয়। উহাদের মধ্যে একটি সরলরেখা অনুভূমিক (Horizontal) অর্থাৎ ভূমিতলের সমান্তরাল, উহাকে ভূমি (base) বলা হয়। অপর সরলরেখাটি উল্লম্ব (vertical), ইহা পূর্ব সরলরেখাটির উপর লম্ব। বীজগণিতে XOX′ ও YOY′ দ্বারা অনুভূমিক ও উল্লম্ব সরলরেখা দুইটিকে চিহ্নিত করা হয় এবং প্রথমটিকে X-অক্ষ ও দ্বিতীয়টিকে Y-অক্ষ বলা হয়। x ও y-এর বিভিন্ন মানগুলি যথাক্রমে X-অক্ষ ও Y-অক্ষ বরাবর ধরা হয়।

আমরা দেখিয়াছি পরিসংখ্যা বিভাজনে যে দুইটি চলক থাকে, তাহাদের একটি পরিমাণগত চলক এবং অন্যটি সংখ্যাগত চলক। এই দুই চলক লইয়া লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য পরিমাণগত চলকের বিভিন্ন মানগুলি অনুভূমিকরেখা (X-অক্ষ) বরাবর এবং সংখ্যাগত চলকের মানগুলি উল্লম্ব রেখা (Y-অক্ষ) বরাবর ধরা হইয়া থাকে।

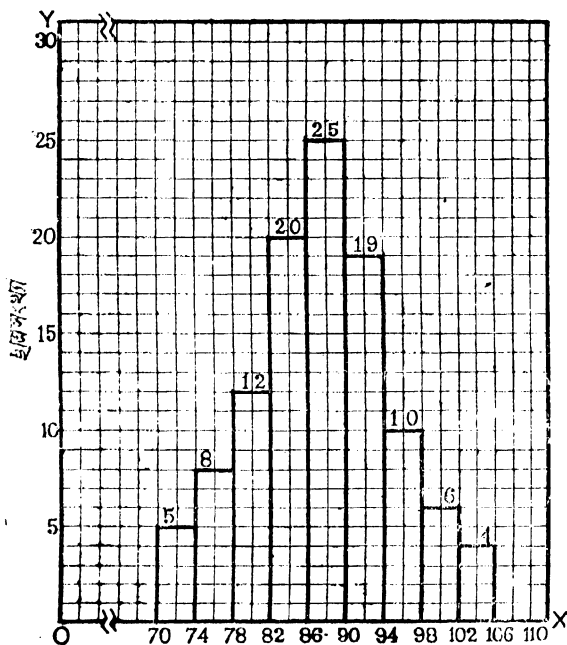
পরিসংখ্যানক্ষেত্রে চলকের মান প্রায়ই ঋণাত্মক হয় না। এইজন্য এই সকল লেখ-চিত্রে কেবল প্রথম পাদ বা বিভাগই (Quadrant) ব্যবহৃত হয়।

Histogram অঙ্কন প্রণালী

উদাহরণ 1. নিম্নে কতিপয় ছাত্রের কোন পরীক্ষায় প্রাপ্ত নম্বরের frequency distribution দেওয়া হইল। উহার হিস্টোগ্রাম অঙ্কন কর :

নম্বর	70 হইতে 74 এর নীচে	74 হইতে 78 এর নীচে	78-82 নীচে	82-86 নীচে	86-90 নীচে	90-94 নীচে	94-98 নীচে	98-102 নীচে	102-106 নীচে
ছাত্রসংখ্যা	5	8	12	20	25	19	10	6	4

প্রণালী : লেখ কাগজে পরস্পর ছেদী একটি অনুভূমিক রেখা OX ও একটি উল্লম্ব রেখা OY লওয়া হইল (লেখ 1 দেখ)। এখানে নম্বর ও ছাত্র-সংখ্যা এই চলক দুইটির কোন ঋণাত্মক মান না থাকায় আয়তলেখটি প্রথম পাদে থাকিবে। এক্ষণে নম্বরের মানের জন্য সুবিধামত দৈর্ঘ্য একক ধরিয়া অনুভূমিকরেখা বরাবর 70—74, 74—78, 78—82, 82—86, ...প্রভৃতি

নম্বরের বিভাগগুলি বসাইতে হইবে। এখানে নম্বরের দুইটি মানের জন্য ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহু ধরিয়া বিভাগগুলি বসান হইল।

(লেখ 1)

আবার, উল্লম্ব রেখা বরাবর সুবিধামত যে কোন দৈর্ঘ্য একক ধরিয়া ছাত্রসংখ্যা 0, 5, 10, 15,···প্রভৃতি লেখা হইল। এখানে ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহু দ্বারা একজন ছাত্র সূচিত করা হইল।

প্রদত্ত নম্বরের প্রথম বিভাগ "70 হইতে 74-এর নীচে" এবং উহার ছাত্র-সংখ্যা 5 বলিয়া 70 ও 74 এর দাগ হইতে 5 একক দীর্ঘ দুইটি লম্ব টানিয়া আয়তক্ষেত্রটি সম্পূর্ণ করা হইল ; অর্থাৎ এখানে 70—74 বিভাগের পরিসংখ্যা 5 এইটি ছকে প্রকাশ করার জন্য এরূপ একটি আয়তক্ষেত্র অঙ্কিত করা হইল যাহার ভূমি 70—74 বিভাগটির দৈর্ঘ্য এবং উচ্চতা 5 একক দীর্ঘ। পরবর্তী বিভাগ "74 হইতে 78-এর নীচে" ও উহার পরিসংখ্যা 8, সুতরাং উহা লেখটিতে প্রকাশ করার জন্য এমন একটি আয়তক্ষেত্র অঙ্কিত করা হইল যাহার ভূমি 74—78 বিভাগটির দৈর্ঘ্য এবং উচ্চতা 8 একক দীর্ঘ। এইরূপে 9টি বিভাগের জন্য নয়টি আয়তক্ষেত্র অঙ্কিত করা হইল।

এই নয়টি আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল প্রদত্ত পরিসংখ্যা বিভাজনের Histogram (**আয়তলেখ**) হইল।

[**দ্রষ্টব্য :** (1) অনুভূমিক ও উল্লম্বরেখা বরাবর সুবিধামত দৈর্ঘ্য একক ধরিবে। উভয়রেখা বরাবর একই দৈর্ঘ্য একক ধরা যায় অথবা বিভিন্ন দৈর্ঘ্য এককও ধরা যায়।

(2) লেখটিতে দেখ 70—74 বিভাগটি যেখানে বসান হইয়াছে, মূলবিন্দু O হইতে ঐ বিভাগের দূরত্ব নির্বাচিত দৈর্ঘ্য একক অনুসারে যাহা দেখান উচিত ছিল তাহা দেখান হয় নাই—কারণ, তাহা হইলে চিত্রটি অনেক বড় হইয়া যাইবে। অতএব, এরূপস্থলে আমরা উল্লম্ব রেখা OY-কে 70—74 বিভাগের নিকট সরাইয়া আনিয়াছি বুঝিতে হইবে। ইহা প্রকাশ করার জন্য O হইতে 70—74 বিভাগের মধ্যে OX রেখার উপরে ≀ ≀ চিহ্ন দিয়া একটু অংশ কাটিয়া দেওয়া হইয়াছে। উহার সমান্তরাল উপরের সীমারেখাতেও ঐরূপ চিহ্ন দেওয়া হইয়াছে।

(3) মূল বিন্দু O হইতেও অনেক সময় প্রথম বিভাগ চিহ্নিত করা হয়।

(4) লেখ 1এ নম্বর বিভাগগুলি সমান বলিয়া আয়তগুলির ভূমিসমূহ সমান হইয়াছে এবং তজ্জন্য হিস্টোগ্রামটি সমঞ্জস (symmetrical) হইয়াছে। বিভাগগুলি সমান না হইলে হিস্টোগ্রামটি সমঞ্জস হইত না।

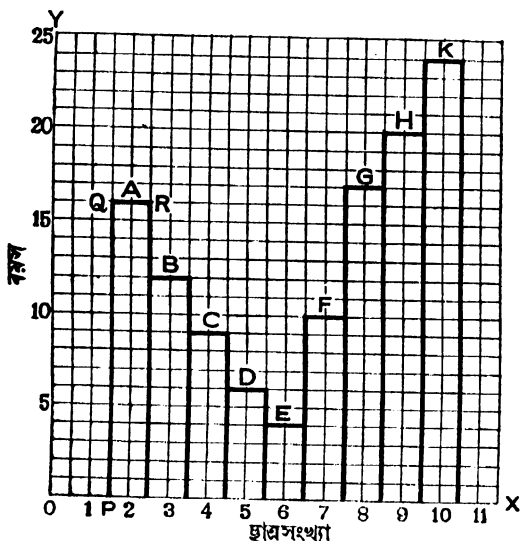
(5) ছাত্রসংখ্যা অনুভূমিক রেখা বরাবর এবং প্রাপ্ত নম্বর উল্লম্ব রেখা বরাবর ধরা যাইত। সুবিধামত উহা স্থির করিয়া লইবে।]

উদাহরণ 2. কতকগুলি ছাত্রের বয়সের (আসন্ন বৎসরে) তালিকা নিম্নে দেওয়া হইল। ঐ তালিকা হইতে Histogram অঙ্কিত কর :

ছাত্রসংখ্যা	2	3	4	5	7	8	9	10	6
বয়স	16	12	9	6	10	17	20	24	5

[লেখ 2 দেখ] এখানে অনুভূমিক রেখা বরাবর ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের দুইটি বাহু দ্বারা একজন ছাত্রসংখ্যা এবং উল্লম্ব রেখা বরাবর ঐ বর্গক্ষেত্রের একটি বাহু দ্বারা এক বৎসর সূচিত করিয়া লেখটি অঙ্কিত করা হইতেছে। OX বরাবর 2, 3, 4, 5,···, 10 পর্যন্ত ছাত্রসংখ্যা এবং OY রেখা বরাবর 5, 10, 15,···প্রভৃতি বয়স বসান হইল। এখানে বয়সের কোন বিভাগ না থাকায় এরূপ করা হইয়াছে।

এক্ষণে, 2, 3, 4 প্রভৃতি প্রত্যেক দাগ হইতে 16, 12, 9 প্রভৃতি একক উচ্চ বিন্দুগুলি অর্থাৎ (2, 16), (3, 12), (4, 9),..., (10, 24) স্থানাঙ্কবিশিষ্ট বিন্দুগুলি স্থাপন করা হইল। ঐ বিন্দুগুলি যথাক্রমে A, B, C,···, K হইল।

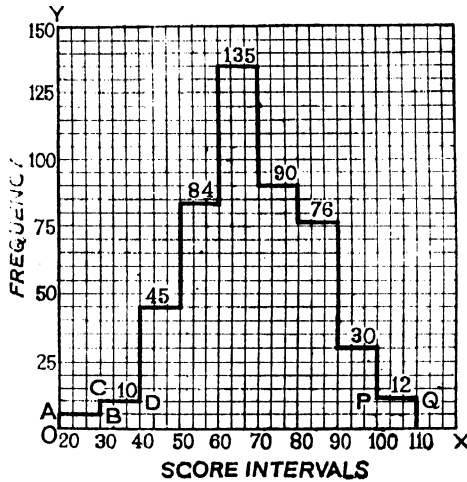
এখন OX-এর উপরিস্থিত 1 ও 2 দাগের মধ্যবিন্দু P এবং 2 ও 3 দাগের মধ্যবিন্দু S হইতে উল্লম্বরেখা টানা হইল। তৎপরে A বিন্দুর মধ্য দিয়া অনুভূমিক রেখা টানিয়া PQRS আয়তক্ষেত্রটি সম্পূর্ণ করা হইল। অনুরূপে, 2 ও 3 দাগের এবং 3 ও 4 দাগের, 3 ও 4 দাগের এবং 4 ও 5 দাগের,...

[লেখ 2]

শেষে 9 ও 10 দাগের এবং 10 ও 11 দাগের মধ্যবিন্দুগুলি হইতে উল্লম্ব রেখাগুলি এবং B, C, D,..., K বিন্দু দিয়া অনুভূমিক রেখাগুলি টানিয়া আয়তক্ষেত্রগুলি সম্পূর্ণ করা হইল। ইহাতে যে 9টি আয়তক্ষেত্র পাওয়া গেল সেইগুলির সমষ্টি যে চিত্রটি হইল তাহাই Histogram (আয়তলেখ) হইল।

উদাহরণ 3. Represent the following frequency distribution graphically by a histogram.

অনুভূমিক রেখা OX এবং উল্লম্ব রেখা OY লও (লেখ 3 দেখ)। OX বরাবর এক একটি বিভাগের জন্য লেখ কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 3টি করিয়া বাহু ধরিয়া 20, 30, 40, ..., 110 পর্যন্ত চিহ্নিত কর। O মূল বিন্দুতে প্রথম বিভাগের নিম্নতম মান 20 চিহ্নিত কর। 5 ফ্রিকোয়েন্সির

Score intervals	*frequency*
20— 29	5
30— 39	10
40— 49	45
50— 59	84
60— 69	135
70— 79	90
80— 89	76
90— 99	35
100—109	12

জন্য ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহু ধরিয়া OY বরাবর 25, 50, 75,···প্রভৃতি ফ্রিকোয়েন্সিগুলি চিহ্নিত কর। এখানে প্রথম বিভাগের ফ্রিকোয়েন্সি 5, সুতরাং অনুভূমিক রেখার উপর 20 দাগ হইতে উল্লম্বরেখা বরাবর লম্ব টান এবং ঐ লম্বটির উচ্চতা 5 frequency সূচক কর (অর্থাৎ ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর সমান কর)। মনে কর, লম্বটি OA হইল। A বিন্দু হইতে পরবর্তী 30 দাগের উপর পর্যন্ত অনুভূমিক রেখার (OX-এর) সমান্তরাল AB রেখা টান। পরবর্তী বিভাগের ফ্রিকোয়েন্সি 10 বলিয়া B হইতে উল্লম্বরেখা BC টান এবং

[লেখ 3]

OX হইতে C বিন্দুর উচ্চতা 10 কর (অর্থাৎ BC-র উচ্চতা 5-এর সমান কর)। তৎপরে OX-এর সমান্তরাল করিয়া 40 দাগের উপর পর্যন্ত CD সমান্তরাল টান। এইরূপে শেষ বিভাগ পর্যন্ত রেখা টানিয়া PQ পাইয়াছ। Q বিন্দুকে 110 দাগের বিন্দুর সহিত যোগ কর। এক্ষণে অনুভূমিক রেখাকে ভূমি ধরিয়া যে চিত্র হইল তাহাই প্রদত্ত frequency distribution-এর histogram.

[**দ্রষ্টব্য :** (1) 20 অপেক্ষা কম কোন Score না থাকায় এখানে 20কে O মূল-বিন্দুতেই চিহ্নিত করা হইয়াছে। পূর্বের ন্যায় O বিন্দু হইতে একটু দূরেও ধরা যাইত।

(2) এখানে CB, ED প্রভৃতি রেখাগুলিকে 30, 40 প্রভৃতি দাগ পর্যন্ত বর্ধিত করা হয় নাই বলিয়া প্রত্যেক বিভাগের উপর আয়তগুলি সম্পূর্ণ হয়

নাই ; কিন্তু সেরূপ করিলে মোট 9টি আয়তের যে ক্ষেত্রফল হইত, লেখ 3-এর চিত্রটির ক্ষেত্রফল তাহাই হইয়াছে। সাধারণতঃ আয়তগুলি সম্পূর্ণ করিয়াই histogram আঁকা হয়।]

15. Frequency Polygon (পরিসংখ্যা বহুভুজ)

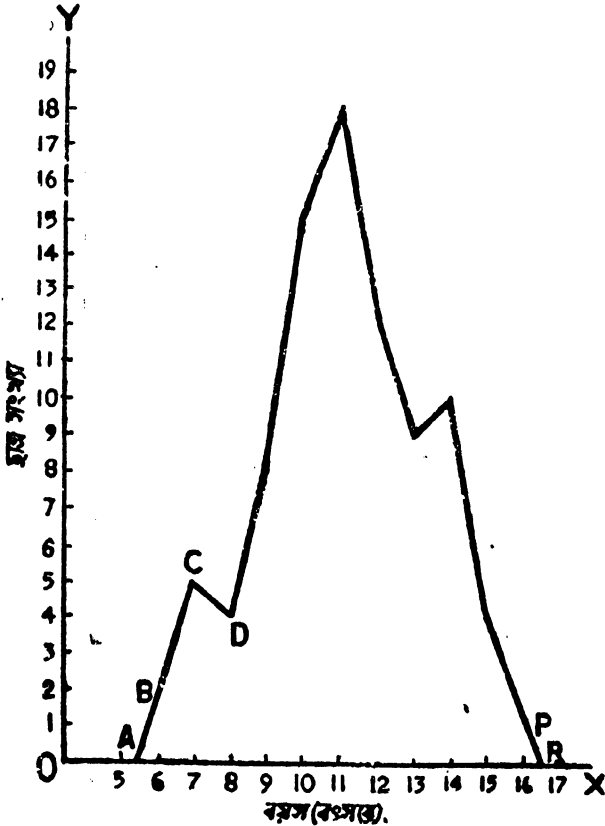
কোন তথ্যরাশির পরিসংখ্যা-বিভাজনকে যেরূপ আয়তলেখ দ্বারা প্রকাশ করা যায়, সেইরূপ উহাকে পরিসংখ্যা বহুভুজ লেখ অঙ্কন করিয়াও প্রকাশ করা যায়।

অঙ্কন প্রণালীঃ ছক কাগজে OX ও OY যথাক্রমে অনুভূমিক ও উল্লম্বরেখা দুইটি লইবে। সাধারণতঃ চলকের পরিমাণগত মানগুলিকে অনুভূমিক রেখা বরাবর এবং সংখ্যাগত মানগুলিকে উল্লম্বরেখা বরাবর চিহ্নিত করা হয়। ঐ দুই রেখা বরাবর দৈর্ঘ্য একক দুইটি নির্দিষ্ট করিয়া তদনুসারে OX রেখা বরাবর প্রদত্ত পরিমাণগত মানগুলি এবং OY রেখা বরাবর সংখ্যাগত মানগুলি চিহ্নিত করিবে। তৎপরে প্রথম হইতে আরম্ভ করিয়া এক একটি পরিমাণগত মান ও তাহারই ফ্রিকোয়েন্সিকে স্থানাঙ্ক ধরিয়া এক একটি করিয়া বিন্দু স্থাপন করিবে। তৎপরে ক্ষুদ্রতম পরিমাণগত মানের ঠিক আগের মানটি OX রেখার উপর বসাইয়া ঐ দুই মানের মধ্যবর্তী দৈর্ঘ্যের মধ্যবিন্দুটি চিহ্নিত কর। অনুরূপে বৃহত্তম পরিমাণগত মানের ঠিক পরবর্তী মানটি OX রেখার উপর বসাইয়া ঐ মানদ্বয়ের মধ্যবর্তী দৈর্ঘ্যের মধ্যবিন্দু চিহ্নিত কর। তারপর প্রথম বিন্দু হইতে আরম্ভ করিয়া শেষ পর্যন্ত পর পর বিন্দুগুলি এক একটি সরলরেখা টানিয়া যোগ কর (অর্থাৎ প্রথম বিন্দুর সহিত দ্বিতীয় বিন্দু, দ্বিতীয় বিন্দুর সহিত তৃতীয় বিন্দু, এইভাবে যোগ কর)। এক্ষণে ঐ সরলরেখাগুলি ও অনুভূমিক রেখাটি দ্বারা সীমাবদ্ধ বহুভুজটিই উদ্দিষ্ট frequency polygon হইল।

উদাহরণ 1. একটি বিদ্যালয়ের বিভিন্ন বয়সের (আসন্ন বৎসরে) ছাত্রদের তালিকা নিম্নে দেওয়া হইল। ইহার ফ্রিকোয়েন্সি পলিগন অঙ্কিত কর।

বয়স	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
ছাত্রসংখ্যা	2	5	4	8	15	18	12	9	10	4	1

ছক কাগজে OX ও OY যথাক্রমে অনুভূমিক ও উল্লম্ব রেখাদ্বয় (লেখ 4 দেখ)। OX রেখা বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের দুইটি বাহু দ্বারা এক বৎসর এবং OY রেখা বরাবর অনুরূপ দুইটি বাহু দ্বারা একটি ছাত্রসংখ্যা সূচিত করিয়া ঐ ছক কাগজে এক একটি বয়স ও তাহার ফ্রিকোয়েন্সি সূচক বিন্দুগুলি স্থাপন

করিবার জন্য (6, 2), (7, 5), (8, 4),...,(16, 1) স্থানাঙ্কবিশিষ্ট বিন্দুগুলি স্থাপন করা হইল। তৎপরে বয়সের ক্ষুদ্রতম মান 6-এর ঠিক পূর্ববর্তী মান 5 এবং উহার বৃহত্তম মান 16-এর ঠিক পরবর্তী মান 17কে OX রেখার উপর বসাইয়া 6 ও 5-এর মধ্যস্থিত দূরত্বের মধ্যবিন্দুটি এবং 16 ও 17-এর মধ্যস্থিত দূরত্বের মধ্যবিন্দুটি যথাক্রমে A ও R দ্বারা চিহ্নিত করা হইল। এক্ষণে প্রথম

[লেখ 4]

বিন্দু A হইতে আরম্ভ করিয়া শেষ বিন্দু R পর্যন্ত পর পর বিন্দুগুলি AB, BC,···, PR প্রভৃতি এক একটি সরলরেখা টানিয়া যোগ করা হইল।

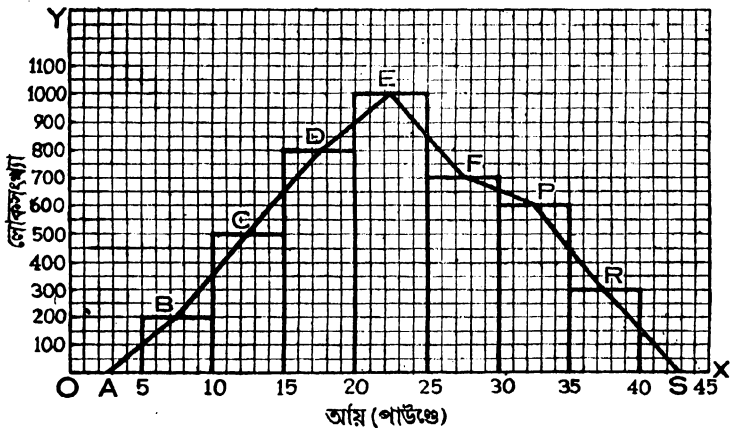
এইরূপে এই সরলরেখাগুলি ও অনুভূমিক-রেখা AR দ্বারা উৎপন্ন বহুভুজটিই উদ্দিষ্ট frequency polygon (পরিসংখ্যা বহুভুজ) হইল।

16. একই চিত্রে হিস্টোগ্রাম ও ফ্রিকোয়েন্সি পলিগন অঙ্কন।

কোন প্রদত্ত পরিসংখ্যা বিভাজনের প্রথমে হিস্টোগ্রাম অঙ্কিত করিয়া পরে উহার অনুভূমিক বাহুগুলির মধ্যবিন্দুগুলি পর পর সরলরেখা টানিয়া যোগ করিলে ঐ বিভাজনের frequency polygon পাওয়া যাইবে। নিম্নের উদাহরণ দেখ।

উদাহরণ 2. নিম্নে কতিপয় লোকের মাসিক আয়ের frequency distribution দেওয়া হইল। একই চিত্রে উহার histogram ও frequency polygon অঙ্কিত কর :—

আয় (পা.)	5 পা. হইতে 10 পা. এর নীচে	10পা. হইতে 15 পা. এর নীচে	15পা. হইতে 20 পা. এর নীচে	20পা. হইতে 25 পা. এর নীচে	25পা. হইতে 30 পা. এর নীচে	30পা. হইতে 35 পা. এর নীচে	35পা. হইতে 40 পা. এর নীচে
লোক সংখ্যা	200	500	800	1000	700	600	300

ছক কাগজে OX ও OY যথাক্রমে অনুভূমিক ও উল্লম্বরেখা (লেখ 5) লওয়া হইল। OX বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহু দ্বারা এক পাউণ্ড

[লেখ 5]

এবং OY বরাবর ঐরূপ দুইটি বাহু দ্বারা 100 লোকসংখ্যা সূচিত করা হইল। এক্ষণে প্রথমে পূর্বের প্রদর্শিত প্রণালীতে প্রদত্ত frequency distribution-এর histogram অঙ্কিত করা হইল। তৎপরে উহার OX-এর সমান্তরাল বাহুগুলির মধ্যবিন্দুগুলি B, C, D, ···, R দ্বারা চিহ্নিত করা হইল। এক্ষণে, 5—10

বিভাগের পূর্ববর্তী বিভাগটির মধ্যবিন্দুকে A দ্বারা এবং 35—40-এর পরবর্তী বিভাগটির মধ্যবিন্দুকে S দ্বারা চিহ্নিত করিয়া A হইতে S পর্যন্ত পর পর বিন্দুগুলি AB, BC,...,PR, RS সরলরেখা দ্বারা যুক্ত করা হইল। এই সরল-রেখাগুলি এবং AS সরলরেখা দ্বারা উৎপন্ন চিত্রটি একই চিত্রে উদ্দিষ্ট হিস্টোগ্রাম ও ফ্রিকোয়েন্সি পলিগন হইল।

17. Frequency Curve (পরিসংখ্যা-রেখা)

উপরের উদাহরণ 2-এ 5—10 ও 35—40 বিভাগ দুইটির উভয়প্রান্তে A ও S বিন্দু দুইটি না লইয়া কেবল B হইতে R পর্যন্ত (OX-এর সমান্তরাল আয়তলেখটির বাহুগুলির) মধ্যবিন্দুগুলি যোগ করিয়া যে বক্ররেখা উৎপন্ন হয় তাহাকে Frequency curve (**পরিসংখ্যা-রেখা**) বলে। ইহা closed curve নহে।

পরিসংখ্যা-বিভাজনের তুলনা: দুই বা ততোধিক পরিসংখ্যা-বিভাজনের তুলনামূলক আলোচনার জন্য একই চিত্রে বিভাজনগুলির **পরিসংখ্যা-রেখাগুলি** অঙ্কিত করিতে হয়। তখন ঐ রেখাগুলি হইতে তুলনামূলক তথ্য পাওয়া যায়।

18. Ogive (ক্রমযৌগিক-পরিসংখ্যা-রেখা)

Cumulative frequency distribution সম্বন্ধে পূর্বে আলোচনা করা হইয়াছে। কোন প্রদত্ত cumulative frequency distribution-এর লেখ অঙ্কিত করিলে সেই লেখকে Ogive (অজিভ বা ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা-রেখা) বলে।

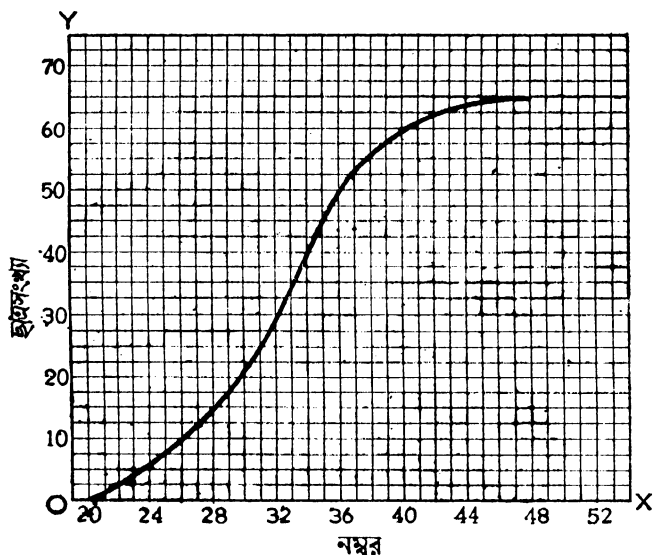
উদাহরণ 1. নিম্নে 65 জন ছাত্রের প্রাপ্ত নম্বরের frequency distribution হইতে অজিভ (Ogive) অঙ্কিত কর :—

শতকরা নম্বর	20 হইতে 24 এর নীচে	24 হইতে 28 এর নীচে	28 হইতে 32 এর নীচে	32 হইতে 36 এর নীচে	36 হইতে 40এর নীচে	40 হইতে 44 এর নীচে	44 হইতে 48এর নীচে
ছাত্র সংখ্যা	5	10	15	20	10	8	2

এখানে Cumulative frequency distribution হইল :

শতকরা নম্বর	24এর নীচে	28এর নীচে	32এর নীচে	36এর নীচে	40এর নীচে	44এর নীচে	48এর নীচে
Frequency	5	15	30	50	60	68	65

[লেখ 6] ছক কাগজে OX ও OY যথাক্রমে অনুভূমিক ও উল্লম্বরেখা লইয়া নির্বাচিত একক অনুসারে OX বরাবর 20, 24, 28 প্রভৃতি নম্বর সূচক সংখ্যাগুলি এবং OY বরাবর 10, 20, 30 প্রভৃতি ছাত্রসংখ্যাগুলি লেখা হইল। এখানে 20-র নীচে কেহ নম্বর পায় নাই বলিয়া 20 দাগ হইতে উল্লম্বরেখা বরাবর 0 একক ধরিয়া অর্থাৎ OX-এর উপর প্রথম বিন্দু স্থাপন করা হইল।

24-এর নীচে নম্বর পাওয়া ছাত্রসংখ্যা 5 বলিয়া 24 দাগ হইতে উল্লম্বরেখা বরাবর 5 একক উপরে দ্বিতীয় বিন্দু স্থাপন করা হইল। এইভাবে অবশিষ্ট

[লেখ 6]

বিন্দুগুলি স্থাপন করা হইল। এক্ষণে প্রথম বিন্দু হইতে আরম্ভ করিয়া পর পর বিন্দুগুলি যোগ করিয়া উদ্দিষ্ট Ogive পাওয়া গেল।

প্রশ্নমালা 2

1. কোন বিদ্যালয়ের পরপর চারি বৎসর মেয়াদী পরীক্ষাগুলিতে কৃতকার্য ছাত্রসংখ্যার শতকরা হার দেওয়া আছে। বিভিন্ন মেয়াদীতে বিদ্যালয়ের পাশের গড় রেখা চিত্রের সাহায্যে প্রকাশ কর।

Years	1st term	2nd term	3rd term	final
1956	75%	72%	86%	91%
1957	62%	58%	79%	86%
1958	81%	70%	68%	76%
1959	59%	65%	74%	86%

2. পৃথিবীর মোট ছাত্রসংখ্যার 20% আমেরিকাবাসী, 25% ইউরোপীয়, 35% এশিয়াবাসী, 5% আফ্রিকাবাসী এবং 15% অষ্ট্রেলিয়াবাসী। চিত্রের সাহায্যে ইহা প্রকাশ কর।

3. একটি বিদ্যালয়ের ছাত্রদের 40% হিন্দু, 35% মুসলমান এবং 25% খৃষ্টান। একটি পাই চিত্রে এই বিবরণটি প্রকাশ কর।

4. একটি বিদ্যালয়ের প্রথম ছয়টি শ্রেণীর ছাত্রসংখ্যা যথাক্রমে 70, 60, 50, 35, 45 ও 40 ; উল্লম্ব আয়তচিত্র দ্বারা বিবরণটি প্রকাশ কর।

5. একটি পাঠশালায় সোমবার হইতে শনিবার পর্যন্ত উপস্থিত ছাত্রসংখ্যা যথাক্রমে 79, 85, 63, 48, 72 ও 91 ; স্তম্ভ চিত্র ও পাই চিত্র সাহায্যে এই তথ্যটি প্রকাশ কর।

6. একটি কারখানার শ্রমিকদের মাসিক আয়ের তালিকা নিম্নে দেওয়া হইল ; উহা প্রকাশ করিয়া একটি histogram এবং একটি frequency polygon অঙ্কিত কর।

আয় (টাকায়)	30	35	40	45	50
শ্রমিকসংখ্যা	10	15	20	12	8

7. কোন শ্রেণীর ছাত্রগণ একটি পরীক্ষায় শতকরা যত নম্বর পাইয়াছে তাহার তালিকা নিম্নে দেওয়া হইল :—

প্রাপ্ত নম্বর	45%	50%	55%	60%	65%	70%	75%
ছাত্রসংখ্যা	8	10	12	20	15	9	6

এই তালিকা হইতে হিস্টোগ্রাম ও ফ্রিকোয়েন্সি পলিগন একই চিত্রে অঙ্কিত কর।

8. নিম্নে 54 জন লোকের মাসিক বেতনের তালিকা দেওয়া হইল :

85 টা. হইতে 89 টা.-এর নীচে	89 টা. – 93 টা. নীচে	93 টা. – 97 টা. নীচে	97 টা. – 101 টা. নীচে	101 টা. – 105 টা. নীচে	105 টা. – 109 টা. নীচে	109 টা. – 118 টা. নীচে
1	7	10	15	9	8	4

একই চিত্রে histogram ও frequency polygon অঙ্কিত করিয়া উপরের বিবরণটি প্রকাশ কর।

9. নিম্নে কতিপয় ছাত্রের ওজনের (কিলোগ্রামে) পরিসংখ্যা বিভাজন দেওয়া আছে। উহা হইতে Ogive অঙ্কিত কর।

ওজন (কি. গ্রা.)	ছাত্রসংখ্যা
24 হইতে 28 এর নীচে	1
28 ,, 32 ,, ,,	3
32 ,, 36 ,, ,,	5
36 ,, 40 ,, ,,	9
40 ,, 44 ,, ,,	15
44 ,, 48 ,, ,,	10
48 ,, 52 ,, ,,	8
52 ,, 56 ,, ,,	4
56 ,, 60 ,, ,,	2

10. নিম্নে দুইটি স্কুলের বিভিন্ন বয়সের ছাত্র ও ছাত্রীদের সংখ্যার তালিকা দেওয়া হইল। উহা হইতে একটি ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজন প্রস্তুত করিয়া শতকরা ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা রেখা দুইটি অঙ্কিত কর :—

বয়স (বৎসরে)	10এর নীচে	12এর নীচে	14এর নীচে	15এর নীচে
ছাত্রসংখ্যা	60	65	75	80
ছাত্রীসংখ্যা	10	15	20	25

Average (গড়)

19. **গড় (Average)।** গড় কাহাকে বলে, তাহা তোমরা পূর্বেই শিখিয়াছ। এই গড় রাশি-বিজ্ঞানের একটি প্রধান অঙ্গ।

রাশি-বিজ্ঞানে কোন চলকের বিভিন্ন মানগুলির সাধারণতঃ তিন প্রকার গড় ব্যবহৃত হয়। যথা, (1) **গাণিতিক গড়** বা **মিন** (Arithmetic mean বা Mean), (2) **মধ্যমা** বা **মধ্যমমান** বা **মিডিয়ান** (Median) এবং (3) **সংখ্যাগুরু মান** বা **মোড** (Mode)। গাণিতিক গড়ের অপর নাম যোগোত্তর গড়।

ঐ তিন প্রকার গড় ছাড়া আরও দুই প্রকার গড় আছে। যথা, (4) গুণোত্তর গড় (Geometric mean) এবং (5) Harmonic mean (প্রতিগাণিতিক গড়)। এই গড় দুইটি কচিৎ ব্যবহৃত হয়।

20. **মিন (Arithmetic mean)।** গড় বলিলে সাধারণ পাটীগাণিতিক গড়ই বুঝায়। উহাকে সংক্ষেপে গড় বা মিন (mean) বলা হয়।

2. পৃথিবীর মোট ছাত্রসংখ্যার 20% আমেরিকাবাসী, 25% ইউরোপীয়, 35% এশিয়াবাসী, 5% আফ্রিকাবাসী এবং 15% অষ্ট্রেলিয়াবাসী। চিত্রের সাহায্যে ইহা প্রকাশ কর।

3. একটি বিদ্যালয়ের ছাত্রদের 40% হিন্দু, 35% মুসলমান এবং 25% খৃষ্টান। একটি পাই চিত্রে এই বিবরণটি প্রকাশ কর।

4. একটি বিদ্যালয়ের প্রথম ছয়টি শ্রেণীর ছাত্রসংখ্যা যথাক্রমে 70, 60, 50, 35, 45 ও 40 ; উল্লম্ব আয়তচিত্র দ্বারা বিবরণটি প্রকাশ কর।

5. একটি পাঠশালায় সোমবার হইতে শনিবার পর্যন্ত উপস্থিত ছাত্রসংখ্যা যথাক্রমে 79, 85, 63, 48, 72 ও 91 ; স্তম্ভ চিত্র ও পাই চিত্র সাহায্যে এই তথ্যটি প্রকাশ কর।

6. একটি কারখানার শ্রমিকদের মাসিক আয়ের তালিকা নিম্নে দেওয়া হইল ; উহা প্রকাশ করিয়া একটি histogram এবং একটি frequency polygon অঙ্কিত কর।

আয় (টাকায়)	30	35	40	45	50
শ্রমিকসংখ্যা	10	15	20	12	8

7. কোন শ্রেণীর ছাত্রগণ একটি পরীক্ষায় শতকরা যত নম্বর পাইয়াছে তাহার তালিকা নিম্নে দেওয়া হইল :—

প্রাপ্ত নম্বর	45%	50%	55%	60%	65%	70%	75%
ছাত্রসংখ্যা	8	10	12	20	15	9	6

এই তালিকা হইতে হিস্টোগ্রাম ও ফ্রিকোয়েন্সি পলিগন একই চিত্রে অঙ্কিত কর।

8. নিম্নে 54 জন লোকের মাসিক বেতনের তালিকা দেওয়া হইল :

85 টা. হইতে 89 টা.-এর নীচে	89টা.– 93টা. নীচে	93টা.– 97টা. নীচে	97টা.– 101টা. নীচে	101টা.– 105টা. নীচে	105টা.– 109টা. নীচে	109টা.– 118টা. নীচে
1	7	10	15	9	8	4

একই চিত্রে histogram ও frequency polygon অঙ্কিত করিয়া উপরের বিবরণটি প্রকাশ কর।

কাপড়। এখানে প্রত্যেক রকমের একটি করিয়া সংখ্যা আছে। কিন্তু যদি বলা থাকে যে 10 টাকা দরের 3 খানি, 15 টাকা দরের 5 খানি ও 17 টাকা দরের 2 খানি কাপড়ের মূল্যের গড় নির্ণয় করিতে হইবে, তবে সেই গড়কে ভারযুক্ত গড় (weighted mean) বলে। এখানে ভার বা গুরুত্ব শব্দে ওজন বুঝাইতেছে না, উহা দ্বারা প্রত্যেক প্রকার কাপড়ের সংখ্যার গুরুত্ব বা ভার (অর্থাৎ সংখ্যায় কত) তাহাই বুঝায়।

এইস্থলে 10 টাকা দরের 3 খানি কাপড়ের মূল্য $=10$ টা. $\times 3$,

15 „ „ 5 „ „ „ $=15$ টা. $\times 5$,

এবং 17 „ „ 2 „ „ „ $=17$ টা. $\times 2$,

অতএব নির্ণেয় mean $=\frac{10\times 3+15\times 5+17\times 2}{3+5+2}$ টাকা

$=\frac{30+75+34}{10}$ টাকা $=\frac{139}{10}$ টাকা $=13\cdot 9$ টাকা।

সূত্র : Weighted mean-এর সূত্র নির্ণয়ের জন্য মনে কর N সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুগুলির সংখ্যা যথাক্রমে $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$ এবং উহাদের মূল্যগুলি যথাক্রমে $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ এবং উহাদের নির্ণেয় গড় M_x. অতএব সূত্র হইবে,

$$M_x=\frac{f_1x_1+f_2x_2+f_3x_3+\cdots+f_nx_n}{f_1+f_2+f_3+\cdots+f_n}=\frac{S(fx)}{S(f)}$$

$$=\frac{S(fx)}{N} \text{ বা } \frac{\Sigma fx}{N}\cdots(2).$$

সূত্র প্রয়োগ : কোন পর্যবেক্ষণের ফলে যদি তথ্যগুলির (data) সংখ্যা খুব বেশী হয়, তবে উহাদের frequency distribution table করিয়া গড় নির্ণয় করা হইয়া থাকে। কোন ক্ষেত্রে চলকটির ঐরূপ table করিবার সময় উহার এক একটি প্রকারের মান লইয়া সেই মানটি কতবার আছে তাহা দেখিতে হইবে এবং একটি স্তম্ভে নীচে নীচে বিভিন্ন মানগুলি ও অপর এক স্তম্ভে পাশাপাশি ঐ মান যতবার (frequency) আছে সেই সংখ্যাগুলি লিখিবে। তৎপরে তৃতীয় স্তম্ভে প্রত্যেক মান ও তাহার বারের সংখ্যার (frequency-র) গুণফলকে নীচে নীচে লিখিবে। এইরূপ তালিকাকে frequency distribution table বলে।

মনে কর, চলকটি X, উহার প্রত্যেক মানের frequency f এবং প্রত্যেক মান ও তাহার frequency-র গুণফল fX দ্বারা সূচিত করা হইল।

এখানে স্পষ্ট বুঝা যায় যে, f-গুলির সমষ্টি [অর্থাৎ $S(f)$] এবং মানগুলির মোট সংখ্যা অর্থাৎ N সমান। S বা Σ দ্বারা যোগফল সূচিত হয় তাহা পূর্বেই বলা হইয়াছে।

এক্ষণে fX স্তম্ভের যোগফলকে অর্থাৎ $S(fX)$-কে f স্তম্ভের যোগফল বা N দ্বারা ভাগ করিলে লব্ধ ভাগফলটি নির্ণেয় গড় হইবে।

অতএব, M_x বা $\overline{X}=\frac{S(fX)}{N}\ldots\ldots(3)$.

উদাহরণ 1. Calculate the mean of the following observations by making frequency distribution table.

18, 22, 20, 19, 24, 26, 18, 20, 19, 25, 24, 20, 24, 26, 25, 20, 25, 26, 19, 20, 25, 19, 25, 24.

বিভিন্ন মান X	মানের সংখ্যা f	উভয়ের গুণফল fX
18	2	36
19	4	76
20	5	100
22	1	22
24	4	96
25	5	125
26	3	78
	24	533

পার্শ্বে frequency distribution ছকটি প্রস্তুত করা হইল।

উহা হইতে পাই,

$S(fX)=533$

$N=24$

$\therefore\ \overline{X}=533\div24=22{\cdot}2.$

বিবিধ সমাধান

কল্পিত গড়ের (assumed mean-এর) সাহায্যে mean নির্ণয় প্রণালী দেখান হইতেছে।

22. কল্পিত গড়। অনেক ক্ষেত্রে প্রকৃত গড় মিশ্র ভগ্নাংশ হইলে সুবিধার জন্য উহার নিকটতম কোন গড়কে ধরিয়া লওয়া হয়। এই ধরিয়া লওয়া গড়কে **কল্পিত গড়** (assumed mean) বলে।

উপরের উদাহরণ 1-এ প্রকৃত গড় হইয়াছে 22·2, আমরা ঐ ক্ষেত্রে কল্পিত গড় 22 ধরিতে পারি।

Deviation (ডিভিয়েশন বা পার্থক্য)। কল্পিত গড় হইতে প্রত্যেক মানের (রাশির) অন্তরকে deviation বলে। Deviation-কে সংক্ষেপে d দ্বারা সূচিত করা হয়।

উদাহরণ 2. 434 ও 443-এর mean নির্ণয় কর।

এখানে পূর্ব প্রদর্শিত নিয়মে mean হইবে $(434+443)\div2=438{\cdot}5.$

[**অন্য প্রণালী**] মনে কর, আমরা উভয় সংখ্যার মাঝামাঝি 438-কে কল্পিত গড় ধরিলাম।

এক্ষণে, $\left.\begin{array}{l}434-438=-4\\443-438=\ \ \ 5\end{array}\right\}$ কল্পিত গড় হইতে ডিভিয়েশন (পার্থক্য)

$\therefore$ নির্ণেয় mean = কল্পিত গড় + deviation দুইটির গড়

$=438+\frac{-4+5}{2}=438+{\cdot}5=438{\cdot}5.$

[**দ্রষ্টব্য :** কতিপয় রাশির প্রকৃত গড় হইতে ঐ রাশিগুলির পার্থক্যসমূহের বীজগণিতীয় সমষ্টি শূন্য হয়। উপরের উদাহরণে প্রকৃত গড় (438·5)

হইতে প্রদত্ত রাশিদ্বয়ের পার্থক্য (deviation) −4·5 ও +4·5 এবং উহাদের সমষ্টি শূন্য (0)।]

উদাহরণ 3. নিম্নের তালিকায় 5টি শ্রেণীর ছাত্রদের ওজন দেওয়া হইল। উহা হইতে তাহাদের ওজনের গড় নির্ণয় কর।

ওজন (কি.গ্রামে)	35	38·25	39	40	42·5
ছাত্রসংখ্যা	18	24	16	22	20

মনে কর, কল্পিত গড় 39 কিলো গ্রাম ধরা হইল।

1 ওজন (কি. গ্রামে) x	2 ছাত্রসংখ্যা f	3 ডিভিয়েসান (প্রত্যেক ওজন − কল্পিত গড়) d	4 fd (f ও d-এর গুণফল) ধনাত্মক	 ঋণাত্মক
35	18	35 − 39 = − 4		−72
38·25	24	38·25 − 39 = − ·75		−18
39	16	39 − 39 = 0		
40	22	40 − 39 = 1	22	
41·5	20	41·5 − 39 = 2·5	50	
	সমষ্টি = 100		72	−90 +72
				−18

∴ নির্ণেয় গড় $= (39 + \frac{-18}{100})$ কি. গ্রা. $= (39 - \cdot18)$ কি. গ্রা.

$= 38{\cdot}82$ কিলোগ্রাম।

[**দ্রষ্টব্য :** তথ্যবহুল পরিসংখ্যানে বড় বড় গুণ না করিয়া এই প্রণালীতে গড় নির্ণয় করা হইয়া থাকে।]

অন্য প্রকার তালিকা হইতে mean নির্ণয়

উদাহরণ 4. মনে কর, একটি কয়লার খনি হইতে 124 দিন প্রত্যহ যে পরিমাণ (কুইণ্টালে) কয়লা তোলা হইয়াছে তাহার প্রসার 94 কুই. হইতে

125 কুইণ্টাল উহাদের frequency distribution নিয়ে (ছক নং 7) দেওয়া হইল। উহা হইতে mean নির্ণয় কর।

ছক নং 7

ওজন (কুইণ্টালে)	ফ্রিকোয়েন্সি f	ওজন (কুইণ্টালে)	ফ্রিকোয়েন্সি f
94— 97	2	110—113	20
98—101	5	114—117	16
102—105	12	118—121	30
106—109	14	122—125	25

এখানে মনে কর কল্পিত গড় 111·5 (110 – 113 বিভাগ হইতে) ধরা হইল। এক্ষণে,

বিভাগ	ফ্রিকোয়েন্সি f	mid point x	mid point- কল্পিতগড় d	$f \times d$	
				ধনাত্মক	ঋণাত্মক
94 – 97	2	95·5	–16		–32
98 – 101	5	99·5	–12		–60
102 – 105	12	103·5	– 8		–96
106 – 109	14	107·5	– 4		–56
110 – 113	20	111·5	0		
114 – 117	16	115·5	+ 4	+ 64	
118 – 121	30	119·5	+ 8	+240	
122 – 125	25	123·5	+12	+300	
	সমষ্টি = 124			+604 – 244 360	– 244

$\therefore$ নির্ণেয় mean $= (111{\cdot}5 + \frac{360}{124})$ কুই. $= (111{\cdot}5 + 2{\cdot}9)$ কুই.

$= 114{\cdot}4$ কুইণ্টাল (প্রায়)।

23. Median (মিডিয়ান বা মধ্যমা বা মধ্যমমান)।

আর একপ্রকার গড় আছে তাহাকে median (মধ্যমা বা মধ্যমমান) বলা হয়।

যদি কতকগুলি বিজোড় সংখ্যক রাশি দেওয়া থাকে এবং তাহাদিগকে মানের ঊর্ধ্বক্রমে বা অধঃক্রমে সাজান হয়, তবে ঠিক মধ্যস্থলের রাশিটিই প্রদত্ত রাশিগুলির median হইবে। উহার দুইধারে রাশির সংখ্যা সমান। মনে কর 7 টা., 8 টা., 9 টা., 10 টা. ও 11 টাকার মিডিয়ান নির্ণয় করিতে হইবে। এখানে মোট রাশি-সংখ্যা 5, সুতরাং ঠিক মধ্যস্থলের তৃতীয় (অর্থাৎ $\frac{5+1}{2}$ তম) রাশিটিই

মিডিয়ান হইবে। কতকগুলি রাশির arithmetic mean এবং median সমান না হইতে পারে। যদি প্রদত্ত রাশিগুলি সমান্তর হয়, তবেই উহাদের মিন ও মিডিয়ান সমান হয়। অতএব, মিডিয়ানকে প্রকৃত গড় বলা যায় না।

প্রদত্ত রাশিসংখ্যা জোড় হইলে উহাদের কোন একটি মধ্যবর্তী রাশি ধরা যায় না। সেইস্থলে মধ্যস্থলের পরপর দুইটি রাশিকে মধ্যবর্তী রাশি ধরা হয়। উহাদের দুই দিকে সমান সংখ্যক রাশি থাকে। ঐ দুই রাশির গড়ই রাশিসমূহের মিডিয়ান হইবে। মনে কর, 2″, 3″, 4″, 5″, 6″, 7″, 8″ ও 9″র median নির্ণয় করিতে হইবে। এখানে 8টি রাশি আছে, সুতরাং মধ্যবর্তী রাশি দুইটি হইবে। $\frac{8}{2}$তম ও $(\frac{8}{2}+1)$তম রাশিদ্বয় অর্থাৎ চতুর্থ ও পঞ্চম রাশিদ্বয় মধ্যবর্তী দুইটি রাশি। এখানে 5 ইঞ্চি ও 6 ইঞ্চি হইল মধ্যবর্তী রাশিদ্বয়। উহাদের গড় $=\frac{1}{2}$(5 ই.+6 ই.)$=5{\cdot}5$ ইঞ্চি।

অতএব নির্ণেয় median $=5{\cdot}5$ ইঞ্চি।

প্রদত্ত রাশিগুলি মানের ক্রম-অনুসারে সজ্জিত করিয়া তৎপরে median নির্ণয় করিবে।

24. Median নির্ণয়

রাশিগুলি অসজ্জিত থাকিলে উহাদিগকে মানের উচ্চ বা নিম্ন ক্রম অনুসারে সাজাইয়া লইয়া Median নির্ণয় করিতে হয়।

যদি রাশিগুলির সংখ্যা (অর্থাৎ N) বিজোড় হয়, তবে ঠিক মধ্যবর্তী রাশিটি অর্থাৎ $\frac{N+1}{2}$তম রাশিটি Median হইবে।

আর যদি রাশিগুলির সংখ্যা (অর্থাৎ N) জোড় হয়, তবে ঠিক মধ্যস্থিত পর পর দুইটি রাশির গড় নির্ণেয় median হইবে, অর্থাৎ এক্ষেত্রে $\frac{N}{2}$তম ও $\left(\frac{N}{2}+1\right)$ তম রাশি দুইটির গড় হইবে নির্ণেয় মিডিয়ান।

উদাহরণ 1. 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19 এই রাশিগুলির median নির্ণয় কর।

এখানে পদ-সংখ্যা N=7 (বিজোড়), সুতরাং $\frac{N+1}{2}$তম পদ হইলে $\frac{7+1}{2}$তম বা চতুর্থ পদ। এখানে চতুর্থ পদ 13, সুতরাং নির্ণেয় median = 13.

উদাহরণ 2. 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31 রাশিগুলির median নির্ণয় কর।

এখানে পদসংখ্যা N=8 (জোড়) সুতরাং উহাদের ঠিক মধ্যবর্তী পদ একটি না হইয়া দুইটি হইবে, $\frac{N}{2}$-তম ও $\left(\frac{N}{2}+1\right)$-তম পদদ্বয় সেই দুইটি মধ্যপদ।

এখানে N-এর মান 8 বসাইয়া পাই যে চতুর্থ ও পঞ্চম পদ দুইটি মধ্যপদ। অতএব এখানে median হইবে ঐ চতুর্থ ও পঞ্চম পদদ্বয়ের গড়।

∴ নির্ণেয় median $=\frac{19+22}{2}=20{\cdot}5$.

[**দ্রষ্টব্য :** উপরের উদাহরণ দুইটি হইতে দেখা যাইতেছে যে, প্রদত্ত রাশিসমূহের মধ্যে যতগুলি রাশি লব্ধ মধ্যমা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর, ঠিক ততগুলি রাশি ঐ মধ্যমা অপেক্ষা বৃহত্তর থাকিবে। যদি রাশিগুলি ঠিক সমরূপভাবে বিস্তৃত থাকে, তবে median ও mean সমান হইয়া থাকে।]

উদাহরণ 3. Find the median of the following observations:

25, 18, 22, 20, 19, 24, 26, 18, 20, 19, 24, 20, 24, 26, 25, 20, 19, 25, 26, 20, 25, 19, 25, 24.

এখানে প্রদত্ত সংখ্যাগুলিকে মানের ক্রম অনুসারে সাজাইলে পাই :

18, 18, 19, 19, 19, 19, 20, 20, 20, 20, 20, 22, 24, 24, 24, 24, 25, 25, 25, 25, 25, 26, 26, 26.

∵ এখানে রাশি সংখ্যা 24, ∴ 12-তম রাশি 22 এবং 13-তম রাশি 24-এর গড়ই মিডিয়ান হইবে।

∴ নির্ণেয় median $=\frac{22+24}{2}=23$.

25. Frequency distribution হইতে median নির্ণয়।

Median নির্ণয়ের সূত্র

মনে কর, M_d = median,

f_0 = যে বিভাগে median আছে তাহার পূর্ববিভাগ পর্যন্ত cumulative frequency

f_1 = যে বিভাগে median অবস্থিত তাহার frequency

L = ঐ বিভাগটির lower limit (নিম্নসীমা)

i = interval এবং N = মোট ফ্রিকোয়েন্সি।

অতএব, সূত্র হইবে $M_d=L+\dfrac{\frac{N}{2}-f_0}{f_1}\times i$.

উদাহরণ 4. মনে কর, আমরা 7 নং ছক হইতে median নির্ণয় করিতেছি।

এখানে N = 124, সুতরাং $\frac{N}{2}=62$.

এখানে দেখা যায়, প্রথম 5টি ফ্রিকোয়েন্সির সমষ্টি 53, ইহা 62 অপেক্ষা কম, কিন্তু প্রথম 6টি ফ্রিকোয়েন্সির সমষ্টি 62 অপেক্ষা বেশী। অতএব, মিডিয়ান ষষ্ঠ বিভাগে (অর্থাৎ 114 – 117 বিভাগে) অবস্থিত। ঐ বিভাগের lower limit হইল 113·5 এবং ফ্রিকোয়েন্সি হইল 16.

অতএব, $L=113{\cdot}5,\ \frac{N}{2}=62,\ f_0=53,\ f_1=16,\ i=4.$

$$\therefore \text{ নির্ণেয় মিডিয়ান } M_d = L+\frac{\frac{N}{2}-f_0}{f_1}\times i = 113{\cdot}5+\frac{62-53}{16}\times 4$$

$$=(113{\cdot}5+2{\cdot}25) \text{ কুই.}$$

$$=115{\cdot}75 \text{ কুইণ্টাল (প্রায়)।}$$

দ্রষ্টব্য : Mean গড়ের ন্যায় median নির্ভরযোগ্য নহে। একটি দৃষ্টান্ত দ্বারা ইহা বুঝান যাইতেছে।

মনে কর, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 এই শ্রেণীটি লওয়া হইল। শ্রেণীটির পদগুলি সমঞ্জসভাবে (symmetrically) বিস্তৃত বলিয়া ইহার median হইল চতুর্থ পদ 9. আবার উহার mean হইল (পদগুলির সমষ্টি ÷ 7) অর্থাৎ 9. এখন যদি 9 অপেক্ষা বৃহত্তর সংখ্যাগুলির পরিবর্তে আমি ইচ্ছামত 9 অপেক্ষা বৃহত্তর অন্য যে কোন তিনটি সংখ্যা লই, তাহা হইলেও median-এর কোনই পরিবর্তন হইবে না, কিন্তু meanএর পরিবর্তন হইবে।

মনে কর, উপরের শ্রেণীটিতে 9এর পরবর্তী সংখ্যা তিনটি পরিবর্তন করিয়া 3, 5, 7, 9, 14, 16, 23 শ্রেণীটি লওয়া হইল। শ্রেণীটিতে 7টি পদ থাকায় উহার median হইল চতুর্থ পদ 9. অতএব পদগুলির মান বদলাইয়া গেলেও median একই থাকিল। উহাদের মিন কিন্তু (3+5+7+9+14+16+23) ÷ 7 অর্থাৎ 11 হইল। এইজন্যই বলা হইয়াছে যে median তত নির্ভরযোগ্য নহে।

উদাহরণ 5. নিম্নের পরিসংখ্যা বিভাজন হইতে median নির্ণয় কর।

বিভাগ	পরিসংখ্যা
70—74	3
75—79	4
80—84	7
85—89	10
	24
90—94	15
95—99	8
100—104	6
105—109	4
110—114	3
	N=60

এখানে পরিসংখ্যা সমষ্টি N=60, $\frac{N}{2}=30$, সুতরাং 30-তম ও 31-তম রাশিদ্বয়ের গড় হইবে মিডিয়ান। প্রথম চারিটি বিভাগের পরিসংখ্যা সমষ্টি 24. আর 6টি হইলে 30টি রাশি হয়, সুতরাং নির্ণেয় মিডিয়ানটি 90—94 বিভাগটিতে আছে। ঐ 24টি রাশির প্রত্যেকটি 89·5এর কম, কারণ চতুর্থ বিভাগের শেষ সীমা 89·5. পরবর্তী (90—94) বিভাগের পরিসংখ্যা 15, সুতরাং উহাতে 15টি রাশি আছে এবং উহাদের মধ্যে (30—24) বা 6টি রাশি 89·5 অপেক্ষা কম। এখানে এক একটি বিভাগের প্রসার 5 ;

অতএব নির্ণেয় মিডিয়ান $=89{\cdot}5+\frac{6}{15}\times 5=89{\cdot}5+2=91{\cdot}5$.

উদাহরণ 6, কোন কারখানার মজুরদের মাসিক আয়ের তালিকা নিম্নে দেওয়া হইল। উহাদের আয়ের median নির্ণয় কর।

20 টাকা ও 25 টাকার মধ্যে	...245 জন
25 " " 30 " "	...322 "
30 " " 35 " "	...525 "
35 " " 40 " "	...275 "
40 " " 45 " "	...230 "
এখানে N=	1597

অতএব, মিডিয়ানটি $\frac{1597+1}{2}$-তম বা 799 তম রাশি। প্রথম দুই বিভাগের জনসংখ্যা 567, সুতরাং মিডিয়ানটি 30—35 বিভাগে অবস্থিত। ঐ বিভাগের নিম্নতম আয় 30 টাকা, জনসংখ্যা 525 এবং প্রসার 5.

∴ নির্ণেয় মিডিয়ান $=30$ টাকা $+\frac{799-567}{525}\times 5$ টাকা

$=30$ টাকা $+2{\cdot}2095$ টা. $=32{\cdot}2$ টাকা (আসন্ন)।

26. Mode (সংখ্যাগুরুমান বা মোড্)

আর এক প্রকারের গড়কে মোড্ (Mode) বলা হয়, উহাকে "সংখ্যাগুরুমান" বলা যায়।

কোন চলকের প্রদত্ত মানগুলিকে মানের ক্রম অনুসারে সজ্জিত করিলে যে মানটি মধ্যভাগে সর্বাধিকবার থাকে তাহাকেই ঐ মানগুলির মোড (mode) বলা হয়।

উদাহরণ। মনে কর, 9, 9, 11, 12, 12, 12, 13, 17, 18 এই সংখ্যাগুলির মোড্ নির্ণয় করিতে হইবে।

এখানে দেখা যায় যে, 12 সংখ্যাটি সর্বাধিকবার (এখানে 3 বার) দেওয়া আছে, সুতরাং প্রদত্ত সংখ্যাগুলির mode 12 হইল।

যদি প্রদত্ত মানগুলির মধ্যে সব মানই একবার করিয়া থাকে, তবে তাহাদের কোন মোড্ হইবে না। কারণ, কোন একটি মান অন্য মান অপেক্ষা অধিক বার নাই।

আরও দেখ। উপরের উদাহরণে 12-র আগের তিনটি মান যদি 9, 9, 11 না হইয়া অন্য কোন মান হইত [যথা, 7, 8, 10) অথবা যদি 12-র পরের তিনটি মান 13, 17, 18 না হইয়া অন্য কোন মান (যথা 15, 19, 20) হইত, তথাপি উহাদের মোড্ হইত 12, কারণ উভয় স্থলেই 12ই সর্বাধিক সংখ্যকবার প্রদত্ত মান হইত।

27. Mode নির্ণয় প্রণালী

(1) উপরের নিয়মে প্রদত্ত মানগুলিকে মানের ক্রমানুসারে সাজাইয়া মোড্ নির্ণয় করা যায়।

(2) প্রদত্ত মানগুলির শ্রেণীবিভাগ করিয়া (by grouping) মোড্ নির্ণয় করা যায়।

(3) প্রদত্ত মানগুলির frequency distribution হইতে মোড্ নির্ণয় করা যায়। এক্ষেত্রে সূত্র হইল :

$$\text{Mode } (M_o) = L + \frac{f_2}{f_1 + f_2} \times i, \text{ এস্থলে}$$

L = যে বিভাগে mode অবস্থিত তাহার lower limit,
f_1 = মোড্ যে বিভাগে আছে তাহার ঠিক পূর্ববর্তী বিভাগের ফ্রিকোয়েন্সি,
f_2 = মোড্ বিভাগটির ঠিক পরবর্তী বিভাগের ফ্রিকোয়েন্সি,
i = interval.

(4) নিম্নের সূত্রটি হইতেও mode নির্ণীত হয়।

সূত্র : Mode = Mean − 3 (Mean − Median)
= 3 Median − 2 Mean

[সংক্ষেপে, $M_o = 3M_d - 2M$]

(5) অন্য প্রণালী উদাহরণ 4-এ দেখ।

উদাহরণ 1. কোন শ্রেণীর 74 জন ছাত্রের বয়সের তালিকা নিম্নে দেওয়া হইল। উহা হইতে ছাত্রদের বয়সের মোড্ নির্ণয় কর।

ছাত্রসংখ্যা	10	12	14	18	11	5	4
বয়স (বৎসরে)	8	9	10	11	12	14	15

সর্বাধিক সংখ্যক ছাত্রের বয়সই নির্ণেয় মোড্ হইবে। তালিকা হইতে দেখা যাইতেছে যে একটি বিভাগে সর্বাধিক ছাত্রসংখ্যা 18 এবং ঐ বিভাগের ছাত্রদের বয়স 11 বৎসর।

অতএব, বয়সের নির্ণেয় মোড্ $=11$ বৎসর।

উদাহরণ 2. ছক নং 7এ প্রদত্ত মানগুলির মোড্ নির্ণয় কর।

আমরা পাইয়াছি উক্ত তালিকায় প্রদত্ত মানগুলির mean $=114{\cdot}4$ এবং উহাদের median $=115{\cdot}75$ (পূর্বে নির্ণীত)।

$\therefore$ নির্ণেয় Mode $=3$ median -2 mean

$=115{\cdot}75\times3-114{\cdot}4\times2=347{\cdot}25-228{\cdot}8=118{\cdot}45$ কুইণ্টাল।

উদাহরণ 3. নিম্নের ছক হইতে mode নির্ণয় কর :

Interval	Frequency	Interval	Frequency
9·5—10·5	12	12·5—13·5	30
10·5—11·5	25	13·5—14·5	15
11·5—12·5	36	14·5—15·5	1

দেখা যায় মোড্টি $11{\cdot}5-12{\cdot}5$ বিভাগে অবস্থিত। ঐ বিভাগের lower limit $=11{\cdot}5$. অতএব,

এখানে $L=11{\cdot}5,\ f_1=25,\ f_2=30,\ i=1.$

$$\therefore \text{ নির্ণেয় মোড্} = L+\frac{f_2}{f_1+f_2}\times i = 11{\cdot}5+\frac{30}{25+30}\times1 = 11{\cdot}5+\frac{6}{11}$$

$$=12{\cdot}05 \text{ (আসন্ন)।}$$

উদাহরণ 4. নিম্নে 55 জন ছাত্রের উচ্চতার তালিকা দেওয়া হইল। উহা হইতে ছাত্রদের উচ্চতার mode নির্ণয় কর :—

ছাত্রসংখ্যা	4	7	10	15	8	6	5
উচ্চতা (ইঞ্চিতে)	25 − 30	30 − 35	35 − 40	40 − 45	45 − 50	50 − 55	55 − 60

[**অন্য প্রণালী**] ঐ তালিকায় দেখা যাইতেছে 40—45 বিভাগের ছাত্র সংখ্যা (অর্থাৎ 15) সর্বাপেক্ষা অধিক। নির্ণেয় মোড্ ঐ বিভাগের অন্তর্গত। ঐ বিভাগের উচ্চতা 40 ইঞ্চি ও 45 ইঞ্চির মধ্যে অবস্থিত।

ঐ বিভাগের ছাত্রসংখ্যা 15, উহার ঠিক পূর্ববর্তী বিভাগটির ছাত্রসংখ্যা 10 এবং উহার ঠিক পরবর্তী বিভাগটির ছাত্রসংখ্যা 8 আছে।

$$15-10=5,\ 15-8=7$$

নির্ণেয় মোড্‌টি 40 ইঞ্চি ও 45 ইঞ্চির মধ্যে। মনে কর, মোড্‌টি M. উহা 40 ইঞ্চির বেশী ও 45 ইঞ্চির কম। অতএব, M হইতে 40এর অন্তর এবং 45 হইতে M-এর অন্তরের অনুপাত 5 : 7 হইবে।

অতএব, $\frac{M-40}{45-M}=\frac{5}{7}$, বা $7M-280=225-5M$, বা $12M=505$,

$\therefore$ $M=42{\cdot}08$. $\therefore$ নির্ণেয় মোড্ $=42{\cdot}08$ ইঞ্চি (প্রায়)।

28. লেখচিত্র সাহায্যে মোড্ নির্ণয়। লেখচিত্র সাহায্যে frequency distribution হইতে median ও mode নির্ণয় করা যায়। প্রথমে প্রদত্ত তথ্যগুলির frequency distribution প্রস্তুত করিতে হইবে। তৎপরে উহা হইতে লেখ অঙ্কিত করিলে একটি বক্ররেখা (curve) পাওয়া যাইবে। লেখটির সর্বোচ্চ বিন্দুর ভুজই নির্ণেয় মোড্ হইবে। আর, cumulative frequency distribution হইতে লেখ অঙ্কিত করিয়া median নির্ণয় করা যায়।

প্রশ্নমালা 3

1. গড় নির্ণয় কর :

(i) 325, 927, 630 (ii) $13\frac{3}{4}$, $19\frac{3}{8}$ ও $21\frac{7}{16}$

(iii) 107, 210·24, 90·06, 51·2, 112·75

2. (*a*) নিম্নের রাশিগুলির মিন, মিডিয়ান ও মোড্ নির্ণয় কর :—

21, 33, 27, 23, 24, 32, 28, 24, 27, 22. 27.

(*b*) নিম্নের তালিকায় একটি সপ্তাহের চাউলের মণ প্রতি বাজার দর টাকায় দেওয়া আছে।

বার	সোমবার	মঙ্গলবার	বুধবার	বৃহস্পতিবার	শুক্রবার	শনিবার	রবিবার
চাউলের মণ প্রতি বাজার দর	28·4	28·7	29·1	29·5	28·9	28·3	27·9

ঐ সপ্তাহে চাউলের মণ প্রতি বাজার দরের (1) mean, (2) median **এবং** (3) mode **নির্ণয় কর।**

3. প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার median কত ?

4. 15 টাকা দরে 12 খানি, 12 টা. 50 প. দরে 10 খানি এবং 13 টা. 25 প. দরের 8 খানি পুস্তক কিনিলে গড়ে একখানি পুস্তকের মূল্য কত টাকা হয় ?

5. 334কে কল্পিত গড় ধরিয়া 328, 332, 337 ও 340-এর গড় নির্ণয় কর।

6. নিম্নে 25 জন লোকের সাপ্তাহিক আয়ের তালিকা দেওয়া হইল। উহা হইতে তাহাদের সাপ্তাহিক আয়ের mean নির্ণয় কর।

আয় (টাকায়)	19	20	21	22	23	24	25
লোকসংখ্যা	1	3	5	7	6	2	1

7. নিম্নে কোন চলকের মানগুলির frequency distribution ছক দেওয়া হইল। উহা হইতে ঐ মানগুলির মিন, মিডিয়ান ও মোড্ নির্ণয় কর।

x	... f	x	... f	x	... f
90— 93	2	110—113	24	130—133	18
94— 97	4	114—117	27	134—137	13
98—101	7	118—121	35	138—141	6
102—105	12	122—125	26	142—145	5
106—109	19	126—129	21	146—149	2
				150—153	1

8. নিম্নে 50টি ছাত্রের পরীক্ষায় লব্ধ নম্বর দেওয়া আছে :

41, 49, 41, 35, 35, 55, 50, 38, 49, 46, 28, 64, 48, 31, 45, 49, 66, 46, 21, 27, 50, 49, 26, 39, 52, 48, 44, 50, 49, 45, 61, 49, 38, 41, 50, 52, 32, 35, 44, 61, 39, 52, 47, 29, 48, 40, 44, 29, 50, 40.

(*a*) প্রদত্ত প্রথম 25টি নম্বরের mean কত ?

(*b*) প্রদত্ত শেষ 26টি নম্বরের mean নির্ণয় কর।

(*c*) প্রদত্ত নম্বরগুলির median এবং

(*d*) মোড্ নির্ণয় কর।

9. 25, 29, 31, 37, 43এর mean হইতে উহাদের অন্তরফলগুলির বীজগণিতীয় সমষ্টি কত ?

10. নিম্নে কোন শহরের শিশুদের বয়সের তালিকা দেওয়া হইল। উহা হইতে তাহাদের বয়সের মোড্ নির্ণয় কর।

বয়স (বৎসরে)	1	2	3	4	5	6
শিশুসংখ্যা	300	355	355	365	185	275

11. দুইটি ঘোড়া পর পর 5 ঘণ্টায় যথাক্রমে 18, 19, 20, 16, 13 কি. মি. এবং 26, 16, 11, 27, 5 কিলো মিটার দৌড়াইল। কোন্ ঘোড়াটির বেগ অধিকতর দ্রুত তাহা উহাদের গড় হইতে নির্ণয় কর।

12. কোন পরীক্ষায় 115 জন ছাত্র শতকরা যত নম্বর পাইয়াছে তাহার তালিকা নিম্নে দেওয়া হইল। উহা হইতে নম্বরের median ও মোড নির্ণয় কর :

নম্বর	53 – 55 এর মধ্যে	55 – 57 এর মধ্যে	57 – 59 এর মধ্যে	59 – 61 এর মধ্যে	61 – 63 এর মধ্যে
ছাত্রসংখ্যা	15	25	35	23	17

29. Deviation (পার্থক্য বা ব্যত্যয়)

কোন চলকের মানগুলির গড় হইতে প্রত্যেক মানের অন্তরকে deviation (পার্থক্য বা ব্যত্যয়) বলে।

পূর্বে দেখান হইয়াছে যে, দুইটি বিভিন্ন রাশির গড় সমান হইলেও deviation সমান না হইতে পারে। সেইরূপ, দুইটি রাশির deviation সমান হইলেও তাহাদের গড় দুইটি এক না হইতে পারে।

পরিসংখ্যান বিজ্ঞানে গড়টি কি পরিমাণে ঠিক (অর্থাৎ ভুলের পরিমাণ অত্যল্প) তাহা স্থির করিবার জন্য এই deviation নির্ণয় অত্যাবশ্যক।

এই পার্থক্য দুই প্রকার—Mean deviation বা Average deviation (গড় পার্থক্য) এবং Standard deviation (সমক পার্থক্য)।

30. Mean deviation (গড় পার্থক্য)

মিন ডিভিয়েশন : প্রদত্ত মানগুলির গড় হইতে ঐ মানগুলির (চিহ্নবর্জিত) অন্তরফলগুলির গড়কে **mean deviation** বলে।

Mean deviation নির্ণয় : প্রথমে প্রদত্ত মানগুলির (data) গড় (average) নির্ণয় করিয়া সেই গড় হইতে প্রত্যেক মানের অন্তরফলগুলি লিখিবে। তারপর ঐ অন্তরফলগুলির (তাহাদের ধনাত্মক বা ঋণাত্মক চিহ্নগুলি না ধরিয়া) সমষ্টি নির্ণয় করিবে। তৎপরে ঐ সমষ্টিকে মানগুলির মোট সংখ্যা (N) দ্বারা ভাগ করিবে। লব্ধ ভাগফলটি mean deviation বা mean variation হইবে। ইহাকে Average variation‍ও বলা হয়।

পূর্বেই বলা হইয়াছে যে, ঐ মানগুলির median বা mode হইতে প্রত্যেক মানের অন্তরফলগুলি লিখিয়া উক্ত প্রকারে mean deviation নির্ণয় করা যায়।

উদাহরণ 1. নিম্নের মানগুলির mean deviation নির্ণয় কর :

24, 20, 22, 23, 21, 19, 22, 23, 20, 23, 22, 20, 22, 25, 21, 22, 21, 24, 23, 21, 22, 24, 22, 21, 23.

এখানে মানগুলির সমষ্টি $=550$, এবং মানগুলির মোট সংখ্যা $=25$.

$\therefore$ উহাদের গড় (mean) $=\frac{550}{25}=22$.

এক্ষণে ঐ mean এবং বিভিন্ন মানগুলির অন্তরফলগুলি যথাক্রমে 2, -2, 0, 1, -1, -3, 0, 1, -2, 1, 0, -2, 0, 3, -1, 0, -1, 2, 1, -1, 0, 2, 0, -1, 1. ধনাত্মক ও ঋণাত্মক চিহ্নগুলি ছাড়িয়া ঐ অন্তরগুলির সমষ্টি হইল 28, এখানে $N=25$.

$\therefore$ নির্ণেয় mean deviation $=\frac{28}{25}=1.12$.

[এখানে Median এবং mode হইতেও ঐ mean deviation বাহির করা যাইত।]

উদাহরণ 2. নিম্নে 125 জন ছাত্রের কোন পরীক্ষায় প্রাপ্ত নম্বরের frequency distribution দেওয়া হইল। ঐগুলির median হইতে mean deviation নির্ণয় কর।

প্রাপ্ত নম্বর	92	87	82	77	72	67	62	57	52	47	
ছাত্রসংখ্যা	4	6	12	19	37	24	11	6	4	2	N = 125

এখানে দেখা যায় যে, কল্পিত medianটি 72 ধরা যায়। এক্ষণে প্রদত্ত তালিকা হইতে পাই :

নম্বর (1)	ফ্রিকোয়েন্সি (ছাত্রসংখ্যা) (2)	কল্পিত মধ্যমা (3)	মিডিয়ান হইতে পার্থক্য (চিহ্নবর্জিত) (4)	ফ্রিকোয়েন্সি ও পার্থক্যের গুণফল বা মোট পার্থক্য (2)×(4)
92	4	72	92 − 72 = 20	20 × 4 = 80
87	6		87 − 72 = 15	15 × 6 = 90
82	12		82 − 72 = 10	10 × 12 = 120
77	19		77 − 72 = 5	5 × 19 = 95
72	37		72 − 72 = 0	0 × 37 = 0
67	24		72 − 67 = 5	5 × 24 = 120
62	11		72 − 62 = 10	10 × 11 = 110
57	6		72 − 57 = 15	15 × 6 = 90
52	4		72 − 52 = 20	20 × 4 = 80
47	2		72 − 47 = 25	25 × 2 = 50
সমষ্টি	N = 125			835

∴ নির্ণেয় mean deviation $= \frac{835}{125} = 6{\cdot}68$.

31. Standard deviation (সমক পার্থক্য)

Standard deviation : পরিসংখ্যান বিষয়ে Standard deviation বিশেষ প্রয়োজনীয়। নিম্নলিখিত উপায়ে ইহা নির্ণয় করিতে হয় :

(i) প্রদত্ত মানগুলির (বা সংখ্যাগুলির) গড় (arithmetic average) নির্ণয় করিবে। (ii) মিন হইতে বিভিন্ন মানগুলির অন্তরফলগুলির বর্গ নির্ণয় করিবে। (iii) ঐ বর্গসমূহের সমষ্টিকে মানগুলির মোট সংখ্যা (N) দ্বারা ভাগ করিবে। (iv) তৎপরে ঐ ভাগফলের বর্গমূল নির্ণয় করিবে। ঐ বর্গমূলটিই নির্ণেয় Standard deviation হইবে।

সূত্র নির্ণয় : মনে কর, একটি চলের বিভিন্ন মানকে X দ্বারা, মানগুলির mean-কে M দ্বারা, কোন সমষ্টিকে S দ্বারা এবং মানগুলির সংখ্যাকে N দ্বারা সূচিত করা হইল। σ (Sigma) এই চিহ্ন দ্বারা Standard deviation সূচিত হইয়া থাকে।

এক্ষণে, (X − M) দ্বারা mean হইতে এক একটি মানের অন্তরফলকে বুঝাইবে ; ঐ অন্তরফলগুলির বর্গসমূহের সমষ্টি হইবে $S(X-M)^2$. অতএব সূত্র হইল $\sigma = \sqrt{\frac{S(X-M)^2}{N}}$……(6).

[দ্রষ্টব্য : Standard deviation-এর বর্গকে ভেদাঙ্ক (variance) বলে। $\therefore \quad \sigma^2 = \frac{S(X-M)^2}{N}$].

উদাহরণ 1. Find the standard deviation of the following items : 4, 6, 9, 13, 19, 22, 23, 24, 25, 29, 32, 34.

(Item) X	(Deviation from the mean) X—M	(Squares of deviations) (X—M)²
4	—16	256
6	—14	196
9	—11	121
13	— 7	49
19	— 1	1
22	2	4
23	3	9
24	4	16
25	5	25
29	9	81
32	12	144
34	14	196
S(X)=240		1098

এখানে $N=12, \quad \therefore \quad M=\frac{240}{12}=20,\ S(X-M)^2=1098.$

$$\therefore \quad \sigma=\sqrt{\frac{S(X-M)^2}{N}}=\sqrt{\frac{1098}{12}}=\sqrt{91{\cdot}5}=9{\cdot}56.$$

যদি N-এর মান খুব বেশী হয় এবং mean একটি অখণ্ড সংখ্যা না হয়, তবে পূর্ব প্রণালীতে Standard deviation নির্ণয় করা কঠিন হয়।

সেক্ষেত্রে নিম্নের সূত্রটি প্রয়োগ করা যায়।

সূত্র : $(\sigma)^2=\frac{S(X^2)}{N}-M^2 \cdots (7)$, বা, $\sigma=\sqrt{\frac{S(X^2)}{N}-M^2} \cdots (8)$

উদাহরণ 2. নিম্নে কতকগুলি বালকের বয়সের frequency distribution দেওয়া হইল। উহা হইতে স্ট্যাণ্ডার্ড ডিভিয়েশন নির্ণয় কর।

বয়স (বৎসর) (X)	1	2	3	4	5	6	7
বালক সংখ্যা (f)	2	5	4	10	11	6	2

প্রদত্ত তালিকায় আরও fX ও fX^2 স্তম্ভ দুইটি যোগ করিয়া পাই

X	X^2	f	fX	fX^2
1	1	2	2	2
2	4	5	10	20
3	9	4	12	36
4	16	10	40	160
5	25	11	55	275
6	36	6	36	216
7	49	2	14	98
		N=40	169	807

এখানে $N=S(f)=40,\quad S(fX)=169,\quad S(fX^2)=807$

$$\therefore\ M=\frac{S(fX)}{N}=\frac{169}{40},\quad \therefore\ \sigma^2=\frac{S(fX^2)}{N}-M^2=\frac{807}{40}-\left(\frac{169}{40}\right)^2$$

$$=20{\cdot}175-17{\cdot}8506=2{\cdot}3244$$

$$\therefore\ \sigma=\sqrt{2{\cdot}3244}=1{\cdot}524.$$

উদাহরণ 3. নিম্নে প্রদত্ত 90 জন শ্রমিকের সাপ্তাহিক আয়ের frequency distribution হইতে আয়ের standard deviation নির্ণয় কর :

সাপ্তাহিক আয় (টাকায়)	5–7	8–10	11–13	14–16	17–19	20–22	23–25
শ্রমিকসংখ্যা	6	12	20	25	15	8	4

সমাধান :—প্রদত্ত তালিকা হইতে পাই—

আয় (আসন্ন টাকায়)	ফ্রিকোয়েন্সি f	Midpoint (বিভাগের) X	X^2	fX	fX^2
5— 7	6	6	36	36	216
8—10	12	9	81	108	972
11—13	20	12	144	240	2880
14—16	25	15	225	375	5625
17—19	15	18	324	270	4860
20—22	8	21	441	168	3528
23–25	4	24	576	96	2304
সমষ্টি=	90			1293	20385

এক্ষণে, $S(fX^2)=20385,\quad N=90,\quad M=\frac{fX}{N}=\frac{1293}{90}$

$$\therefore \quad \sigma \text{ (সমক পার্থক্য)} = \sqrt{\frac{S(fX)^2}{N} - M^2} = \sqrt{\frac{20385}{90} - \left(\frac{1293}{90}\right)^2}$$

$$= \sqrt{226{\cdot}5 - (14{\cdot}36)^2} = \sqrt{226{\cdot}5 - 206{\cdot}401} = \sqrt{20{\cdot}099} = 4{\cdot}48 \cdots ।$$

প্রশ্নমালা 4

1. কোন চলকের 9, 8, 7, 6, 5 এই মানগুলির mean deviation কত হইবে ?

2. Find the mean deviation about the mean from the numbers 62, 68, 74, 76, 88 and 94.

3. কতকগুলি বালকের প্রাপ্ত নম্বরের বিভাগগুলি আসন্ন পূর্ণ সংখ্যায় যথাক্রমে 46—48, 49—51, 52—54, 55—57, 58—60 এবং বিভাগগুলির বালক সংখ্যা যথাক্রমে 5, 8, 15, 10 ও 4 ; তাহাদের নম্বরের mean deviation কত ?

4. নিম্নের frequency distribution table হইতে mean deviation নির্ণয় কর :

বিভাগ	পরিসংখ্যা
92·5—102·5	4
82·5— 92·5	11
72 5— 82·5	32
62·5— 72·5	25
52·5— 62·5	15
42 5— 52·5	8
32·5— 42·5	5

5. কোন চলকের 5, 6, 7, 8, 9 মানগুলির standard deviation নির্ণয় কর।

6. কতিপয় ছাত্রের ওজনের বিভাগগুলি (আসন্ন কিলো গ্রামে) যথাক্রমে 21—23, 24—26, 27—29, 30—32, 33—35, ও 36—38 এবং বিভাগগুলির ছাত্রসংখ্যা যথাক্রমে 2, 5, 17, 10, 8 ও 1 ; তাহাদের ওজনের standard deviation নির্ণয় কর।

7. কোন দেশের দশ দিনের তাপমাত্রা যথাক্রমে 86°, 93°, 73°, 66°, 88°, 96°, 80°, 70°, 95° ও 63° ; উহাদের গড় হইতে তাপমাত্রার standard deviation নির্ণয় কর।

8. কোন দেশে এক মাসে যে বারিপাত হইয়াছে তাহার তালিকা (আসন্ন ইঞ্চিতে) দেওয়া হইল। উহা হইতে বারিপাতের standard deviation নির্ণয় কর।

বারিপাতের পরিমাণ (ইঞ্চিতে)	1	2	3	4	5	6
দিনসংখ্যা	2	6	12	7	2	1

9. কতিপয় গমের বস্তার ওজন (কুইন্টালে) দেওয়া হইল। উহাদের median 16·5 কুইন্টাল ধরিয়া ওজনের standard deviation নির্ণয় কর।

ওজন (কুইন্টালে)	7·5	12·5	17·5	22·5	27·5
বস্তাসংখ্যা	5	9	11	6	4

10. The scores of 905 students are given below; find from the distribution the M_d and σ.

X	60·5	70·5	80·5	90·5	100·5	110·5	120·5	130·5	140·5
$f(X)$	3	21	78	182	305	209	81	21	5

উত্তরমালা

পাটীগণিত

প্রশ্নমালা 1

1. 6903145937   2. 101793   3. 144   4. 543
5. 1266000   6. 57980   7. 5   8. 723
9. ভাজক 234 লিখিয়াছিল   10. 375 টা.   11. 51
12. 60   13. 723281   14. 99855   15. 100083
16. 10017   17. 635এর স্থানে 685   18. ক 18, খ 57, গ 33
19. ক 55 টা., খ 79 টা., গ 21 টা.   20. 18, 42
21. ক 45 ব., খ 24 ব.   22. 9 মি.,   23. 2261   24. গুণক 807
25. 800   26. 44 টা.   27. পয়সা 37টি, ডবল প. 19টি
28. 2 টা.   29. 78 টা., 10 জন   30. 8 দিন   31. 48 দিন
32. পুরুষ 660 টা. 18 প., স্ত্রীলোক 330 টা. 9 প., বালক 110 টা. 3 প.
33. 53 টা. 5 আ. 4 পাই   34. ক 16 টা. 48 প., খ 12 টা. 36 প.।

প্রশ্নমালা 2

1. 39   2. 245   3. 11   4. 143
5. 9875   6. 2887   7. 10080   8. 1011
9. 9920, 10168   10. 42504   11. 6 মি.
12. 14 হে. গ্রা.   13. 11 পয়সা মূল্যের মুদ্রা
14. 99960   15. 10032   16. না   17. 113
18. 315 ও 378, 315 ও 441, 378 ও 441 এবং 315, 378 ও 441
19. 14 পয়সা   20. 20150   21. 8143, 23704543
22. 17273   23. 13711   24. 2 জোড়া ; 101 ও 1111 অথবা 505 ও 707
25. 132 ও 2376, 264 ও 1188
26. 36 ও 360, 72 ও 180   27. 121   28. 1012
29. 58   30. 9504   31. 3, 11, 33, 59, 177, 649, 1947
32. 1892   33. 99679   34. 100077
35. 53758063, 31663   36. 48   37. 274
38. 343, 5929   39. 29টি   41. 165   42. 191.

প্রশ্নমালা 3

1. $1\frac{3}{16}$ 2. $\frac{1}{6}$ 3. 1   4. $1\frac{1}{2}$ 5. $14\frac{45}{84}$
6. $\frac{7}{8}$ 7. $\frac{12}{49}$ 8. 1.

প্রশ্নমালা 4

1. $\frac{61}{640}$ 2. $1\frac{2}{3}$ 3. $1\frac{27}{79}$ 4. $45\frac{5}{7}$ 5. 4
6. $3\frac{787}{1028}$ 7. $\frac{6}{17}$ 8. $24\frac{31}{192}$ 9. $\frac{2}{3}$ 10. $20\frac{1}{11}$.

প্রশ্নমালা 5

1. 1600 টা. 2. 40 3. 20 হাত 4. 420 টা.
5. 180 বৎসর 6. 13 কি. গ্রা. 5 হে. গ্রা. 7. 2250 টা.
8. 140 টা. 9. 5600 10. 6 জন 11. 26 টাকা।

প্রশ্নমালা 6

1. 2·12 2. 0 3. 1 4. ·4 5. 3·35
6. 3 7. 1·9 8. ·0075 9. 846 10. ·4
11. 72 12. 71·153 13. ·857 14. 1·945
15. 7 টা. 50 পয়সা 16. 1.

প্রশ্নমালা 7

1. $3\cdot1\dot{6}$ 2. $\cdot58\dot{8}$ 3. $4\cdot058\dot{8}$ 4. $7\cdot\dot{0}\dot{2}$
5. $\cdot\dot{0}11\dot{7}$ 6. $\cdot\dot{0}01\dot{5}$ 7. $4326\cdot\dot{1}8\dot{8}$ 8. $\cdot\dot{4}878\dot{0}$
9. $\cdot21\dot{5}7142\dot{8}$ 10. $\cdot03\dot{1}4285\dot{7}$.

প্রশ্নমালা 8

1. $\frac{73}{9000}$ 2. $62\frac{18302}{24975}$ 3. $\frac{6}{185}$ 4. $3\frac{6}{7}$
5. $10\frac{311}{495}$ 6. $3\frac{215}{1998}$ 7. $33\frac{1}{3}$ 8. $\frac{1013}{49950}$, 3, 1, $\frac{1}{10}$
9. $\cdot0\dot{0}\dot{9}$ 10. ·375 11. 1 12. 6·33403.

প্রশ্নমালা 9

1. $\cdot2\dot{7}7\dot{7}$, $\cdot4\dot{8}7\dot{4}$ 2. $\cdot03\dot{2}1321\dot{8}$, $\cdot01\dot{7}6767\dot{6}$
3. $4\cdot20\dot{1}01\dot{0}$, $21\cdot32\dot{1}23\dot{4}$ 4. $\cdot324\dot{7}\dot{2}$, $2\cdot333\dot{8}\dot{8}$, $\cdot023\dot{1}\dot{8}$, $4\cdot272\dot{7}\dot{2}$
5. $2\cdot076\dot{7}\dot{6}$ 6. $\cdot007\dot{2}3\dot{7}$ 7. $\cdot173\dot{5}67\dot{8}$
8. $\cdot142\dot{8}5714\dot{2}$ 9. $12\cdot012\dot{8}01\dot{2}$ 10. $12\cdot60\dot{4}7192\dot{6}$
11. $\cdot132\dot{4}\dot{2}$ 12. $329\cdot413\dot{7}4428\dot{9}$ 13. $28\cdot05\dot{6}30\dot{0}$
14. $4\cdot40\dot{6}\dot{2}$ 15. $4\cdot78\dot{0}2338\dot{7}$ 16. $\cdot697\dot{7}3\dot{5}$
17. $717\cdot9\dot{8}2\dot{8}$ 18. $3\cdot344\dot{1}\dot{7}$ 19. $70\cdot631\dot{9}61\dot{6}$
20. $189\cdot9\dot{8}3246\dot{8}$ 21. $2\cdot14\dot{4}79\dot{5}$ 22. $22\cdot573\dot{8}\dot{0}$.

প্রশ্নমালা 10

1. 19·6 2. $\cdot97\dot{2}$ 3. $131\cdot\dot{8}\dot{1}$ 4. $8\cdot1\dot{9}\dot{8}$ 5. $\cdot1\dot{9}\dot{0}$
6 $1\cdot2\dot{6}\dot{0}$ 7. $3\cdot\dot{0}\dot{5}$ 8. $\cdot\dot{8}\dot{0}$ 9. 4·375 10. ·022

11. $440\cdot\dot{6}\dot{8}$ 12. 25 13. $\cdot58\dot{8}$ 14. $\cdot0348\dot{8}$
15. $1\cdot\dot{7}9487\dot{1}$ 16. 1 17. 14 18. 8 19. $\cdot\dot{8}$
20. $\cdot2\dot{4}$ 21. 1 22. 2 23. 1 24. 2
25. ·03 26. 27000 টা., 300 টা. 27. ক 48টি, খ 84টি।

প্রশ্নমালা 11

1. 16 দিন 2. 16 টা. 50 পয়সা 3. 25 আর
4. 10 দিন 5. 48 জন 6. $7\frac{1}{5}$ ঘণ্টা 7. 15 জন
8. $8\frac{1}{3}$ দিন 9. 12 দিন 10. 20 দিন 11. 20 দিন
12. 15 দিন 13. 18 জন 14. 12 দিন 15. 14 সপ্তাহ
16. 82 টাকা 17. 10 ঘণ্টা 18. 1430 জন 19. 30 গ্রাম
20. 380 আর 21. 75 টা. 22. 60 জন 23. 68 দিন
24. 40 জন 25. $3\frac{9}{13}$ মাস 26. 1400 27. 11 দিন।

প্রশ্নমালা 12

1. 807 2. 1225 3. 190 4. 1800
5. 2002 6. 2307, 304 7. 3796 8. 2501317
9. 7564 10. 3406, 2004 11. 469246, 7056
12. 31623 13. 1679 14. 13579 15. 96, 12
16. 3, 4 17. 1627 18. 415 19. 76 সারি
20. 125 21. 579 জন 22. 3600 জন 23. 95 টা.
24. 3, 6, 7 25. 45, 35 26. 246016 27. 9 মি $7\frac{7}{11}$ সে.।

প্রশ্নমালা 13

1. 3·9 2. ·019 3. 1·01 4. 18·47
5. ·0325 6. 13·057 7. 53·0321 8. $\frac{32}{75}$
9. $2\frac{9}{16}$ 10. $\frac{1}{2}$ 11. $\frac{6}{7}$ 12. $3\cdot\dot{8}$
13. $\cdot\dot{6}$ 14. $3\frac{1}{7}$ 15. 1·0001 16. $10\frac{13}{27}$
17. 4·242, ·471 18. ·632 19. ·144 20. 1·530
21. ·999 22. 1·4142136 23. ·7637 24. ·9999
25. 5·785 26. 1·414.

প্রশ্নমালা 14

1. 11 মি. 7 ডেসি মি. 2. 264 টা. 3. $2\frac{3}{4}$ 4. 100 মি.
5. 68 মি. 6. 54000 7. 21 মি., 7 মি.
8. 16 মি., 8 মি. 9. 24 মি. 10. 810 আর, 360 আর
11. 25 মি. 12. 620 টা. 13. 7 মি. 5 ডেসি মি.

14. 12 টা. 60 প. 15. 10 মিটার 16. 5 মি. বর্গ, 924
17. 64000 টা. 18. 172 মিটার 19. 10 মি.
20. 24 টা. 66 প. 21. দৈর্ঘ্য 14 মি., প্রস্থ 7 মি., উচ্চতা 5 মি.
22. 1820 টা. 23. 3531 টাকা 24. 16 একর।

প্রশ্নমালা 15

1. 4357 কি. গ্রা. 5 হে. গ্রা. 2. 120 ঘন ফুট
3. 1200 বর্গ মি. 4. $5\frac{4}{5}$ ডেসি মি. 5. 84 টা. 6. 15 মিটার
7. 3 মি., 1 মি. 8. 27072 9. 940 ঘন সে. মি.
10. 1 কি. গ্রা. 7 হে. গ্রা. 4 ডে. গ্রা. 11. 138000 12. 170 টা.
13. 4608 14. 19·74 হ. 15. 25 বার।

প্রশ্নমালা 16

1. 25% 2. সোরা 26 সের, কয়লা 8 সের, গন্ধক 6 সের
3. 20% 4. 25% 5. $66\frac{2}{3}$% 6. 4000
7. 700 8. 45 ডে. গ্রা. 9. $42\frac{6}{7}$% 10. 4840 টা.
11. 3500000 12. 4% কম 13. (1) 30টি, (2) 34টি
14. 2500 টা. 15. 200 16. 42, 33
17. 7500 পুরুষ, 12500 স্ত্রীলোক 18. 88% 19. 2200
20. 380 21. 23% 22. 44% 23. 200
24. 128 টা. 25. 5400 26. 150 27. 80000 টা.
28. ·25% কমিল।

প্রশ্নমালা 17

1. 5 টা. 25 পয়সা 2. 437 টা. 75 প. 3. 22 টা. 50 প.
4. 300 টা. 5. 5840 টা. 6. 5050 টা.
7. 1200 টা. 8. 500 টা. 9. 5% 10. 8%
11. 5% 12. $3\frac{1}{4}$% 13. 800 টা., $7\frac{1}{2}$%
14. 550 টা., 5% 15. 6 ব. 16. $6\frac{2}{3}$ ব. 17. 20 ব.
18. 25 বৎসর।

প্রশ্নমালা 18

1. 20 ব. 2. 728 টা. 3. $6\frac{1}{4}$% 4. 24000 টা.
5. $8\frac{1}{3}$ ব. 6. 320 টা. 7. 4% 8. 10 বৎসর
9. 1200 টা. 10. 225 টা. 11. 510 টাকা 12. 400 টা., 4%
13. 3% 14. $6\frac{1}{4}$ ব. 15. 500 টা. 16. 25 ব.
17. 12000 টা. 18. 156 টা. 25 পয়সা 19. 5%
20. 10 ব. 21. 3% ও $3\frac{1}{2}$% 22. 44 ব.
23. প্রথমটি 4 বৎসর, দ্বিতীয়টি 6 বৎসর।

প্রশ্নমালা 19

1. 7,000 ; 74,00 2. 10,000 ; 9700 3. 4000 ; 3700
4. 3·74, 3·740, 3·7404 5. 8 6. 3·27 7. 5·07
8. 72·1 9. ·00788 10. (1) ·32 (2) 2·45, (3) ·03
11. (i) ·328 (ii) ·0215 (iii) 2·03 12. 37·7995, 37·80
13. 14·0942, 14·09 14. 4·539, 4·54 15. ·049, ·0492
16. 5·485, 5·48.

প্রশ্নমালা 20

1. 1576 টা. 4 আ. 2. 51 টা. 3. 78 পা. 16 শি. 3 পে.
4. 460 টা. 12·5 প. 5. 48 টা. 83 পয়সা
6. 46 টা. 45 প. 7. 595508 টা. 8. 815 টা. 85 প.
9. 1940 টা. 26 প. 10. 497 টা. 1 পয়সা (আসন্ন)
11. 15 টা. 25 প. 12. A, 62·5 প.
13. 30 টা. 60 প. (আসন্ন) 14. 467 টা. 94 প. (আসন্ন)
15. 27 টা. 54 প. (আসন্ন) 16. 3 টা. 5 প. (প্রায়)
18. 27783 19. 108160 20. 5623 টা. 80 প.
21. 541 টা. 22. 464 টা. 10 প. 23. 104 টা. 50 প.।

প্রশ্নমালা 21

1. 20% 2. 2210 টা. 3. 675 টা. 4. 25 টা.
5. 25 টা. 6. 8625 টা. 7. $9\frac{1}{11}$% 8. $77\frac{11}{17}$ টা.
9. $6\frac{1}{2}$% লাভ 10. $2\frac{6}{7}$% লাভ 11. 40% ক্ষতি
12. 15 টাকা 13. 96 টা. 14. $12\frac{1}{2}$% 15. 5% 16. 5টি
17. $25\frac{11}{25}$% 18. 25 টাকা 19. 10টি 20. 20%
21. 400 22. টাকায় 8টি 23. 52 টা. 50 প. 24. 25 টা.
25. $12\frac{1}{2}$% 26. 5 টা. 6 আ. $9\frac{2}{3}$ পাই 27. 4 টা. 50 প.
28. 4% ক্ষতি 29. $17\frac{1}{11}$% 30. 4 টাকা ক্ষতি
31. 105 ডলার 32. $33\frac{1}{3}$% 33. 2160 টা.
34. 96 টা., 110 টা. 35. $2\frac{2}{5}$% লাভ 36. 200 টাকা।

প্রশ্নমালা 22

1. চৌকিদার 250 মি. গিয়া 2. ঘণ্টায় 4 কি. মি.
3. 9 টা $9\frac{3}{13}$ মিনিটে 4. $14\frac{1}{2}$ ঘ. 5. 5 কি. মি.
6. 3 ঘ. 45 মি. 7. 18 কি. মি.
8. 400 কি. মি. 9. ঘণ্টায় $31\frac{1}{2}$ কি. মি.

10. ক 4 ঘ. 20 মি., খ 7 ঘ. 35 মি.
11. প্রথম 35 কি. মি., দ্বিতীয় 45 কি. মি. 12. $14\frac{1}{2}$ ঘ.
13. 38 কি. মি, 14. ঘণ্টায় কৃষ্ণ 4 কি. মি., পার্থ $2\frac{1}{4}$ কি. মি.
15. 3 সে. 16. 150 মি. 17. 50 মি., ঘণ্টায় 36 কি. মি.
18. 130 মি., ঘণ্টায় 42 কি. মি. 19. ঘণ্টায় 25 কি. মি.
20. ঘণ্টায় 52 কি. মি., 26 কি. মি. 21. 50 মিটার
22. (1) 12 সে. (2) 9 সে. 23. 50 মিটার, ঘণ্টায় 22 কি. মি.
24. 8 মিনিট 25. ঘণ্টায় 6 কি. মি.
26. ঘণ্টায় $\frac{1}{2}$ কি. মি., 1 কি. মি, 27. 24 কি. মি.
28. $3\frac{1}{2}$ ঘ. 29. 10 ঘ. 30. (1) 1 ঘণ্টায় (2) $5\frac{5}{11}$ মিনিটে
31. 60 ঘ. পরে 32. 240 33. 16 : 15
34. $18\frac{6}{7}$ মি. 35. 3108 ঘ. 36. ঘণ্টায় $52\frac{4}{11}$ কি. মি.
37. 9 মি. 30 সে 38. 12 মি. 5 সে.
39. $\frac{8}{11}$ কি. মি. অথবা $\frac{8}{13}$ কি. মি. 40. (1) ঘণ্টায় $2\frac{2}{9}$ মাইল (2) $7\frac{1}{2}$ মি.
42. $6\frac{9}{18}$ হে. মিটার।

প্রশ্নমালা 23

নিম্নগ মান অনুসারে লিখিত :—

1. 8 : 12, 6 : 14, 5 : 25 2. $2\frac{1}{2} : 3\frac{1}{2}$, 3 : 5, $\frac{1}{3} : \frac{2}{3}$
3. ক্রমানুসারে লিখিত আছে
4. 3 গ. 2 ফু. : 4 গ. 1 ফু., 12 মণ : 18 মণ, 6 টা. : 10 টা.
5. 20 6. 54 7. 4 টা. 70 প. 8. 1 মিটার
9. 132 টা. 10. 21 ব. 11. 9 : 10
12. ক 198 টা., খ 126 টা. 13. 75 : 58 14. 25 : 18

প্রশ্নমালা 24

1. 12 2. 18 3. 12 পয়সা 4. $\frac{1}{9}$
5. 18 6. 14 7. 32 মিটার 8. 27
9. $3\frac{9}{125}$ 10. 2025 11. 2 ঘ. 5 মি. 12. 15
13. 6 14. 15 টা. 15. 45 16 $3\frac{1}{4}$
17. 2·8 গ্রাম 18. 18 19. 45 মি. 20. না, 40
21. 63 22. 9 : 13 23. 20 : 63, 40 : 60 : 105 : 126
24. 1 : 2, 15 বৎসর 25. ক 306 টা., খ 408 টা., গ 510 টা.
26. 45, 60 27. রাম 600 টা., হরি 800 টা.
28. 115, 184 29. ক 20 ব., খ 25 ব.
30. ক 48 ব., খ 60 ব. 31. 5 : 6 32. $2\frac{1}{2}$ কি. গ্রাম
33. 7 হে. গ্রাম 34. 16 : 15.

প্রশ্নমালা 25

1. (i) 9 কি. লি. (ii) 24 টাকা 2. 200, 250, 300
3. 80 টা., 200 টা., 60 টা.
4. 15 ডে. গ্রা. কয়লা, 10 ডে. গ্রা. গন্ধক, 75 ডে. গ্রা. সোরা
5 360 6. ক 80 টা., খ 120 টা., গ 150 টা.
7. ক 210 টা., খ 150 টা., গ 90 টা.
8. যথাক্রমে 480 টা., 400 টা., 300 টা. 9. যথাক্রমে 162, 108, 72
10. যথাক্রমে 8000 টাকা, 3000 টাকা, 2400 টাকা
11. যথাক্রমে 80, 50, 30 12. যথাক্রমে 112 টা., 128 টা., 160 টা.
13 24 সে. মি. 14. যথাক্রমে 60, 160, 400 15. 36 সে. মি.
16. যথাক্রমে 45, 50, 55 বৎসর 17. 700 টা.
18. প্রথম বালক 15 পয়সা, দ্বিতীয় বালক 6 পয়সা
19. যথাক্রমে 348 টা., 290 টা., 232 টা.
20. পুরুষ 60 টা., স্ত্রীলোক 40 টা., বালক 15 টা.
21. প্রত্যেক পুরুষ 4 টা. 10 প., স্ত্রীলোক 2 টাকা $73\frac{1}{3}$ পয়সা, বালক 2 টা. 5 প. 22. 33 কি. গ্রা. 6 হে. গ্রাম।

●

প্রশ্নমালা 26

1. 391 টা., 529 টা., 1311 টা. 2. ক 32 টা., খ 40 টা.
3. যথাক্রমে 400 টা., 500 টা., 600 টা. 4. 400 টা.
5. 480 টা. 6. ক 160 টা., খ 240 টা., গ 600 টা.
7. ক 120 টা., খ 108 টা., গ 112 টা.
8. ক 288 টা., খ 270 টা., গ 216 টা., ঘ 126 টা.
9. ক 1386 টা., খ 693 টা., গ 2079 টা.
10. ক 250 টা., খ 270 টা. 11. ক 32 টা. 50 প., খ 29 টা. 25 প.
12. 736 টা. 13. 1500 টা. 14. ক 230 টা., খ 300 টা.
15. 5 মাস 16. 4 মাস পরে।

প্রশ্নমালা 27

1. 39 টা. 2. 5 টা. $19\frac{3}{4}$ প. 3. 56 প.
4. 25% 5. 80 টা. 6. 1 টা. 25 প.
7. 3 : 4 8. 1 : 3 9. 7 : 17
10. $\frac{1}{5}$ অংশ 11. $16\frac{1}{4}$ মিলি. লি. 12. $\frac{1}{3}$.

প্রশ্নমালা 28

1. 66 টা. 2. 438 টা. 75 পয়সা 3. 500 টা. 25 প.
4. 1210 টা. 5. 4585 টা. 50 প. 6. 3472 টা.
7. 558 টা. 8. 5 পয়সা 9. 190 টা.
10. 130 টা. 11. 122 টা. 25 প. 12. 6100 টাকা।

প্রশ্নমালা 29

1. 7500 পা. 2. 1 টা. 15 আ. 3. 30 টা.
4. 1 পাউণ্ড = 4·52 ডলার (প্রায়) 5. 1 টা. = $1\frac{1}{2}$ ফ্রাঙ্ক
6. 4500 টা. 7. 1 টা. = 1·682 ফ্রা. 8. 17 শি: 6 পে.
9. 15 টা. 10. 133 টা. 5 আ. 4 পা. 11. 15516 টা. 3 আ. 9 পা.
12. 1 পাউণ্ড = 15·625 টাকা 13. 1920 মার্ক
14. 1231 পা. 17 শি. 6 পে. 15. 150 পা. 16. 225 পা.।

প্রশ্নমালা 30

1. 304·8 সে. মি. 2. 24855 মা. 3. 24855·3661 মা.
4. 8 কি. মি. 47 মি. 6. 11·101 পাউণ্ড 7. 287·04 বর্গ গজ
8. 20·40 বর্গ মি. 9. 2020000 ফ্রা. 10. 20·81 বর্গ মি.
11. 15499969 12. 61·024 বর্গ ইঞ্চি (প্রায়)
13. 1·875 মি. দৈর্ঘ্য, ·625 মি. প্রস্থ 14. 104550 লি.
15. 1 শি. 11 পে. 1 ফার্দিং 16. 227 টা. 12 আ. 9·6 পা.
17. 10750 ফ্রাঙ্ক 18. 1 ঘ. 25 মি. 20 সে.
19. 9 মি., 3 মি. ; 144 টা. 20. $6\frac{2}{3}$% ক্ষতি
21. 4545·45 ঘন সে. মি. 22. 28·350 গ্রা. (আসন্ন)
23. 3954·2 মা. 24. 196978773 বর্গ ফু. (আসন্ন)
25. 1056·8 গ্রা. 26. 2000 ঘন সে. মিটার।

প্রশ্নমালা 31

1. 6 জন 2. 30 আউন্স 3. 760 পা. 10 শি.
4. 55 জন 5. 6 দিন 6. ক 30, খ 20, গ 60 দিনে
7. 72 দিন 8. 8 দিন
9. ক 2 টা. 13 আ., খ 3 টা. 12 আ., গ 15 আ. 10. $14\frac{2}{7}$ দিনে
11. $1\frac{3}{8}$ মি. 12. 8 মি. 13. 5 টা 22 মিনিটে
14. 3 ঘ. 55 মি. 15. 4 ঘ. 24 মি. 16. 900 পা.
17. 9 পা. 18. সোমবার 19. রবিবার
20. বুধবার 21. 75 টা. 22. 1 মণ ; 5 মণ ; 3 মণ
23. 9 ব. 24. 44.

প্রশ্নমালা 32

1. 12 পা. 13 শি. 2 পে. 2. 15 শি. 9 পে. 3. 89 ফু. 3 ই.
4. $4\frac{1}{2}$ আনা 5. 21 জন 6. 70 মাইল
7. 25 জন 8. 25 জন 9. 18 জন
10. 6 মিনিট 45 সে. 11. 79 বর্গ গ. 7 বর্গ ফু. 108 বর্গ ই.
12. 4 টা. 1 আ. 13. 1024
14. 2624 বর্গ ফু., 95 টা. 10 আ. 8 পাই 15. 242 বর্গ ফু.
16. 125 টাকা 17. 11 ফু. 3 ই. 18. 1875 গ্যালন
19. $567\frac{3}{16}$ টন 20. 1 আনা 21. 55 পা. 15 শি. $7\frac{1}{2}$ পে.
22. $12\frac{4}{5}$% 23. 33 পা. 14 শি. 10 পে. 1 ফা. (আসন্ন)
24. 291 পা. 9 শি. $5\frac{1}{4}$ পে. (প্রায়) 25. 1340 পা. 1 শি. 11 পে. (প্রায়)
26. 729 টা. 8 আ. 7 পা. (প্রায়) 27. 28%
28. 52 পা. 10 শি. 29. $2\frac{2}{49}$% ক্ষতি 30. 1000 টা. 31. 8 মাইল
32. 210 মাইল 33. 20 সেকেণ্ড 34. (1) 81 সে. (2) 9 সে.
35. ঘণ্টায় 4 মাইল 36. 12 মি.
37. (1) $1\frac{7}{11}$ মিনিট পরে প্রথম ব্যক্তি 480 গজ গিয়া
(2) $3\frac{3}{11}$ মিনিট পরে প্রথম ব্যক্তি 960 গজ গিয়া 38. $9\frac{17}{27}$ সে.
39. 8 : 15 40. 12 টা. 41. 45 42. 1250
43. আধুলি 40, সিকি 80, দুয়ানি 160 ; মোট 60 টাকা
44. 1066 পা. 13 শি. 4 পে. 45. 7 : 4
46. 5560 টা., $4\frac{20}{139}$ পা. 47. 25·29 ডলার
48. 12 টা. 12 আ. $9\frac{3}{5}$ পা., 133 টা. 5 আ. 4 পাই লাভ
49. 51181 টা. 50. খ, ক-কে $1\frac{9}{11}$ গজে ও গ-কে $3\frac{2}{11}$ গজে হারাইবে।

রাশিবিজ্ঞান

প্রশ্নমালা 1

8. (i) 7 (ii) 75 9. 23—27 (f6), 28—32(f11),···ইত্যাদি
10. 23—26 (f4), 27—30 (f9),···ইত্যাদি,
11. 73, 73, 74, 74, 75, 75, 76, 76, 77, 77.
12. সীমা 74·5—79·5, 79·5—84·5,···ইত্যাদি; মধ্যমান 77, 82,···ইত্যাদি
13. বিভাগসীমা···মধ্যমান

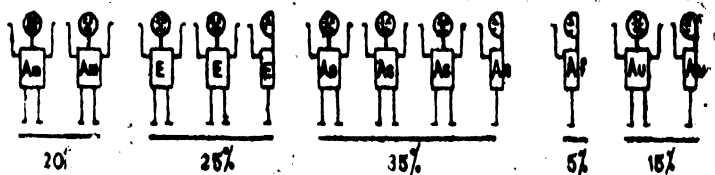
বিভাগসীমা	মধ্যমান
82·5—87·5	85
77·5—82·5	80
72·5—77·5	75

14. 50·75—52·75
52·75—54·75
54·75—56·75

15. (*a*) 54 সের ও তাহার নীচে (f7),
55 „ „ „ (f9), ইত্যাদি।
(*b*) 62 সের ও তাহার উপর (f12),
61 সের ও তাহার উপর (f26), ইত্যাদি।

প্রশ্নমালা 2

2.

20 25% 35% 5% 15%

17. 450 টাকা।

প্রশ্নমালা 3

1. (i) 627·$\dot{8}$ (ii) 18$\frac{3}{16}$ (iii) 114·25
2. (*a*) 26·1, 25·5, 24·3 (*b*) 28·69, 28·7, 28·72
3. $\frac{1}{2}(n+1)$ 4. 13·7 টাকা 5. 334·25
6. 21·96 টাকা 7. 119·554, 119·33, 118·89
8. (*a*) 43·2 (*b*) 44·68 (*c*) 45·5 (*d*) 48·62
9. 0 10. 3 বৎসর 11. প্রথমটি
12. 58·03 (আসন্ন), 57·$\dot{9}\dot{0}$.

প্রশ্নমালা 4

1. 1·2 2. 9·3 3. 2·57 4. 11·12
5. 1·41 6. 3·38 7. 11·7° 8. 1·117″
9. 6 কুই. 10. 101·02, 13.

বীজগণিত (Algebra)

নবম শ্রেণী

নিয়ন্ত্রিত সংখ্যা (Directed numbers)

1. পাটীগণিতে + ও − চিহ্ন দুইটির অর্থ যথাক্রমে যোগ ও বিয়োগ প্রক্রিয়া। 8+3, ইহার অর্থ 8-এর সহিত 3 যোগ করিতে হইবে; আবার 8−3এর অর্থ 8 হইতে 3 বিয়োগ করিতে হইবে। বীজগণিতে কিন্তু + ও − চিহ্নের অর্থ আরও ব্যাপক। ইহা উদাহরণ দ্বারা বুঝান যাইতেছে।

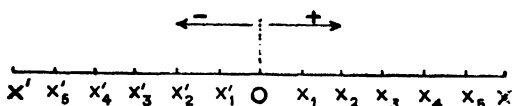
(1) পূর্ব-পশ্চিমগামী একটি রাস্তার ধারে দুইটি শহর A ও B; এখন যদি বলা হয় A হইতে Bর দূরত্ব 10 মাইল তাহা হইলে Bর অবস্থান সম্পূর্ণ বুঝা গেল না; কারণ Bর অবস্থান A হইতে পূর্বে অথবা পশ্চিমে হইতে পারে। B-র অবস্থান ঠিক মত বলিতে হইলে বলিতে হইবে A হইতে B-র দূরত্ব 10 মাইল পূর্বে (অথবা পশ্চিমে)। এখানে 10 সংখ্যাটি পূর্ব (বা পশ্চিম) এই দিক্‌নির্ণায়ক কথাটি দ্বারা নিয়ন্ত্রিত হইল। পূর্ব দিকের বিপরীত দিক্ পশ্চিম বলিয়া পূর্বদিক্‌কে যদি + দিক্ ধরা যায়, তবে পশ্চিম দিক্‌কে − দিক্ ধরা হইবে, সুতরাং A হইতে Bর অবস্থান +10 মাইল দূরে হইল। এইরূপ C শহরটি যদি A হইতে −5 মাইল দূরে অবস্থিত হয়, তবে বুঝিতে হইবে Cর অবস্থান A হইতে 5 মাইল পশ্চিমে। অতএব বুঝা গেল পাটীগণিতের +5 ও −5এর অর্থ অপেক্ষা বীজগণিতের +5 ও −5এর অর্থ ব্যাপকতর।

(2) উক্ত উদাহরণ হইতে বুঝা গেল কোন নির্দিষ্ট স্থান হইতে পরস্পর বিপরীত দিকে দুইটি স্থানের অবস্থান নির্ণয় করিতে ঐ স্থানের দূরত্বসূচক সংখ্যার পূর্বে + ও − চিহ্ন যুক্ত করিতে হয়। এখন ঐ নির্দিষ্ট স্থানটির অবস্থানকে 0 (শূন্য) অবস্থান বলিতে হয়।

যদি ব্যাংকে আমার জমা থাকে 1000 টাকা, তাহা হইলে বলিব আমার +1000 টাকা আছে; পরে যদি আমি 1000 টাকার অতিরিক্ত 200 টাকা ব্যাংক হইতে লই, তবে ব্যাংকের নিকট আমার দেনা হয় 200 টাকা; এখন আমি বলিতে পারি আমার ব্যাংকে জমা আছে −200 টাকা।

(3) যদি উপর দিক্‌কে + দিক্ ধরা হয়, তবে নিচের দিক্‌কে − দিক্ ধরিতে হইবে। এখন যদি বলা হয় একটি বল −10 ফুট উঠিল তবে বুঝিতে হইবে ইহা নীচের দিকে 10 ফুট নামিয়াছে।

2. লাভ ও ক্ষতি, উত্থান ও পতন, উন্নতি ও অবনতি, ঊর্ধ্ব ও অধঃ প্রভৃতি বিপরীতধর্মী রাশিগুলির একটি + রাশি বা ধনরাশি হইলে অপরটি − রাশি বা ঋণরাশি হইবে। এইজন্য + ও − চিহ্নকে ভেদ চিহ্ন (sign of affection) বলে। পাটীগণিতে কিন্তু ভেদ চিহ্ন নাই, কারণ ইহাতে ঋণরাশির স্থান নাই। সুতরাং পাটীগণিতের সংখ্যাগুলি অনিয়ন্ত্রিত সংখ্যা। ইহাতে যে + ও − চিহ্ন ব্যবহার হয় তাহা যোগ বা বিয়োগ প্রক্রিয়ার চিহ্ন।

3. **ধনরাশি ও ঋণরাশির লেখচিত্র—**

O একটি নির্দিষ্ট বিন্দুর ভিতর দিয়া X′OX একটি সরলরেখা। OX-এর উপর x_1, x_2 ইত্যাদি এবং OX′-এর উপর x'_1, x'_2 ইত্যাদি এমন সব বিন্দু যে $Ox_1 = x_1x_2 = x_2x_3 = \cdots = Ox'_1 = x'_1x'_2 = x'_2x'_3 = \cdots$। এখন OX যদি + দিক্ হয়, তবে OX′ হইবে − দিক্। $\therefore$ $Ox_1 = +a_1$ হইলে $Ox'_1 = -a_1$ হইবে ; $Ox_2 = +a_2$ হইলে $Ox'_2 = -a_2$ হইবে, ইত্যাদি।

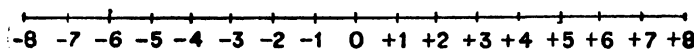
4. **নিয়ন্ত্রিত রাশির যোগ ও বিয়োগ।**

যাহাতে পাটীগণিতের + ও − চিহ্নের সহিত নিয়ন্ত্রিত সংখ্যার + ও − চিহ্নের পার্থক্য নির্ণয়ে সন্দেহ না হয়, সেজন্য আপাততঃ নিয়ন্ত্রিত সংখ্যাগুলি (+5), (−7) এইরূপে বন্ধনীভুক্ত করিয়া রাখা হইবে।

যোগ

(1). $(+4)+(+1)=$ কত ?

এখানে (+4) ও (+1)-এর মধ্যবর্তী + চিহ্নটির দ্বারা বুঝা যাইতেছে (+4)-এর সহিত (+1) যোগ করিতে হইবে।

−8 −7 −6 −5 −4 −3 −2 −1 0 +1 +2 +3 +4 +5 +6 +7 +8

উপরে অঙ্কিত স্কেলে, O হইতে +4 ঘর যাইয়া আরও +1 ঘর গেলে মোট +5 ঘর যাওয়া হইল ; সুতরাং $(+4)+(+1)=(+5)$.

(2). $(+4)+(-1)=$ কত ?

এখানে O হইতে +4 ঘর যাইয়া সেখান হইতে ঐদিকে আরও (−1) ঘর যাইতে হইবে, অর্থাৎ সেখান হইতে বিপরীতদিকে 1 ঘর আসিতে হইবে, তাহা হইলে +3 ঘরে পৌঁছান গেল ; সুতরাং $(+4)+(-1)=(+3)$.

(3). $(-3)+(+1)=$ কত ?

O হইতে -3 ঘর যাইয়া $+$ দিকে 1 ঘর গেলে -2 ঘরে পৌঁছান গেল। সুতরাং $(-3)+(+1)=(-2)$.

(4). $(-3)+(-1)=$ কত ?

O হইতে -3 ঘর যাইয়া $+$ দিকে -1 ঘর অর্থাৎ $-$ দিকে আরও 1 ঘর গেলে -4 ঘরে পৌঁছান গেল। সুতরাং $(-3)+(-1)=(-4)$.

বিয়োগ।

(5). $(+4)-(+1)=$ কত ?

$(+4)$ হইতে যাত্রা করিয়া বিপরীতদিকে 1 ঘর গেলে $+3$ ঘরে পৌঁছান যায়। সুতরাং $(+4)-(+1)=(+3)$ [লক্ষ্য কর $-(+1)=-1$].

(6). $(+4)-(-1)=$ কত ?

$(+4)$ হইতে বিপরীত দিকে -1 ঘর অর্থাৎ $+$ দিকে 1 ঘর যাইয়া $+5$ ঘরে পৌঁছান যায় ; $\therefore \quad (+4)-(-1)=(+5)$

[লক্ষ্য কর $-(-1)=+1$]

(7). $(-4)-(+1)=$ কত ?

(-4) হইতে $-$ দিকে আরও 1 ঘর গেলে -5 ঘরে পৌঁছান যায়।

$\therefore \quad (-4)-(+1)=(-5)$ [লক্ষ্য কর $-(+1)=-1$]

(8). $(-4)-(-1)=$ কত ?

(-4) হইতে $+$ দিকে 1 ঘর গেলে -3 ঘরে পৌঁছান যায় ;

$\therefore \quad (-4)-(-1)=(-3)$ [লক্ষ্য কর $-(-1)=+1$]

[**দ্রষ্টব্য :** (1). উপরি-উক্ত কয়েকটি উদাহরণ হইতে জানা গেল $+(+1)$ এবং $-(-1)$ দ্বারা 1 ঘর $+$ দিকে এবং $-(+1)$ ও $+(-1)$ দ্বারা 1 ঘর $-$ দিকে যাওয়া বুঝায়। সুতরাং বন্ধনীমুক্ত করিলে $+(+1)=1$;

$-(-1)=+1, \; +(-1)=-1, \; -(+1)=-1$;

ইহাই চিহ্ন-সূচক নিয়ম।

(2). পাটীগণিতে $5-7$-এর কোন অর্থ নাই। কিন্তু সংখ্যাগুলি নিয়ন্ত্রিত হইলে অর্থাৎ $(+5)-(+7)$ হইলে ইহার অর্থ -2 হয়। সুতরাং ক্ষুদ্রতর সংখ্যা হইতে বৃহত্তর সংখ্যা বিয়োগ করিলে বিয়োগফলটি ইহাদের পরমমানের অন্তরের সহিত $-$ চিহ্নযুক্ত হইবে।

পরমমান। ধনরাশি ও ঋণরাশি উভয়ের চিহ্নটি বাদ দিলে যাহা থাকে তাহাই উহাদের পরমমান, যেমন $+5$ ও -5এর পরমমান 5, দুইটি ধনরাশির

মধ্যে যাহার পরমমান বৃহত্তর সেইটিই বৃহত্তর এবং দুইটি ঋণরাশির মধ্যে যেটির পরমমান ক্ষুদ্রতর সেইটিই বৃহত্তর ; যেমন $+5>+2$ এবং $-5<-2$.

(3). কোন পদের চিহ্ন বলিতে ইহার পূর্বে সংযুক্ত + অথবা − চিহ্নই বুঝাইবে, × বা ÷ চিহ্নকে বুঝাইবে না।]

5. যোগ ও বিয়োগের সংক্ষিপ্ত নিয়ম।

যোগ। (1). দুইটি ধনরাশির যোগ করিতে হইলে উভয় রাশির পরমমান যোগ করিলে নির্ণেয় যোগফল হইবে এবং ইহার চিহ্ন হইবে +. যথা—

$(+6)+(+7)=6+7=+13=13$; $(+a)+(+b)=a+b$.

(2). দুইটি ঋণরাশির যোগ করিতে হইলে উভয় রাশির পরমমান যোগ করিলে যোগফল হইবে এবং ইহার চিহ্ন হইবে—.

$$(-6)+(-7)=-6-7=-13,$$
$$(-a)+(-b)=-a-b=-(a+b).$$

(3). একটি ধনরাশি ও একটি ঋণরাশি যোগ করিতে হইলে বৃহত্তরটির পরমমান হইতে ক্ষুদ্রতরটির পরমমান **বিয়োগ** করিলে নির্ণেয় যোগফল হইবে এবং **বৃহত্তরটির চিহ্নই যোগফলের চিহ্ন হইবে**।

$$(+6)+(-3)=6-3=+3$$
$$(+6)+(-8)=-(8-6)=-2.$$

বিয়োগ। (4). যে রাশিটি বিয়োগ করিতে হইবে তাহার চিহ্ন পরিবর্তিত করিয়া অর্থাৎ + কে − এবং − কে + করিয়া যোগক্রিয়ার নিয়ম অনুযায়ী যাহা হইতে বিয়োগ করিতে হইবে তাহার সহিত যোগ করিলেই বিয়োগফল পাওয়া যাইবে।

$$(+7)-(+6)=(+7)+(-6)=7-6=1$$
$$(-7)-(+6)=(-7)+(-6)=-7-6=-13$$
$$(-7)-(-6)=(-7)+(+6)=-7+6=-1.$$

প্রশ্নমালা 1

1. লেখচিত্র সাহায্যে মান নির্ণয় কর :—

(i) $7-5$, (ii) $-7+5$, (iii) $0-5$, (iv) $-7+2$

2. মান নির্ণয় কর :—

(i) $(+11)+(+7)$ (ii) $(-11)+(+7)$ (iii) $(+11)+(-7)$
(iv) $(-11)-(-7)$ (v) $(-8)+(-4)$ (vi) $(-20)+(+20)$
(vii) $(-20)-(+20)$ (viii) $(-20)-(-20)$

3. শূন্য স্থান পূর্ণ কর :—

(i) $(+3)-(\ \ )=(+8)$ (ii) $(-7)-(\ \ )=0$

(iii) $(-11)+(\ \ )=-8$ (iv) $(-11)+(\ \ )=(+11)$

4. মান নির্ণয় কর :—

(i) $-6-4$ (ii) $-11+8$ (iii) $-17+17$

(iv) $-11+17$ (v) $5-7+8$ (vi) $6-7+1$

(vii) $5-6-7+5$ (viii) $-3+5+3-5$

5. এখন তাপমান 70° ; কিছুক্ষণ পরে $+7^\circ$ বাড়িল ; তখন তাপমান কত হইল ?

6. কোন দ্রব্য 75 টাকা দিয়া কিনিলাম ; ইহা বিক্রয় করিয়া আমার (i) (-15) টাকা লাভ হইল, (ii) (-15) টাকা ক্ষতি হইল ; আমি দ্রব্যটি কত টাকায় বিক্রয় করিলাম ?

7. এক ব্যক্তি প্রথমে 70 টাকা লাভ করে এবং পরে 75 টাকা ক্ষতি করে ; তাহার কত লাভ হইল ?

8. এক ব্যক্তি পূর্বদিকে 5 কিলো মিটার যাইয়া পশ্চিমদিকে 10 কিলো মিটার গেল। সে যাত্রাস্থল হইতে কত কিলো মিটার পূর্বদিকে রহিল ? কত কিলো মিটার পশ্চিমদিকে রহিল ?

9. কলিকাতা হইতে বারাকপুর 16 কি. মি. উত্তরে এবং ডায়মণ্ডহারবার 40 কি. মি. দক্ষিণে। বারাকপুর হইতে ডায়মণ্ডহারবার কত কিলো মিটার কোন্ দিকে ?

10. -3° হইতে 2° তাপমান কত ডিগ্রি উচ্চ ?

6. নিয়ন্ত্রিত সংখ্যার গুণ ও ভাগ।

(ক) গুণ।

(1). $(+5)\times(+3)=+15.$

মনে কর, কোন লোক প্রতিদিন 5 টাকা সঞ্চয় করেন, তবে 3 দিনে তিনি সঞ্চয় করিবেন $(+5)+(+5)+(+5)=(+5)\times 3=15$ টাকা।

$$\therefore\ (+5)\times(+3)=+15.$$

(2). $(+5)\times(-3)=-15.$

লোকটি প্রতিদিন 5 টাকা সঞ্চয় করেন, -3 দিন পরে অর্থাৎ 3 দিন পূর্বে তাঁহার সঞ্চয় ছিল $(+5)+(+5)+(+5)$ বা 15 টাকা কম।

$\therefore$ -3 দিনে তাঁহার সঞ্চয় $=-15$ টাকা। $\therefore\ (+5)\times(-3)=-15.$

(3). $(-5)\times(+3)=-15.$

লোকটি প্রতিদিন -5 টাকা সঞ্চয় করেন অর্থাৎ $+5$ টাকা ক্ষতি করেন, সুতরাং 3 দিনে তাঁহার ক্ষতি হইবে $5\times3=15$ টাকা ; অর্থাৎ তাঁহার সঞ্চয় হইবে -15 টাকা। $\therefore\ (-5)\times(+3)=-15.$

(4). $(-5)\times(-3)=+15.$

লোকটি প্রতিদিন (-5) টাকা সঞ্চয় করেন অর্থাৎ 5 টাকা ক্ষতি করেন ; -3 দিন পরে অর্থাৎ 3 দিন পূর্বে তাঁহার সঞ্চয় ছিল 5×3 বা 15 টাকা বেশী ;

$$\therefore\ (-5)\times(-3)=+15.$$

এই চারিটি উদাহরণ হইতে বুঝা গেল যে, গুণ্য ও গুণকের একই চিহ্ন (উভয়েরই + অথবা উভয়েরই −) হইলে গুণফলের চিহ্ন হইবে + ; এবং উভয়ের বিভিন্ন চিহ্ন অর্থাৎ একটির +, অপরটির − চিহ্ন হইলে গুণফলের চিহ্ন − হইবে। নিম্নে সংক্ষেপে অক্ষর দ্বারা গুণনের চিহ্ন দেওয়া হইল।

$$\left.\begin{array}{l}(+a)\times(+b)=+ab\\(-a)\times(-b)=+ab\end{array}\right\}\qquad\left.\begin{array}{l}(+a)\times(-b)=-ab\\(-a)\times(+b)=-ab\end{array}\right\}$$

(খ) ভাগফলের চিহ্ন।

যেহেতু
$$\begin{array}{ll}(+5)\times(+3)=+15, & \therefore\ (+15)\div(+3)=+5\\(+5)\times(-3)=-15, & \therefore\ (-15)\div(-3)=+5\\(-5)\times(+3)=-15, & \therefore\ (-15)\div(+3)=-5\\(-5)\times(-3)=+15, & \therefore\ (+15)\div(-3)=-5\end{array}$$

অতএব, নিয়ম হইল এই :—ভাজ্য ও ভাজকের একই চিহ্ন হইলে ভাগফলের চিহ্ন হইবে + ; এবং উভয়ের বিপরীত চিহ্ন হইলে ভাগফলের চিহ্ন হইবে −। লক্ষ্য কর, নিয়ন্ত্রিত রাশির গুণ ও ভাগ ক্রিয়ায় গুণফল ও ভাগফলের চিহ্নের নিয়ম একই।

প্রশ্নমালা 2

1. মান নির্ণয় কর :—

(1) $(+3)\times(-7)$ (2) $(-7)\times(+4)$ (3) $(-8)\times(-4)$

(4) $(+4)\times(+7)$ (5) $(-16)\times(-11)$ (6) $(-9)\times0$

(7) $0\times(-7)$ (8) $(+3)\times0$ (9) $(-3)\times0$

(10) $(-27)\div(+9)$ (11) $(+81)\div(-9)$

(12) $(-56)\div(-7)$ (13) $0\div(-8)$ (14) $(-60)\div(-12)$

2. যদি $a=-2$, $b=1$, $c=0$, $x=-3$, $y=-1$ হয়, তবে নিম্ন রাশিগুলির মান নির্ণয় কর :—

(1) $3a+2b-3c$ (2) $-a-b-x$ (3) $ab-3xy-by$

(4) $a^2+b^2-x^2-y^2$ (5) x^3-y^3 (6) x^2+xy+y^2

(7) a^4+x^4 (8) $-5x^2y^2b^2$ (9) $a^2b+b^2c+c^2a-xy$

(10) a^4-c^4 (11) $a^2 \div x^2$

(12) $\frac{c^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}$ (13) $\frac{2ab}{a^2+b^2}$ (14) $\frac{a^3+b^3}{a+b}$

3. যদি $a=-2$, $b=-1$, $c=-3$ হয়, তবে

$\frac{(-a)^3 \times (-b)^3}{b^3+(-c)^3} \div \frac{b+c}{c^2-a^2} \times \frac{bc}{a+b}$ এর মান নির্ণয় কর।

4. যদি $a=6$, $b=-3$, $c=-1$ হয়, তবে

$\frac{1}{(b-c)(c-a)}+\frac{1}{(c-a)(a-b)}+\frac{1}{(a-b)(b-c)}$ এর মান নির্ণয় কর।

5. $x=3$ হইলে $\frac{x-1}{x-4} \div \left(\frac{1}{x}+\frac{2-x}{4-x}\right)$ এর মান নির্ণয় কর।

6. $a=b=c=-1$ হইলে

$\frac{a+b}{2a-b} \times \frac{b-c}{2b-c} \times \frac{c-a}{2c-a}$ এর মান নির্ণয় কর।

7. $a=-2$, $b=3$, $c=-1$ হইলে, $a^3+b^3+c^3-3abc$ এর মান কত ?

[Fundamental Laws]

7. যোগ (Addition)

একপদ ও বহুপদ রাশির যোগফল নির্ণয় করিবার প্রণালী তোমরা পূর্বেই শিখিয়াছ। নিম্নের উদাহরণটি দেখ।

উদাহরণ। $5x^2y+6xy^2+7xyz$, $-7x^2y-2xy^2-2xyz$, $+2x^2y+2xz^2-2x^2z+1$, ইহাদের সমষ্টি কত ?

$$\begin{array}{l} 5x^2y+6xy^2+7xyz \\ -7x^2y-2xy^2-2xyz \\ \underline{\;\;2x^2y \qquad\qquad\qquad +2xz^2-2x^2z+1} \\ \;\;0 \quad +4xy^2+5xyz+2xz^2-2x^2z+1 \end{array}$$

$\therefore$ যোগফল $=4xy^2+2xz^2-2x^2z+5xyz+1$.

প্রশ্নমালা ৩

সরল কর :—

1. $5xy+6yz-7zx+6zx-6yz$
2. $6a^2b^2+a^2b^2-3ab^2+3ab^2-3a^2b^2$
3. $\frac{1}{2}a^2bcd-\frac{1}{2}ab^2cd-\frac{1}{2}a^2bcd+\frac{3}{4}ab^2cd$

যোগফল নির্ণয় কর :—

4. $3x^2+5x+\frac{1}{2}$, $5x^2-9x-\frac{3}{4}$, $\frac{1}{8}-2x-4x^2$
5. b^2-c^2, c^2-a^2, a^2-b^2
6. $\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{3}a+\frac{1}{4}b$, $a^2+a+\frac{3}{4}b$, $-\frac{1}{4}a^2+\frac{2}{3}a-\frac{5}{4}b$
7. x^3+2x^2+3x+1, $-x^3+2x^2-3x-1$, $2x^3-4x^2+1$
8. a^2b-3ab^2+a-3, $4-3a+4ab^2-3a^2b$, $2a^2b-2ab^2-a-1$.

9. যদি $A=2x+3y-4z$, $B=2y+3z-4x$ এবং $C=2z+3x-4y$ হয়, তবে $(A+B+C)$ এবং $(A-B+C)$-এর সমষ্টি নির্ণয় কর।

10. যদি $X=3x^2+2xy+y^2$, $Y=-3x^2-2xy+y^2$ এবং $Z=x^2+y^2$ হয় এবং $x=y=-1$ হয়, তবে $X+Y+Z$-এর মান নির্ণয় কর।

8. বিয়োগ (Subtraction)

বিয়োগের নিয়ম তোমরা পূর্বেই শিখিয়াছ। নিম্নের উদাহরণগুলি দেখ।

উদা. 1. (ক) $6x$ হইতে $3x$, (খ) $25xy$ হইতে $48xy$, (গ) $9pq$ হইতে $-7pq$ বিয়োগ কর।

(ক) $6x-3x=3x$ (খ) $25xy-48xy=-23xy$

(গ) $9pq-(-7pq)=9pq+7pq=16pq$.

উদা. 2. $2xy-17x^2+4yz$ হইতে $2x^2+4yz+3xy+y^2$ বিয়োগ কর।

$$\begin{array}{rl} 2xy-17x^2+4yz & (\text{বিযোজন}) \\ +3xy+\ \ 2x^2+4yz+y^2 & (\text{বিযোজ্য}) \\ \hline -\ xy-19x^2+0\ \ -y^2 & (\text{বিয়োগফল}) \end{array}$$

$\therefore$ বিয়োগফল $=-xy-19x^2-y^2$.

উদা. 3. দুইটি রাশির সমষ্টি $3x+2y-z$, ইহাদের একটি $x+y+z$ হইলে অপরটি কত ?

[সমষ্টি হইতে প্রদত্ত রাশিটি বিয়োগ করিলেই নির্ণেয় অপর রাশিটি পাইবে]

নির্ণেয় রাশি$=(3x+2y-z)-(x+y+z)$
$=3x+2y-z-x-y-z$
$=(3x-x)+(2y-y)+(-z-z)=2x+y-2z.$

উদা. 4. দুইটি রাশির অন্তর $5a$, বৃহত্তরটি a^2+5a+2 হইলে, ক্ষুদ্রতরটি কত হইবে ?

ক্ষুদ্রতর রাশিটি$=(a^2+5a+2)-5a=a^2+5a+2-5a=a^2+2.$

উদা. 5. আমি প্রথমে পূর্বদিকে $3a$ কিলো মিটার যাইয়া সেইদিকেই আরও $2b$ কিলো মিটার গেলাম ; তারপর পশ্চিমদিকে $3a$ কিলো মিটার ফিরিয়া আসিলাম। আমি যাত্রাস্থল হইতে কতদূর পৌঁছিলাম এবং মোট কত কিলো মিটার চলিলাম ?

যাত্রাস্থল হইতে আমার নির্ণেয় দূরত্ব$=(3a+2b-3a)$ কি.মি.$=2b$ কি.মি. ;
কিন্তু, আমি চলিলাম $(3a+2b+3a)$ কি. মি.$=6a+2b$ কিলো মিটার।

প্রশ্নমালা 4

বিয়োগ কর :—

1. $5x^2+6xy+y^2$ হইতে $5x^2-6xy+2y^2$

2 $12x^4+3x^3-5x^2-2x$ হইতে $3x^4+3x^3-6x^2+2x+1$

3. 0 হইতে $3a^2+5ab-6b^2$ 4. $3a$ হইতে $-3b$

5. $\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{3}a+\frac{3}{4}b-c$ হইতে $\frac{1}{4}a^2-\frac{2}{3}a-\frac{1}{4}b-\frac{1}{2}c$

6. $2a$ হইতে $3b$ কত বড় ? $3x$ হইতে $5y$ কত ছোট ?

7. দুইটি রাশির সমষ্টি $x^2+2xy+y^2$, উহাদের একটি $2x^2+xy$ হইলে অপরটি কত ?

8. $5a^3+6a^2+9a+2$ হইতে কত বিয়োগ করিলে বিয়োগফল 3 হয় ?

9. 0 হইতে কত বিয়োগ করিলে $3x^2-2xy+1$ হইবে ?

10. a মিটার উচ্চ স্থান হইতে একটি বল ছাড়িয়া দিলে উহা মাটিতে পড়িয়া লাফাইয়া পুনরায় b মিটার উঠিল। তখন বলটি ঐ উচ্চস্থান হইতে কত দূরে থাকিল ?

9. গুণন (Multiplication)

তোমরা গুণনের প্রণালী পূর্বেই শিখিয়াছ। নিম্নের উদাহরণগুলি দেখ।

উদা. 1. $(a^3)^2\times(a^2)^3=$ কত ?
$(a^3)^2=a^3.a^3=a^6.$ আবার, $(a^2)^3=a^2.a^2.a^2=a^6$
$\therefore\ (a^3)^2\times(a^2)^3=a^6\times a^6=a^{12},$

[**দ্রষ্টব্য :** $(a^m)^n = a^m.a^m.a^m \cdots\cdots n$ সংখ্যক বার

$= a^{m+m+m+\cdots\cdots n \text{ বার}} = a^{mn}$.

সুতরাং উক্ত উদাহরণে সংক্ষিপ্ত ভাবে

$(a^3)^2 = a^{3\times2} = a^6$ এবং $(a^2)^3 = a^{2\times3} = a^6$ নির্ণয় করা যায়।]

উদা. 2. a^2+ab+b^2কে $a-b$ দ্বারা গুণ কর।

$$\begin{array}{ll} a^2+ab+b^2 & \\ \underline{\quad a-b \quad} & \\ a^3+a^2b+ab^2 & (a \text{ দ্বারা গুণ করিয়া}) \\ \underline{\quad -a^2b-ab^2-b^3} & (-b \text{ দ্বারা গুণ করিয়া}) \\ a^3 \qquad\qquad -b^3 & \end{array}$$

$\therefore$ নির্ণেয় গুণফল $= a^3-b^3$.

প্রশ্নমালা 5

প্রথম রাশিকে দ্বিতীয় রাশি দ্বারা গুণ কর :—

1. $3x^2-4xy+y^2,\ 2x-3y$
2. $\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{3}ab+b^2,\ \frac{1}{2}a+\frac{1}{3}b$
3. $7a^2+3a-2,\ 7a-1$
4. $x^2+xy+y^2,\ x-y$
5. $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc,\ a+b+c$
6. $a^2-ab+a+1,\ a+b-1$
7. $a^2+b^2-ab+a+b+1,\ a+b-1$
8. $4a^2+6ab+9b^2,\ 2a-3b$
9. $1-a+2a^2-3a^4,\ 3a-5+2a^2$
10. $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx,\ x+y+z$

ক্রমিক গুণফল নির্ণয় কর :—

11. $1-x,\ 1+x,\ 1+x^2,\ 1+x^4$
12. $x+y,\ x-y,\ x^2+y^2$
13. $a+b+c,\ a+b-c,\ a-b+c,\ b+c-a$
14. $a^2-ab+b^2,\ a^2+ab+b^2,\ a^4-a^2b^2+b^4$

সরল কর :—

15. $(x^2+5x)(x-1)-(x^2+2x)(x-1)+3x(x+1)$.

ভাগ (Division)

10. ভাগক্রিয়ার সূচক নিয়ম।

$$a^5 = a.a.a.a.a \;;\; a^3 = a.a.a.$$

$$\therefore \quad \frac{a^5}{a^3} = \frac{a.a.a.a.a}{a.a.a.} = a^2 = a^{5-3}.$$

অনুরূপে, সাধারণতঃ m ও n অখণ্ড ধনসংখ্যা হইলে এবং $m > n$ হইলে

$$a^m \div a^n = a^{m-n}.$$

যেহেতু $m > n$, সুতরাং $m - n$ ধনরাশি ; $\therefore \quad m = (m-n) + n$

$$\therefore \quad a^m \div a^n = a^{m-n}.\ a^n \div a^n = a^{m-n},$$

অর্থাৎ একই অক্ষরের বিভিন্ন ঘাতসূচক সংখ্যার অন্তরই ভাগফলের অক্ষরের ঘাতের সূচক হইবে।

অনুসিদ্ধান্ত : $\because \quad a^m \div a^n = a^{m-n} = \dfrac{a^m}{a^n},$

সুতরাং $m = n$ হইলে, $a^n \div a^n = a^{n-n} = a^0.$

আবার, $a^n \div a^n = \dfrac{a^n}{a^n} = 1. \quad \therefore \quad a^0 = 1.$

অতএব, যে-কোন সংখ্যার ঘাত 0 হইলে উহার মান 1 হইবে।

যেমন, $2^0 = 1$, $(\frac{1}{3})^0 = 1$, $(-3)^0 = 1$, $x^0 = 1$ ইত্যাদি।

11. বহুপদ রাশিকে দ্বিপদরাশি দ্বারা ভাগ।

বহুপদ রাশিকে দ্বিপদ বা বহুপদ রাশি দ্বারা ভাগ করিতে হইলে ভাজ্য ও ভাজকের যে কোন সাধারণ একটি অক্ষরের ঘাতের উর্ধ্বক্রম বা অধঃক্রম অনুসারে ভাজ্য ও ভাজক রাশিদ্বয়কে সাজাইয়া লইতে হয়।

উদা. $80a^2 + 18ab - 77b^2$কে $11b + 10a$ দ্বারা ভাগ কর।

এস্থলে ভাজ্যটি a অক্ষরের ঘাতের অধঃক্রমে সাজান আছে ; সুতরাং ভাজককে a অক্ষরের অধঃক্রমে সাজাইয়া $10a + 11b$ করিতে হইবে।

$$
\begin{array}{r|l|l}
10a + 11b & 80a^2 + 18ab - 77b^2 & 8a - 7b \\
 & 80a^2 + 88ab & \\
\hline
 & \quad -70ab - 77b^2 & \\
 & \quad -70ab - 77b^2 & \\
\hline
\end{array}
$$

$\therefore$ ভাগফল $= 8a - 7b.$

প্রশ্নমালা 6

প্রথম রাশিকে দ্বিতীয় রাশি দ্বারা ভাগ কর :—

1. $5x^2-2x-3,\ x-1$ 2. $a^4-6a-4,\ a-2$ [C. U. '17]

3. $a+a^5+a^6,\ a^2+a+1$ [C. U. '18]

4. $4x^4+11x^3+27x^2+17x+5,\ x^2+2x+5$

5. $x^4-y^4+a^4+2a^2x^2,\ x^2-y^2+a^2$

6. $a^3+b^3-c^3+3abc,\ a+b-c$ [C. U. '33]

7. $x^3+y^3-1+3xy,\ x+y-1$ [D. B. '27]

8. $a^6-b^6,\ a^2-ab+b^2$ [D. B. '22]

9. $x^5-y^5+\frac{y^{10}}{x^5},\ x-y+\frac{y^2}{x}$ [D. B. '30]

10. $2x^2-3xy+y^2$কে $2x^2+3xy+y^2$ দ্বারা গুণ কর এবং গুণফলকে $2x^2-xy-y^2$ দিয়া ভাগ কর। [M. U. '18]

বন্ধনী (Brackets)

12. তোমরা কোন কোন পদকে বন্ধনীভুক্ত করার এবং বন্ধনীভুক্ত পদগুলিকে বন্ধনীমুক্ত করার নিয়ম জান। যথা,

(1) বন্ধনীর পূর্বে + চিহ্ন থাকিলে বন্ধনীভুক্ত পদগুলিকে বন্ধনীমুক্ত করিলে উক্ত পদগুলির চিহ্নের পরিবর্তন হয় না। যেমন—

$$a+(b+c)=a+b+c.$$

(2) বন্ধনীর পূর্বে – চিহ্ন থাকিলে বন্ধনীভুক্ত পদগুলিকে বন্ধনীমুক্ত করিলে উক্ত পদগুলির চিহ্নের পরিবর্তন হয়। যেমন—

(i) $a-(b+c)=a-b-c,$ (ii) $a-(-b+c)=a+b-c.$

(3) সর্বাপেক্ষা ভিতরের বন্ধনী হইতে কাজ আরম্ভ করিতে হয়।

উদা. সরল কর : $2a-\{5b+[c-(a+b-2c)]\}-\overline{4b-c}.$

রাশিটি$=2a-\{5b+[c-a-b+2c]\}-4b+c$

$=2a-\{5b+c-a-b+2c\}-4b+c$

$=2a-5b-c+a+b-2c-4b+c$

$=(2a+a)-(5b-b+4b)-(c+2c-c)$

$=3a-8b-2c.$

প্রশ্নমালা 7

সরল কর :—

1. $6-\{5+(3-x)\}$ 2. $(2a-3b)+\{3c-(2a-2b)\}$

3. $1-\{1-(1-\overline{1+x})\}$ 4. $-[+\{-(-1-\overline{1-x})\}]$

5. $3x+(4y-z)-[\overline{2x-3y}-\overline{2z-4x}-5x]$

6. $2x-[5y-\{3z+(2x-\overline{3y+5z})\}]$

7. $1-[1-x-\{-1-x+(-1-\overline{x-1})\}]$

8. $[3x-2y+\{5z-(x-y-z)\}]-\{x-(y-z)\}$.

9. $y-[y-\{y-(y-\overline{y+x})\}]$

10. $\{a+(a-1)\}$, $\{a-(a-1)\}$, $[a+\{a-(a-1)\}]$ রাশি তিনটির সমষ্টি নির্ণয় কর।

11. $2x-(y-z)$ হইতে $-2x-(x-\overline{y-z})$ বিয়োগ কর।

12. $3a-\overline{b-2c}$ হইতে কোন্ রাশি বিয়োগ করিলে $b-\overline{c-3a}$ হইবে?

সহজ সহজ সূত্র (Formula)

13. দুইটি দ্বিপদ বা বহুপদ রাশির গুণফল নির্ণয়ের কয়েকটি সূত্র আছে; ইহাদের সাহায্যে সহজেই উক্তপ্রকার রাশিদ্বয়ের গুণফল নির্ণয় করা যায়।

দ্বিপদ রাশির বর্গীকরণ সূত্র।

সূত্র 1. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

প্রমাণ। $(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a(a+b)+b(a+b)$

$$=a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2.$$

সূত্র 2. $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.

প্রমাণ। $(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a(a-b)-b(a-b)$

$$=a^2-ab-ab+b^2=a^2-2ab+b^2.$$

দ্রষ্টব্য : সূত্র 1-এ bএর স্থলে $-b$ বসাইলে সূত্র 2-টি পাওয়া যায়। যথা—
$(a-b)^2=(a+-b)^2=a^2+2a.(-b)+(-b)^2=a^2-2ab+b^2$.

14. **ঐ সূত্র দুইটির প্রয়োগ।**

ভাষায় লিখিতে হইলে সূত্র দুইটি এইরূপে লেখা যায়—

(1) দুইটি সংখ্যার সমষ্টির বর্গফল হইবে প্রথমটির বর্গ যুক্ত দ্বিতীয়টির বর্গ যুক্ত সংখ্যা দুইটির গুণফলের দ্বিগুণ।

(2) দুইটি সংখ্যার অন্তরের বর্গ হইবে প্রথমটির বর্গ যুক্ত দ্বিতীয়টির বর্গ বিযুক্ত সংখ্যা দুইটির গুণফলের দ্বিগুণ।

উদা. 1. $2x^2-7y^2$এর বর্গ নির্ণয় করিতে হইবে।

এখানে সূত্র-2 ব্যবহার করিলে a হইবে $2x^2$ এবং b হইবে $7y^2$.

$$(2x^2-7y^2)^2=(2x^2)^2-2(2x^2)(7y^2)+(7y^2)^2$$
$$=4x^4-28x^2y^2+49y^4.$$

উদা. 2. 305এর বর্গ নির্ণয় কর।

এখানে 305কে দুইটি সংখ্যা 300 ও 5-এ বিভক্ত করা হইল, কেন না, 300 এবং 5এর বর্গ মুখে মুখেই করা যায়।

$$305^2=(300+5)^2=(300)^2+2\times300\times5+5^2$$
$$=90000+3000+25=93025.$$

উদা. 3. 996এর বর্গ নির্ণয় করিতে হইবে।

এখানে $996=1000-4$; সুতরাং সূত্র 2এর সাহায্যে

$$996^2=(1000-4)^2=(1000)^2-2\times1000\times4+(4)^2$$
$$=1000000-8000+16$$
$$=992000+16=992016.$$

উদা. 4. সরল কর।

$$(3x+2y)^2+2(3x+2y)(3x-2y)+(3x-2y)^2.$$

এখানে রাশিটির তিনটি পদ। লক্ষ্য কর, প্রথম ও তৃতীয় পদটি যে দুইটি রাশির বর্গ, দ্বিতীয় পদটি সেই দুইটি রাশির গুণফলের দ্বিগুণ, সুতরাং ইহার গঠন $a^2+2ab+b^2$এর সহিত অভিন্ন।

সুতরাং মনে কর, $a=3x+2y$, এবং $b=3x-2y$.

$\therefore$ রাশিটি $=a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$ [সূত্র 1]

$=(3x+2y+3x-2y)^2$ [a ও bএর মান বসাইয়া]

$=(6x)^2=36x^2$.

উদা. 5. যদি $x=2$, $y=-3$ এবং $z=-2$ হয়, তবে

$(3x+2y+z)^2-2(3x+2y+z)(x-y+2z)+(x-y+2z)^2$এর মান নির্ণয় কর।

মনে কর, $a=3x+2y+z$, এবং $b=x-y+2z$, তাহা হইলে

রাশিটি $=a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$ [সূত্র 2]

$=\{(3x+2y+z)-(x-y+2z)\}^2$ [a ও bএর মান বসাইয়া]

$=(3x+2y+z-x+y-2z)^2=(2x+3y-z)^2$

$=(4-9+2)^2=(-3)^2=9.$

প্রশ্নমালা 8

নিম্ন রাশিগুলির বর্গ নির্ণয় কর :—

1. $6a^2-5b^2$ 2. $4x^3-9y^3$ 3. $xy-ab$
4. $xy+xz$ 5. $2xy-3y^2$ 6. $abc-1$
7. $abc+bc$ 8. $2abc-3ab$

সরল কর :—

9. $25p^2-10p(5p-q)+(5p-q)^2$.
10. $(x+y+z)^2-2(x+y+z)(y+z)+(y+z)^2$.
11. $(ab+bc+ca)^2+2(ab+bc+ca)(ab-bc-ca)+(ab-bc-ca)^2$.

যদি $a=2$ এবং $b=-3$ হয়, তবে নিম্ন রাশিগুলির মান নির্ণয় কর :—

12. $36a^2-12ab+b^2$
13. $(a+b)^2+2(a+b)(a-b)+(a-b)^2$
14. $(2a-3b)^2-(4a-6b)(3a-2b)+(3a-2b)^2$.

সূত্র সাহায্যে গুণফল নির্ণয় কর :—

15. 1006×1006 16. 9991×9991 17. 9999×9999.

15. সূত্র 1 ও 2 হইতে জানা গেল, a^2+b^2এর সহিত $2ab$ যোগ করিলে একটি পূর্ণবর্গ হয় অর্থাৎ $(a+b)^2$ হয় এবং a^2+b^2 হইতে $2ab$ বিয়োগ করিলেও একটি পূর্ণবর্গ অর্থাৎ $(a-b)^2$ হয়।

উদাহরণ। $9x^2+25y^2$এর সহিত কত যোগ করিলে যোগফল পূর্ণবর্গ হইবে ?

এখানে $9x^2=(3x)^2$ এবং $25y^2=(5y)^2$;

$\therefore$ ইহাদের যোগফলের সহিত $2.(3x).(5y)$ অর্থাৎ $30xy$ যোগ করিলে রাশিটি পূর্ণবর্গ হইবে।

16. (1) $a^2+b^2=(a^2+b^2+2ab)-2ab=(a+b)^2-2ab$.

(2) $a^2+b^2=(a^2+b^2-2ab)+2ab=(a-b)^2+2ab$.

অতএব, সূত্র 1 ও 2 হইতে আরও দুইটি সূত্র পাওয়া গেল।

যথা, $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ ···(A)

$a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$ ···(B)

আবার (A) ও (B) যোগ করিলে আর একটি সূত্র হইল

$2(a^2+b^2)=(a+b)^2+(a-b)^2$ ······(C)

এই তিনটি সূত্রের ব্যবহার দেখান হইতেছে।

উদাহরণ 1. যদি $a+b=5$ এবং $ab=6$ হয়, তবে a^2+b^2এর মান নির্ণয় কর।

সূত্র-(A)-তে a^2+b^2, $a+b$ এবং ab আছে, সুতরাং এই সূত্রানুসারে

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=5^2-2\times 6=25-12=13.$$

উদা. 2. যদি $a-b=2$ এবং $ab=48$ হয়, তবে a^2+b^2এর মান কত?

সূত্র-(B) অনুসারে, $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$

$$=2^2+2\times 48=4+96=100.$$

উদা. 3. যদি $a+b=9$ এবং $a-b=5$ হয়, তবে $2(a^2+b^2)$এর মান কত হইবে?

$$2(a^2+b^2)=(a+b)^2+(a-b)^2$$
$$=9^2+5^2=81+25=106.$$

17. বহুপদ রাশির বর্গ।

$a+b+c$ এই রাশির তিনটি পদ, ইহাকে বন্ধনী দ্বারা a এবং $(b+c)$ এই দুইটি পদে বিভক্ত করা যায়; সুতরাং সূত্র-1 অনুসারে,

$$(a+b+c)^2=\{a+(b+c)\}^2=a^2+2a(b+c)+(b+c)^2$$
$$=a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2$$
$$=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.$$

সুতরাং তিনটি পদের সমষ্টির বর্গ হইল প্রত্যেকটির বর্গের সমষ্টি যুক্ত দুই দুইটির গুণফলের দ্বিগুণের সমষ্টি।

উদাহরণ। $(2x-3y+z)$এর বর্গ নির্ণয় করিতে হইবে।

$$(2x-3y+z)^2=\{(2x-3y)+z\}^2=(2x-3y)^2+2(2x-3y)z+z^2$$
$$=4x^2-12xy+9y^2+4xz-6yz+z^2$$
$$=4x^2+9y^2+z^2-12xy-6yz+4xz.$$

প্রশ্নমালা 9

1. $a+b=9$ এবং $ab=20$ হইলে a^2+b^2এর মান কত হইবে?
2. $a-b=5$ এবং $ab=14$ হইলে a^2+b^2এর মান কত হইবে?
3. $x+\frac{1}{x}=4$ হইলে $x^2+\frac{1}{x^2}$এর মান কত হইবে?
4. $x-\frac{1}{x}=3$ হইল $x^2+\frac{1}{x^2}$এর মান কত হইবে?
5. $a^2+b^2=5$ এবং $a^2b^2=3$ হইলে a^4+b^4এর মান কত?

6. $a-b=6$ এবং $ab=40$ হইলে a^2+b^2+abএর মান কত ?

7. $2x+3y=9$ এবং $xy=3$ হইলে $4x^2+9y^2$এর মান কত ?

8. $2ab-5cd=7$ এবং $abcd=1$ হইলে $4a^2b^2+25c^2d^2$এর মান কত ?

নিম্ন রাশিগুলির বর্গ নির্ণয় কর :—

9. $2x+y-z$ 10. $3x-5y+z$ 11. $a-b+c-d$

12. $a-2b-3c-d$

13. $a+b=5$ ও $ab=6$ হইলে $a-b=$কত ?

14. $a+b=5$, $ab=6$ হইলে a^2-b^2এর মান কত ?

15. $a+b=8$ এবং $ab=15$ হইলে a ও bএর মান কত ?

16. $x=a+\frac{1}{a}$ ও $y=a-\frac{1}{a}$ হইলে, $x^4+y^4-2x^2y^2$এর মান কত ? [C. U. '44]

18. দুইটি রাশির সমষ্টি ও অন্তরের গুণফল।

মনে কর, দুইটি রাশি a ও b, ইহাদের সমষ্টি$=a+b$, এবং অন্তর $a-b$,

$\therefore$ ইহাদের গুণফল$=(a+b)(a-b)=a^2-ab+ab-b^2=a^2-b^2$.

সূত্র 3. $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

সুতরাং, দুইটি রাশির সমষ্টি ও অন্তরের গুণফল হইবে ঐ দুইটি রাশির বর্গের অন্তরফল।

লক্ষ্য কর, ঐ সূত্রের বামপক্ষে a পদটি সমচিহ্ন এবং b পদটি বিপরীতচিহ্ন।

উদা. 1. $x+y+z$ এবং $x-y+z$এর গুণফল নির্ণয় কর।

এখানে গুণ্য ও গুণকে x ও zএর চিহ্ন $+$, এবং yএর চিহ্ন বিপরীত ; সুতরাং সূত্রানুসারে, $x+z$কে a এবং yকে b ধরিতে হইবে।

মনে কর, $x+z=a$, $y=b$, তাহা হইলে প্রদত্তরাশি দুইটির

$$\text{গুণফল}=(a+b)(a-b)=a^2-b^2=(x+z)^2-y^2$$
$$=x^2+2xz+z^2-y^2=x^2-y^2+z^2+2xz.$$

উদা. 2. $x-y-z$ এবং $-x+y-z$এর গুণফল নির্ণয় করিতে হইবে।

এখানে, একমাত্র zএর চিহ্ন এক, x ও yএর চিহ্ন বিপরীত ; সুতরাং $x-y-z$কে লেখা যায় $-z+(x-y)$ এবং $-x+y-z$কে লেখা যায় $-z-(x-y)$; অতএব,

$$(x-y-z)(-x+y-z)=\{-z+(x-y)\}\{-z-(x-y)\}$$
$$=(-z)^2-(x-y)^2=z^2-(x^2-2xy+y^2)$$
$$=z^2-x^2+2xy-y^2.$$

উদা. 3. a^2+ab+b^2, a^2-ab+b^2, $a^4-a^2b^2+b^4$এর গুণফল নির্ণয় কর।

গুণফল$=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4)$
$=\{(a^2+b^2)+ab\}\{(a^2+b^2)-ab\}\{(a^4+b^4)-a^2b^2\}$
$=\{(a^2+b^2)^2-a^2b^2\}\{(a^4+b^4)-a^2b^2\}$
$=(a^4+b^4+2a^2b^2-a^2b^2)\{(a^4+b^4)-a^2b^2\}$
$=\{(a^4+b^4)+a^2b^2\}\{(a^4+b^4)-a^2b^2\}=(a^4+b^4)^2-(a^2b^2)^2$
$=a^8+2a^4b^4+b^8-a^4b^4=a^8+a^4b^4+b^8.$

উদা. 4. $a+b+c$, $b+c-a$, $c+a-b$, $a+b-c$এর গুণফল নির্ণয় করিতে হইবে।

গুণফল$=\{(b+c)+a\}\{(b+c)-a\}\{a-(b-c)\}\{a+(b-c)\}$
$=\{(b+c)^2-a^2\}\{a^2-(b-c)^2\}$
$=(b^2+2bc+c^2-a^2)(a^2-b^2+2bc-c^2)$
$=\{2bc+(b^2+c^2-a^2)\}\{2bc-(b^2+c^2-a^2)\}$
$=(2bc)^2-(b^2+c^2-a^2)^2=4b^2c^2-\{(b^2+c^2)-a^2\}^2$
$=4b^2c^2-\{(b^2+c^2)^2-2(b^2+c^2)a^2+(a^2)^2\}$
$=4b^2c^2-\{b^4+2b^2c^2+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2+a^4\}$
$=4b^2c^2-b^4-2b^2c^2-c^4+2a^2b^2+2a^2c^2-a^4$
$=2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4.$

প্রশ্নমালা 10

প্রথম রাশিটিকে দ্বিতীয় রাশিদ্বারা গুণ কর :

1. $3a^2b^2+1$, $3a^2b^2-1$ **2.** x^4+y^4, x^4-y^4

3. $5a^2bc+ab^2c$, $5a^2bc-ab^2c$

4. x^2-x+1, x^2+x+1

5. $2x^2+5x+3$, $-2x^2+5x+3$

6. a^2-ab+b^2, a^2+ab-b^2

7. $3x^2-2xy+y^2$, $3x^2-2xy-y^2$

8. $x-y+z-w$, $x-y-z+w$

মান নির্ণয় কর—

9. 1987^2-1985^2 **10.** 165×155 **11.** 998×1002

ক্রমিক গুণফল নির্ণয় কর—

12. a^2-b^2, a^2+b^2, a^4+b^4, a^8+b^8.

13. $1-x^3$, $1+x^3$, $1+x^6$, $1+x^{12}$

14. $(x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)(z-x+y)$

15. p^2+pq+q^2, p^2-pq+q^2, $p^4-p^2q^2+q^4$

16. প্রমাণ কর যে, $(p+q)^4-(p-q)^4=8pq(p^2+q^2)$.

19. দ্বিপদ রাশির ঘনফল।

সূত্র 4. $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

অথবা, $=a^3+b^3+3ab(a+b)$.

প্রমাণ : $(a+b)^3=(a+b)(a+b)^2=(a+b)(a^2+2ab+b^2)$

$=a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3$

$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

অথবা, $=a^3+b^3+3ab(a+b)$.

সূত্র 5. $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$,

অথবা, $=a^3-b^3-3ab(a-b)$.

প্রমাণ : $(a-b)^3=(a-b)(a-b)^2=(a-b)(a^2-2ab+b^2)$

$=a^3-2a^2b+ab^2-a^2b+2ab^2-b^3$

$=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

অথবা, $=a^3-b^3-3ab(a-b)$.

দ্রষ্টব্য : সূত্র 4এ bর স্থলে $-b$ বসাইলেও সূত্র 5 পাওয়া যায়। যথা,

$(a-b)^3=a^3+3a^2(-b)+3a(-b)^2+(-b)^3$

$=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.

20. ঐ সূত্রদ্বয়ের প্রয়োগের উদাহরণ।

উদা. 1. $(2x+3)$এর ঘনফল নির্ণয় করিতে হইবে।

$(2x+3)^3=(2x)^3+3(2x)^2.3+3(2x).3^2+3^3$

$=8x^3+36x^2+54x+27$.

উদা. 2. $1-2x$এর ঘনফল নির্ণয় করিতে হইবে।

$(1-2x)^3=1^3-3.1^2.(2x)+3.1.(2x)^2-(2x)^3$

$=1-6x+12x^2-8x^3$.

উদা. 3. সরল কর :

$(2x-3y)^3-(2x+3y)^3+18y(2x-3y)(2x+3y)$.

মনে কর, $2x-3y=a$, $2x+3y=b$.

$\therefore\ a-b=2x-3y-2x-3y=-6y$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশিটি $=a^3-b^3-3ab\times-6y=a^3-b^3-3ab(a-b)$

$=(a-b)^3=(-6y)^3=-216y^3$.

21. দুইটি সমান সমান বস্তু হইতে সমান সমান বস্তু বিয়োগ করিলে বিয়োগফল দুইটি সমান হইবে ; এবং দুইটি সমান সমান বস্তুর সহিত সমান সমান বস্তু যোগ করিলে যোগফল দুইটি সমান হইবে। এই দুইটি স্বতঃসিদ্ধ।

$$\because \quad a^3+b^3+3ab(a+b)=(a+b)^3$$

$$\therefore \quad a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b) \;;$$

আবার, $\because \quad a^3-b^3-3ab(a-b)=(a-b)^3$

$$\therefore \quad a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b).$$

উদা. 1. যদি $a+b=5$ এবং $ab=6$ হয়, তবে a^3+b^3এর মান কত ?

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=5^3-3\times6\times5=125-90=35.$

উদা. 2. যদি $a-b=1$ এবং $ab=12$ হয়, তবে a^3-b^3এর মান কত ?

$a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)=1^3+3\times12\times1=1+36=37.$

উদা. 3. যদি $x-\frac{1}{x}=p$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $x^3-\frac{1}{x^3}=p^3+3p.$

$$x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3x.\frac{1}{x}\left(x-\frac{1}{x}\right)$$

$$=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right)=p^3+3p.$$

উদা. 4. যদি $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=3$ হয়, তবে $x^3+\frac{1}{x^3}$এর মান নির্ণয় কর।

[C. U. '45 ; P. U. '24]

$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3x.\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

$$=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2\left(x+\frac{1}{x}\right)-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=3\left(x+\frac{1}{x}\right)-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=0.$$

[বিবিধ]

উদা. 1. $x=2$ এবং $y=-1$ হইলে, $x^3-3x^2y+3xy^2-8y^3$এর মান নির্ণয় কর।

$$\text{রাশিটি}=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3-7y^3=(x-y)^3-7y^3$$

$$=(2+1)^3-7\times(-1)^3=27+7=34.$$

উদা. 2. $a+b+c$এর ঘনফল নির্ণয় কর।

$(a+b+c)^3=\{(a+b)+c\}^3$

$=(a+b)^3+3(a+b)^2.c+3(a+b).c^2+c^3$

$=(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)+3(a^2+2ab+b^2)c+3(a+b)c^2+c^3$

$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3a^2c+6abc+3b^2c+3ac^2+3bc^2+c^3$

$=a^3+b^3+c^3+3a^2b+3ab^2+3a^2c+3ac^2+3b^2c+3bc^2+6abc.$

প্রশ্নমালা 11

নিম্ন রাশিগুলির ঘনফল নির্ণয় কর—

1. $2a+3b$ 2. $2a-3b$ 3. $xy+1$ 4. $xy-1$

5. $xy+x$ 6. $xy-y$ 7. $abc-2a$ 8. $2abc+a$

9. যদি $a+b=6$ এবং $ab=9$ হয়, তবে a^3+b^3এর মান নির্ণয় কর।

10. যদি $a-b=0$ এবং $ab=4$ হয়, তবে a^3-b^3এর মান কত ?

11. যদি $p+\frac{1}{p}=a$ হয়, তবে $p^3+\frac{1}{p^3}$ এর মান কত হইবে ?

12. $x+\frac{1}{x}=2$ হইলে $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)$এর মান নির্ণয় কর।

13. যদি $a-b=2$, এবং $ab=24$ হয়, তবে $(a^2+b^2)(a^3-b^3)$ এর মান নির্ণয় কর।

14. যদি $a+b=c$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $a^3+b^3+3abc=c^3$.

15. $2x-\frac{2}{x}=3$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $8\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)=63$.

[D. B. '29]

সরল কর—

16. $(x+3y)^3-3(x+3y)^2y+3(x+3y)y^2-y^3$

17. $(x+y+z)^3-(x-y-z)^3-6(x+y+z)(x-y-z)(y+z)$

18. $(2x-y)^3+(2x+y)^3+12x(4x^2-y^2)$

মান নির্ণয় কর—

19. $8a^3+12a^2+6a+2$, যখন $a=\frac{1}{2}$.

20. $x^3-9x^2+27x-27$, যদি $x=3$ হয়।

21. $125a^3+225a^2b+135ab^2+27b^3$, যখন $a=-3$, $b=4$.

22. $8-9x+27x^2-27x^3$, যদি $x=2$ হয়।

23. $27y^3-108y^2+144y-217$, যখন $y=3$.

24. x^3+y^3+3xy, যখন $x+y=1$.

25. x^3-y^3-6xy, যখন, $x-y=2$.

ঘনফল নির্ণয় কর—

26. $a+b-c$. 27. $a-b-c$. 28. $3x+2y-z$.

22. সূত্র 6. $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$.

প্রমাণ : $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3$
$=a^3+b^3$.

সূত্র 7. $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$.

প্রমাণ : $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2-b^3$
$=a^3-b^3$.

[সূত্র দুইটির প্রয়োগ]

উদা. 1. $(3x-2y)$ ও $(9x^2+6xy+4y^2)$এর গুণফল নির্ণয় কর।

গুণফল $=(3x-2y)\{(3x)^2+(3x)(2y)+(2y)^2\}$
$=(3x)^3-(2y)^3=27x^3-8y^3$.

উদা. 2. সরল কর—

$(b-c)(b^2+bc+c^2)+(c-a)(c^2+ca+a^2)+(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

রাশিটি $=(b^3-c^3)+(c^3-a^3)+(a^3-b^3)$
$=b^3-c^3+c^3-a^3+a^3-b^3=0$.

উদা. 3. গুণফল নির্ণয় কর—

$(a+b)(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$.

এখানে $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

এবং $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

$\therefore$ গুণফল $=(a^3+b^3)(a^3-b^3)=(a^3)^2-(b^3)^2=a^6-b^6$.

প্রশ্নমালা 12

গুণফল নির্ণয় কর—

1. $(x-2)(x^2+2x+4)$
2. $(1-2x)(1+2x+4x^2)$
3. $(3a-4b)(9a^2+12ab+16b^2)$
4. $(ab+2a)(a^2b^2-2a^2b+4a^2)$
5. $(xyz-1)(x^2y^2z^2+xyz+1)$
6. $(a^2-b^2)(a^4+a^2b^2+b^4)$
7. $(2x-3y)(2x+3y)(4x^2+6xy+9y^2)(4x^2-6xy+9y^2)$
8. $(8a^3-27b^3)(4a^2-6ab+9b^2)(2a+3b)$.

সরল কর—

9. $(2x-3)(4x^2+6x+9)-(2x+3)(4x^2-6x+9)$
10. $(x+2)(x^2-2x+4)+(2x-1)(4x^2+2x+1)-9(x-1)(x^2+x+1)$
11. $(y-z)(y^2+yz+z^2)+(z-x)(z^2+zx+x^2)+(x-y)(x^2+xy+y^2)$.

সূত্র সম্পর্কিত বিবিধ প্রশ্ন (A)

1. শূন্যস্থানগুলি পূর্ণ কর—

(i) $(2x+3y)^2=4x^2+9y^2+(\quad)xy$

(ii) $(2x-3y)^3=8x^3-27y^3-(\quad)(2x-3y)$

(iii) $x^3-y^3=(\quad)(x^2+xy+y^2)$

(iv) $27p^3+q^3=(3p+q)(9p^2-\qquad+q^2)$

2. $4x^2+4x$, $9x^2+1$, $16x^2+8x-1$; ইহাদের প্রত্যেকটির সহিত কত যোগ করিলে প্রত্যেকটি এক একটি পূর্ণবর্গ রাশি হইবে ?

3. $y-\frac{1}{y}=7$ হইলে $y^2+\frac{1}{y^2}$ এবং $y^3-\frac{1}{y^3}$ এর মান কত হইবে ?

4. সরল কর : $(x+3y)^2+(x-3y)^2-2(x+3y)(x-3y)$ এবং $x=3$, $y=1$ হইলে ইহার মান নির্ণয় কর।

5. সরল কর : $(x-y)^3-(x+y)^3+6(x^2-y^2)y$.

6. সরল কর : (1). $(a+b)^3-(a-b)^3$; (2). $(a+b)^3+(a-b)^3$; (3). $(a^2+b^2)^2-(a^2-b^2)^2$; (4). $(a^2+b^2)^2+(a^2-b^2)^2$.

সমীকরণ (Equation)

সমীকরণ সমাধানের প্রণালী তোমরা পূর্বশ্রেণীতে শিখিয়াছ।

23. সমীকরণের সমাধানে পক্ষান্তর প্রক্রিয়া দ্বারা অজ্ঞাত রাশি x-কে একদিকে এবং অপরাপর পদগুলিকে অন্যদিকে বসাইতে হইবে ; তারপর গুণ ও ভাগ সম্বন্ধীয় স্বতঃসিদ্ধের প্রয়োগ করিতে হইবে। ইহা তোমরা জান।

উদা. 1. সমাধান কর $(3x+5)+2(x-5)=4(x+2)$.

এখানে, $3x+5+2x-10=4x+8$

অথবা, $5x-5=4x+8$ [সরল করিয়া]

অথবা, $5x-4x=8+5$ [পক্ষান্তর করিয়া]

$\therefore\quad x=13$.

উদা. 2. সমাধান কর $\frac{x}{7}+\frac{5}{2}=\frac{x}{4}-\frac{1}{2}$

এখানে, $\frac{x}{7}-\frac{x}{4}=-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}$ [পক্ষান্তর করিয়া]

বা, $\frac{4x-7x}{28}=-3$, বা, $-\frac{3}{28}x=-3$,

বা, $-\frac{3}{28}x\times-\frac{28}{3}=-3\times\frac{-28}{3}$ $\left[\frac{-28}{3}\right.$ দ্বারা গুণ করিয়া $\left.\right]$

$\therefore\quad x=28$.

উদা. 3. x-এর মান কত হইলে $(5x-7)+2(x-3)$ এবং $2(x-2)+(3x-3)$ এই রাশি দুইটি সমান হইবে, এবং তখন প্রত্যেকটি রাশির মান কত হইবে ?

এখন, ধরা যাক্, রাশি দুইটি সমান, অর্থাৎ

$$(5x-7)+2(x-3)=2(x-2)+(3x-3)$$

বা, $5x-7+2x-6=2x-4+3x-3$

বা, $7x-13=5x-7$

বা, $7x-5x=13-7$ [পক্ষান্তর করিয়া]

বা, $2x=6$, $\therefore$ $x=3$ [2 দ্বারা ভাগ করিয়া]

এখন রাশি দুইটির মান হইল $7\times 3-13=21-13=8$.

প্রশ্নমালা 13

সমাধান কর (Solve) —

1. $18x+5=5$ 2. $\frac{x}{3}=3$ 3 $\frac{1}{5}x+5=0$

4. $\frac{1}{4}x-1=2x$ 5. $x-2=3-x$

6. $2(x+1)-x=3(x+1)$ 7. $5(x+1)-(x+2)=0$

8. $3(x-1)-(x+2)=x+2(x-1)$

9. $5(2-x)+2(1-x)=3(1-x)-2(x-1)$

10. $3(2x-1)+2(3x-1)+5(x+1)=0$

11. $\frac{x}{2}+1=\frac{x}{5}-1$ 12. $\frac{1}{6}(x-6)+\frac{1}{3}(x-3)=\frac{1}{4}(x-4)+\frac{1}{5}(x-5)$

13. xএর মান কত হইলে $5(x-3)+5$ এবং $2(x-3)-6$ রাশি দুইটি সমান হইবে ?

14. $\frac{1}{5}(5x-1)$ এবং $\frac{1}{3}(6x-1)$ রাশি দুইটি সমান হইলে প্রত্যেক রাশির মান কত হইবে ?

প্রতীক রাশি ও সমীকরণ গঠন

(Symbolical expression and Formation of Equation)

24. (1) **দুইটি সংখ্যার অন্তরের প্রতীক রাশি।**

যেমন 10 ও 8এর অন্তর $10-8$, সেইরূপ a ও bর অন্তর $a-b$, সুতরাং যে কোন দুইটি সংখ্যার অন্তরের প্রতীক রাশি হইল $a-b$.

(ক) a হইতে b কত ছোট ? এখানে b অপেক্ষা a বড় ধরা হইয়াছে।

$\therefore$ ইহার উত্তর হইবে $a-b$.

(খ) a হইতে b কত বড় ? উত্তর হইবে $b-a$.

(2) যেমন একটি ফলের মূল্য 2 পয়সা হইলে 7টি ফলের মূল্য 7×2 প., সেইরূপ একটি ফলের মূল্য x পয়সা হইলে yটি ফলের মূল্য xy পয়সা।

(3) 1 ডলারে যেমন 100 সেণ্ট, x ডলারে তেমনি $100x$ সেণ্ট।

(4) x টাকা y আনা z পাইতে কত পাই ?

x টাকা $= 192x$ পাই এবং y আনা $= 12y$ পাই

$\therefore$ x টাকা y আনা z পাইএ হইল $(192x+12y+z)$ পাই,

সুতরাং টাকা, আনা, পাইকে পাইএ পরিবর্তিত করিবার সূত্র হইল

$(192x+12y+z)$ পাই।

25. সমীকরণ গঠনের উদাহরণ।

নিম্নের প্রশ্নটির সমীকরণ গঠন করিতে হইবে—

A হইতে B-এর 10 টাকা বেশী আছে ; উভয়ের টাকার সমষ্টি 60 টাকা ; কাহার কত টাকা আছে ?

এখন A-র কত টাকা আছে জানিলে B-র কত টাকা আছে জানা যাইবে, সুতরাং A-র টাকাটাই হইল **অজ্ঞাত রাশি**। মনে কর, A-র টাকার পরিমাণ x টাকা। তাহা হইলে B-র আছে $x+10$ টাকা। এখন উভয়ের টাকা যোগ করিলে $x+(x+10)$ টাকা হয় ; কিন্তু দেওয়া আছে উহা 60 টাকার সমান।

$\therefore$ সমীকরণ হইল $x+(x+10)=60$.

প্রশ্নমালা 14

1. যে সংখ্যাটি x হইতে 5 বেশী সেই সংখ্যাটি কত ?

2. দুইটি সংখ্যার সমষ্টি x, একটি 5 হইলে অপরটি কত ?

3. দুইটি সংখ্যার অন্তর 5, বৃহত্তরটি x হইলে অপরটি কত ?

4. x হইতে y কত বেশী ? **5.** x হইতে y কত কম ?

6. কোন্ সংখ্যাকে x দ্বারা গুণ করিলে গুণফল 12 হইবে ?

7. কোন্ সংখ্যাকে x দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফল 12 হইবে ?

8. কোন যুগ্ম ও কোন অযুগ্ম সংখ্যার প্রতীক কি ?

9. তিনটি ক্রমিক সংখ্যার প্রথমটি x হইলে পরের দুইটি কি হইবে ?

10. তিনটি ক্রমিক সংখ্যার মধ্যেরটি x হইলে অপর দুইটি কি হইবে ?

11. A-র x টাকা আছে এবং B-র আছে তাহার 3 গুণ অপেক্ষা 10 টাকা বেশী। উভয়ের একত্রে কত টাকা আছে ?

12. x একটি যুগ্ম সংখ্যা, ইহার অব্যবহিত পূর্ববর্তী ও পরবর্তী যুগ্ম সংখ্যা দুইটি কি কি ?

13. চারিটি ক্রমিক সংখ্যার তৃতীয়টি x হইলে অপরগুলি কি কি ?

14. x টাকা y আনায় কত পাই হয় ? নূতন মুদ্রা 2x টাকা y পয়সায় কত পয়সা হয় ?

15. একটি লোক a টাকা দ্বারা b সংখ্যক আম কিনিল। ঐ দরে c সংখ্যক আমের দাম কত হইবে ?

16. একটি রেলগাড়ী ঘণ্টায় x মাইল যায়। ইহা প্রতি সেকেণ্ডে কত ফুট যাইবে ?

17. a টাকায় b সংখ্যক আম কিনিয়া c টাকায় বিক্রয় করায় লাভ হইল। প্রতি আমে কত লাভ হইল ?

18. প্রতি কিলো গ্রাম a টাকা দরের x কিলো গ্রাম চা-এর সহিত প্রতি কিলো গ্রাম b টাকা দরের y কিলো গ্রাম চা মিশাইলে মিশ্রিত চায়ের প্রতি কিলো গ্রামের কত টাকা দর পড়িবে ?

19. প্রতি বৎসর x টাকার সুদ y টাকা হইলে সুদের শতকরা হার কত ?

20. x টাকার t বৎসরের সুদ y টাকা হইলে সুদের শতকরা হার কত ?

21. x টাকার t বৎসরের সুদ y টাকা হইলে p টাকার q বৎসরের সুদ কত হইবে ?

22. ভাজক x, ভাগফল 15, অবশিষ্ট y হইলে ভাজ্য কত ?

23. ভাজ্য x, ভাগফল 18, অবশিষ্ট y হইলে ভাজক কত ?

নিম্ন বর্ণনাগুলিকে সমীকরণ দ্বারা প্রকাশ কর :

24. 5 টাকা হইতে x টাকা 7 টাকা অধিক।

25. x টাকার $\frac{1}{3}$ অংশের সহিত 10 টাকা যোগ করিলে 25 টাকা হয়।

26. রামের বয়স x বৎসর, শ্যাম রাম অপেক্ষা 5 বৎসরের বড় ; উভয়ের বয়স একত্র করিলে 25 বৎসর হয়।

27. x একটি সংখ্যা ; ইহার দ্বিগুণের সহিত 3 যোগ করিলে যাহা হয়, ইহার 5 গুণ হইতে 3 বিয়োগ করিলেও তাহাই হয়।

28. দুইটি সংখ্যার সমষ্টি 34 ; ইহাদের ক্ষুদ্রতরটি x ; ক্ষুদ্রতরটির 5 গুণ বৃহত্তরটির দ্বিগুণের সমান।

29. আমার a টাকা ছিল ; আমি যদি কোন দোকানে আমার টাকার অর্ধেক ও অন্য এক দোকানে 5 টাকা খরচ করিয়া থাকি, তাহা হইলে আমার নিকট কত অবশিষ্ট ছিল ? [W. B. S. F. '58]

30. aটি ঘোড়ার প্রতিটির মূল্য x টাকা, bটি ঘোড়ার প্রতিটির মূল্য y টাকা এবং cটি ঘোড়ার প্রতিটির মূল্য z টাকা। গড়ে প্রতিটি ঘোড়ার মূল্য কত ? [W. B. S. F. '58]

31. 6 সেণ্টিমিটার লম্বা একটি রেখাকে $8x$ সে. মি. বাড়াইয়া আবার 12 সে. মি. কমান হইল। তখন উহার এক-চতুর্থাংশের দৈর্ঘ্য কত ?

32. একটি আয়তাকার কাষ্ঠখণ্ডের দৈর্ঘ্য a সেণ্টিমিটার, প্রস্থ b সে. মি. ও বেধ c সেণ্টি মিটার। উহার সব পিঠের মোট ক্ষেত্রফল কত ?

সমীকরণসাধ্য প্রশ্নাবলী

29. পূর্বে কোন প্রশ্নকে সমীকরণে রূপান্তরিত করিবার প্রণালী প্রদর্শিত হইয়াছে। এক্ষণে সমীকরণ দ্বারা প্রশ্নগুলির সমাধান প্রদর্শিত হইবে। প্রত্যেক প্রশ্নেই যেটি নির্ণেয় অর্থাৎ অজ্ঞাত রাশি তাহাকে x ধরিয়া প্রশ্নানুযায়ী বিভিন্ন উপাত্তের x-এর সহিত সম্বন্ধ নির্ণয় করিলে সমীকরণ গঠিত হইবে, এবং সমীকরণটির সমাধান অর্থাৎ xএর মানই প্রশ্নটির উত্তর হইবে।

উদা. 1. 192-কে এমন দুইটি অংশে বিভক্ত কর যেন একটি অপরটির দ্বিগুণ হয়।

মনে কর, ক্ষুদ্রতর অংশটি x, সুতরাং বৃহত্তরটি ইহার দ্বিগুণ অর্থাৎ $2x$;

$\therefore$ উভয়ের সমষ্টি $x+2x$; আবার উভয়ের সমষ্টি দেওয়া আছে 192 ;

$\therefore$ সমীকরণ হইল $x+2x=192$, বা, $3x=192$, $\therefore$ $x=\frac{192}{3}=64$.

$\therefore$ ক্ষুদ্রতর অংশ $=64$, এবং বৃহত্তর অংশ $=64\times 2=128$.

উদা. 2. পিতার বয়স বর্তমানে পুত্রের বয়সের তিন গুণ। 5 বৎসর পূর্বে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের 4 গুণ ছিল। পিতা ও পুত্রের বয়স কত ?

মনে কর, পুত্রের বর্তমান বয়স x বৎসর।

তাহা হইলে পিতার বর্তমান বয়স $3x$ বৎসর।

5 বৎসর পূর্বে পুত্রের বয়স ছিল $x-5$ বৎসর এবং পিতার বয়স ছিল $3x-5$ বৎসর। সুতরাং প্রশ্নানুসারে $4(x-5)=(3x-5)$,

বা, $4x-20=3x-5$, বা, $4x-3x=20-5$ [পক্ষান্তর করিয়া]

$\therefore$ $x=15$.

$\therefore$ পুত্রের বর্তমান বয়স 15 বৎসর এবং পিতার বর্তমান বয়স 45 বৎসর।

উদা. 3. একটি লোককে 71 কিলো মিটার দূরবর্তী কোন স্থানে যাইতে হইল। সে কিছুদূর ঘণ্টায় 4 কি. মিটার বেগে পায়ে হাঁটিয়া যাইয়া বাকী পথ গাড়ীতে ঘণ্টায় 24 কি. মিটার বেগে গেল এবং মোট 4 ঘণ্টায় সে গন্তব্যস্থলে পৌঁছিল। সে হাঁটিয়া কতদূর গিয়াছিল ?

মনে কর, সে হাঁটিয়া x কিলো মিটার গিয়াছিল ; সুতরাং সে গাড়ীতে $(71-x)$ কি. মিটার গিয়াছিল। এখন ঘণ্টায় 4 কি. মি. করিয়া x কি. মি. যাইতে সময় লাগিল $\frac{x}{4}$ ঘণ্টা এবং ঘণ্টায় 24 কি. মি. বেগে $(71-x)$ কি. মি.

যাইতে সময় লাগিল $\frac{1}{24}(71-x)$ ঘণ্টা, স্থতরাং মোট সময় লাগিল $\frac{1}{4}x+\frac{1}{24}(71-x)$ ঘণ্টা।

আবার, মোট সময় দেওয়া আছে 4 ঘণ্টা।

$\therefore$ $\frac{1}{4}x+\frac{1}{24}(71-x)=4$, বা, $\frac{1}{4}x+\frac{71}{24}-\frac{1}{24}x=4$,

বা, $\frac{1}{4}x-\frac{1}{24}x=4-\frac{71}{24}$, বা, $\frac{5}{24}x=\frac{25}{24}$, $\therefore$ $x=\frac{25}{24}\times\frac{24}{5}=5$.

$\therefore$ সে হাঁটিয়া গিয়াছিল 5 কিলোমিটার।

উদা. 4. এমন তিনটি ক্রমিক সংখ্যা নির্ণয় করিতে হইবে যে মধ্যবর্তী সংখ্যার 5 গুণ বৃহত্তমটির 3 গুণের সহিত যোগ করিলে 43 হয়।

মনে কর, মধ্যবর্তী সংখ্যাটি x, তাহা হইলে ক্রমিক সংখ্যা তিনটি হইল যথাক্রমে $(x-1)$, x, $(x+1)$; ইহাদের মধ্যে $(x+1)$ই বৃহত্তম। এখন প্রশ্নানুসারে $5x$এর সহিত $3(x+1)$ যোগ করিলে 43 হইবে।

$\therefore$ $5x+3(x+1)=43$, বা, $5x+3x+3=43$,

বা, $5x+3x=43-3$, বা, $8x=40$, $\therefore$ $x=5$.

$\therefore$ সংখ্যা তিনটি যথাক্রমে $5-1, 5, 5+1$ অর্থাৎ 4, 5, 6.

প্রশ্নমালা 15

1. কোন সংখ্যা হইতে 2 বিয়োগ করিয়া বিয়োগফলকে 11 দ্বারা গুণ করিলে গুণফল 66 হয় ; সংখ্যাটি কত ?

2. 90-কে এমন দুইটি অংশে বিভক্ত করিতে হইবে যেন ছোটটির তিন গুণ বড়টির দ্বিগুণের সমান হয়।

3. তিনটি ক্রমিক সংখ্যার যোগফল 288 ; সংখ্যা তিনটি কত ?

4. কোন সংখ্যার $\frac{1}{5}$ অংশের সহিত উহার $\frac{1}{7}$ অংশ যোগ করিলে যোগফল 144 হয় ; সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

5. 558 হইতে কোন সংখ্যার 8 গুণ বিয়োগ করিলে বিয়োগফলটি উক্ত সংখ্যার 10 গুণ হইবে ; সংখ্যাটি কত ?

6. কোন সংখ্যা হইতে 70 বিয়োগ করিলে যাহা হয়, 70 হইতে সেই সংখ্যাটি বিয়োগ করিলেও তাহাই হয়। সংখ্যাটি কত ?

7. কোন সংখ্যার $\frac{2}{3}$ অংশ হইতে 50 বিয়োগ করিলে যাহা হয়, ঐ সংখ্যার $\frac{1}{4}$ অংশের সহিত 40 যোগ করিলেও তাহাই হয়। সংখ্যাটি কত ?

8. দুইটি সংখ্যার সমষ্টি 43 এবং অন্তর 7 ; সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

9. দুইটি সংখ্যার অন্তর 20 ; ছোটটির $\frac{4}{5}$ অংশ বড়টির অর্ধেক অপেক্ষা 14 বেশী। সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

10. একটি বালকের বর্তমান বয়স যত বৎসর, 10 বৎসর পরে তাহার তিনগুণ বয়স হইবে। বালকটির বয়স কত ?

11. বর্তমানে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের 3 গুণ ; 15 বৎসর পরে উভয়ের বয়সের অন্তর 30 বৎসর হইবে। পিতা ও পুত্রের বর্তমান বয়স কত ?

12. পিতা ও পুত্রের বর্তমান বয়স যথাক্রমে 45 ও 20 বৎসর ; কত বৎসর পরে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের দ্বিগুণ হইবে ?

13. A-র বয়স B-র বয়সের $\frac{2}{3}$ অংশ ; 5 বৎসর পূর্বে A-র বয়স B-র বয়সের $\frac{3}{5}$ অংশ ছিল। A ও B-র বর্তমান বয়স কত ?

14. একটি বালকের 4 বৎসর পূর্বে যত বয়স ছিল, 6 বৎসর পরে তাহার দ্বিগুণ বয়স হইবে। বালকটির বর্তমান বয়স কত ?

15. A ও B-র বয়সের সমষ্টি 54 বৎসর। 2 বৎসর পূর্বে A-র বয়সের $\frac{2}{3}$ অংশ B-র বর্তমান বয়সের $\frac{3}{4}$ অংশ অপেক্ষা 12 বৎসর বেশী ছিল। উহাদের বর্তমান বয়স কত ?

16. একটি ভেড়ার দলে 96টি ভেড়া আছে। ইহাকে এমন দুইটি দলে বিভক্ত করা হইল যে একটি দলের $\frac{1}{5}$ অংশ অন্যদলের 3 গুণের সমান হইল। কোন্ দলে কত ভেড়া হইল ?

17. 20 খানা টিকিটের মূল্য 11 ডলার 52 সেণ্ট। কতকগুলি টিকিটের প্রত্যেকটির মূল্য 48 সেণ্ট এবং বাকীগুলির প্রত্যেকটির মূল্য 64 সেণ্ট। 48 সেণ্ট দরের টিকিট কতগুলি ?

18. একটি লোক 7 ঘণ্টায় 75 কিলো মিটার গেল। কিছুটা পথ ঘণ্টায় 12 কি. মি. এবং বাকিটা ঘণ্টায় 10 কি. মি. বেগে গেল। ঘণ্টায় 12 কি. মি. বেগে সে কতটা গিয়াছিল ?

19. A-র আছে 72 টাকা এবং B-র আছে 12 টাকা। A কত টাকা B-কে দিলে B-র টাকা A-র টাকার 3 গুণ হইবে ?

20. A ও B-র মধ্যে 2520 টাকা এরূপভাবে ভাগ করিয়া দাও যে A যতবার 4 টাকা পাইবে, B ততবার 3 টাকা পাইবে।

[A x-বার 4 টাকা পাইলে মোট পায় $4x$ টাকা এবং B পায় $3x$ টাকা]

21. A ও B-র মধ্যে 123 টাকা এরূপভাবে ভাগ করিয়া দাও যে A যতগুলি 50 পয়সা মুদ্রা পাইবে, B ততগুলি 25 পয়সা মুদ্রা পাইবে।

22. 1793 টাকা A, B ও C-র মধ্যে এরূপভাবে ভাগ করিয়া দেওয়া হইল যে, A যত টাকা পাইল B তাহার দ্বিগুণ অপেক্ষা 3 টাকা কম এবং C তাহার তিনগুণ অপেক্ষা 4 টাকা কম পাইল। কে কত টাকা পাইল ?

23. প্রত্যেক বালককে 72 প. এবং প্রত্যেক বালিকাকে 1 টা. 20 প. করিয়া মোট 182 টাকা 64 পয়সা 205 জন বালক-বালিকার মধ্যে ভাগ করিয়া দেওয়া হইল। কতজন বালক এবং কতজন বালিকা ছিল ?

24. A ও B-র বর্তমান বয়স C-র বয়সের যথাক্রমে দ্বিগুণ ও পাঁচগুণ। দুই বৎসর পূর্বে B-র বয়স A ও C-এর বয়সের সমষ্টির দ্বিগুণ ছিল। এখন প্রত্যেকের বয়স কত?

25. একটি থলিতে টাকায় এবং 50 পয়সা মুদ্রায় মোট 365টি মুদ্রা আছে। 50 পয়সা মুদ্রাগুলির মোট মূল্য টাকাগুলির মোট মূল্য অপেক্ষা 14 টাকা কম। কোন্ মুদ্রা কতগুলি আছে?

26. আমার যত টাকা আছে আরও যদি তাহার $\frac{10}{7}$ অংশ পাই, তবে আমার মোট 270 টাকা হয়। আমার কত টাকা আছে?

27. A-র যত টাকা আছে, আরও তাহার অর্ধেক এবং 5 টাকা হইলে B-র টাকার সমান হয়। উভয়ের মোট 385 টাকা থাকিলে, কাহার কত টাকা আছে?

28. একটি বাঁশের $\frac{1}{3}$ অংশ কাদায় পোঁতা, $\frac{1}{4}$ অংশ জলে এবং 5 মিটার জলের উপরে আছে ; বাঁশটি কত লম্বা?

29. পুত্রের বয়স পিতার বয়সের অর্ধেক অপেক্ষা 9 বৎসর বেশী ; উভয়ের বয়স-সমষ্টি 105 বৎসর। কাহার বয়স কত?

30. কোন্ সংখ্যার $\frac{5}{13}$ অংশ, উহার $\frac{1}{13}$ অংশ অপেক্ষা 16 বেশী হইবে?

31. এক ব্যক্তি 36 পয়সা কিলো গ্রাম দরের 9 কিলো গ্রাম দুধের সহিত কিছু জল মিশাইয়া 27 পয়সা কিলো গ্রাম দরে বিক্রয় করায় তাহার লাভ-লোকসান কিছুই হইল না। সে কত কিলো গ্রাম জল মিশাইয়াছিল?

32. একটি লোক 8 ঘণ্টায় যতটা পথ যায়, প্রতি ঘণ্টায় 2 কিলো মিটার বেশী বেগে চলিলে তাহার সেই পথ যাইতে 2 ঘণ্টা কম সময় লাগে। লোকটি ঘণ্টায় কত কিলো মিটার বেগে চলে?

33. একটি রেলগাড়ী ঘণ্টায় 30 কিলো মিটার বেগে যতটা পথ যে-সময়ে যায়, ঘণ্টায় 25 কি. মি. বেগে চলিলে ততটা পথ সেই সময় অপেক্ষা 36 মিনিট বেশী সময়ে যায়। পথটি কত কিলো মিটার?

34. A-র বয়স B-র বয়সের 6 গুণ। 28 বৎসর পরে B-র বয়স যত হইবে, 32 বৎসর পূর্বে A-র বয়স তত ছিল। উভয়ের বর্তমান বয়স নির্ণয় কর।

35. এক ব্যক্তি ঘণ্টায় 32 মাইল বেগে রেলগাড়ীতে কিছুদূর যাইয়া ঘণ্টায় 3 মাইল বেগে পদব্রজে গেল। সে মোট 60 মাইল $5\frac{1}{2}$ ঘণ্টায় গেল। সে পদব্রজে কতদূর গেল?

উৎপাদকে বিশ্লেষণ

তোমরা বীজগণিতে কোন রাশিকে উহার উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিবার কতিপয় প্রণালী পূর্বেই শিখিয়াছ।

27. বিচ্ছেদ বিধি দ্বারা উৎপাদক নির্ণয়।

বিচ্ছেদ বিধি $ab+ac=a(b+c)$.

এখানে $ab+ac$ রাশিমালার প্রতি পদের একটি উৎপাদক স্পষ্টতঃ a, সুতরাং এই সাধারণ (common) উৎপাদক a বাহির করিয়া লইলে $b+c$ থাকে। $b+c$এর উৎপাদক নাই ; সুতরাং $ab+ac$র উৎপাদক হইল $a(b+c)$, এখানে a এবং $(b+c)$ দুইটি উৎপাদক।

উদা. 1. $5x^3+2x^2+x$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

এখানে রাশিটি $5.x.x^2+2.x.x+x$ হওয়ায় প্রতি পদের উৎপাদক বা সাধারণ উৎপাদক হইল x. $\therefore \quad 5x^3+2x^2+x=x(5x^2+2x+1)$.

লক্ষ্য কর, প্রতি পদকে ইহাদের সাধারণ উৎপাদক x দ্বারা ভাগ করিয়াই দ্বিতীয় উৎপাদক $5x^2+2x+1$ হইয়াছে।

উদা. 2. $a^2bc-ab^2c+abc^2$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিতে হইবে।

$$a^2bc-ab^2c+abc^2=abc(a-b+c).$$

প্রশ্নমালা 16

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর (Resolve into factors) :

1. $x^2yz+xyz^2$
2. $36x^2y-6xy^2$
3. $45y^4-9xy^3$
4. $5x^4y^2+10x^2y^4$
5. $-p^3y-py^3+py$
6. $9a^3b^2c-81a^2b^3c^2+36a^2bc^3$
7. $17a^7b^8c^9+68a^7b^6c^9-85a^7b^5c^9$
8. $29x^4y^4z^4-58x^3y^3z^3-87x^2y^2z^2+29xyz$.

28. উপরোক্ত অনুচ্ছেদে কতকগুলি রাশির একপদ উৎপাদক নির্ণয় করা হইয়াছে। এইবার সম্ভবস্থলে বহুপদ উৎপাদক নির্ণয় করা যাইবে।

উদা. 1. $a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2+c^2x^2+c^2y^2$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

এখানে প্রদত্ত রাশিটির ছয়টি পদ। দেখা যাইতেছে পদ ছয়টিকে দুইটি দুইটি করিয়া তিনটি গুচ্ছে (group) অথবা তিনটি তিনটি করিয়া দুইটি গুচ্ছে বিভক্ত করা যাইতে পারে। যথা—

প্রদত্ত রাশি $=(a^2x^2+a^2y^2)+(b^2x^2+b^2y^2)+(c^2x^2+c^2y^2)$

$=a^2(x^2+y^2)+b^2(x^2+y^2)+c^2(x^2+y^2)$

$=(x^2+y^2)(a^2+b^2+c^2)$.

অথবা, প্রদত্ত রাশি $=(a^2x^2+b^2x^2+c^2x^2)+(a^2y^2+b^2y^2+c^2y^2)$
$=x^2(a^2+b^2+c^2)+y^2(a^2+b^2+c^2)$
$=(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2)$.

উদা. 2. $(b-c)(1+a)+(a-b)(1+c)$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।
এস্থলে রাশিটিকে বন্ধনীমুক্ত করিয়া লইতে হইবে।
রাশিটি $=b+ab-c-ac+a+ac-b-bc=ab-c+a-bc$
$=(ab+a)-(bc+c)=a(b+1)-c(b+1)=(b+1)(a-c)$.

প্রশ্নমালা 17

গুণনীয়ক নির্ণয় কর :—

1. $ab(x-y)-bc(x-y)$
2. $(a-b)(x+y+z)+(b-c)(x+y+z)$
3. $ab+a+b+1$
4. $x^2+ax+bx+ab$
5. $ac+bd-bc-ad$
6. $x^3+5x^2+3x+15$
7. $abc-ab-c+1$
8. $(a+b)(1-c)-(b+c)(1-a)$
9. $(a+b)(p+cq)-(b+c)(p+aq)$
10. $a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2$
11. $x^2-(a+b)x+ab$
12. $(x^2-ab)+(a-b)x$
13. $x(b+c-a)+x(c+a-b)+x(a+b-c)$
14. $(a+b)(x+y)+c(x+y)+z(a+b+c)$.

29. দুইটি বর্গের অন্তর a^2-b^2.

আমরা জানি $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$, সুতরাং ইহাকে
উল্টাইয়া লিখিলে হয়, $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$
[অথবা, $a^2-b^2=a^2+ab-ab-b^2$
$=a(a+b)-b(a+b)=(a+b)(a-b)$]

সুতরাং কোন রাশিমালা দুইটি পূর্ণবর্গ রাশির অন্তর হইলে তাহার গুণনীয়ক হইবে ঐ দুইটি রাশির সমষ্টি ও অন্তরফল। এস্থলে প্রথমে রাশিটিকে দুইটি পূর্ণবর্গরাশির অন্তররূপে প্রকাশ করিতে হইবে।

উদা. 1. $4x^2-9$এর গুণনীয়ক নির্ণয় করিতে হইবে।

$$4x^2-9=(2x)^2-(3)^2=(2x+3)(2x-3).$$

উদা. 2. $(a+b)^2-c^2$এর গুণনীয়ক নির্ণয় কর।
রাশিটি $=(a+b)^2-(c)^2=(a+b+c)(a+b-c)$.

উদা. 3. $x^2-y^2+2yz-z^2$এর গুণনীয়ক নির্ণয় কর।

রাশিটি$=x^2-(y^2-2yz+z^2)=x^2-(y-z)^2$

$=(x+y-z))x-y+z)$.

প্রশ্নমালা 18

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর (Resolve into factors) :—

1. $a^2b^2c-c^3$ 2. $63x^2y^2-7$ 3. $81p^2q^2-p^4q^4$
4. $a^2b^2c^2-1$ 5. $(2x+3y)^2-16$ 6. $(3p-2q)^2-r^2$
7. $x^2-(y+z)^2$ 8. $9x^2-(2x-3y)^2$
9. $(x-y+z)^2-y^2$ 10. $(2p-3q+r)^2-9(p-q)^2$
11. $(3p+2q)^2-(3q-2r)^2$ 12. $(a+b)^2-(c-d)^2$
13. $(a-b+c)^2-(b+c-a)^2$ 14. $4x^2+4xy-z^2+y^2$
15. $a^2-b^2+2bc-c^2$ 16. $3x(3x-2y)+y^2-z^2$
17. $5a(5a-2b)+(b+c)(b-c)$
18. $9(a-b)^2-25(b-c)^2$ 19. x^4-y^4 20. x^8-y^8.

30. কোন কোন রাশিমালা দুইটি বর্গের অন্তররূপে প্রকাশিত না থাকিলেও অনেক সময় কিছু যোগ বিয়োগ করিয়া উহাকে দুইটি বর্গের অন্তররূপে প্রকাশিত করা যায়। উদাহরণ দ্বারা এই প্রক্রিয়া দেখান যাইতেছে।

উদাহরণ 1. $a^4+a^2b^2+b^4$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিতে হইবে।

$a^4+a^2b^2+b^4=(a^2)^2+2a^2.b^2+(b^2)^2-a^2b^2$

$=(a^2+b^2)^2-(ab)^2=(a^2+b^2+ab)(a^2+b^2-ab)$

$=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$.

[a^2b^2 যোগ করায় পূর্ণবর্গরাশি হইল, পরে a^2b^2 বিয়োগ করায় রাশিটি ঠিক রহিল।]

উদা. 2. x^4+64কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিতে হইবে।

$x^4+64=(x^2)^2+(8)^2+2.x^2.8-16x^2$

$=(x^2+8)^2-(4x)^2=(x^2+4x+8)(x^2-4x+8)$.

উদা. 3. $x^4-10x^2y^2+16y^4$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিতে হইবে।

$x^4-10x^2y^2+16y^4=(x^2)^2-2.x^2.5y^2+(5y^2)^2-(3y^2)^2$

$=(x^2-5y^2)^2-(3y^2)^2=(x^2-5y^2+3y^2)(x^2-5y^2-3y^2)$

$=(x^2-2y^2)(x^2-8y^2)$.

Co. (Al.)—3.

উদা. 4. $4x^2-3y^2-z^2-4xy+4yz$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

রাশিটি$=(4x^2-4xy+y^2)-(4y^2-4yz+z^2)$
$=(2x-y)^2-(2y-z)^2=(2x-y+2y-z)(2x-y-2y+z)$
$=(2x+y-z)(2x-3y+z)$.

উদা. 5. $(x^2-y^2)(p^2-q^2)+4pqxy$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

রাশিটি$=p^2x^2-p^2y^2-q^2x^2+q^2y^2+4pqxy$
$=(p^2x^2+2pqxy+q^2y^2)-(p^2y^2-2pqxy+q^2x^2)$
$=(px+qy)^2-(py-qx)^2$
$=(px+qy+py-qx)(px+qy-py+qx)$.

উদা. 6. $3x^2-y^2-z^2-2yz-2zx-2xy$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিতে হইবে।

রাশিটি$=4x^2-(x^2+y^2+z^2+2yz+2zx+2xy)$
$=(2x)^2-(x+y+z)^2=(2x+x+y+z)(2x-x-y-z)$
$=(3x+y+z)(x-y-z)$.

প্রশ্নমালা 19

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর (Resolve into factors) :—

1. a^4+4
2. $4x^4+81$
3. $81x^4+64y^4$
4. $9x^4+36$
5. x^4+x^2+1 [C. U. ; D. B.]
6. $a^4+a^2y^2+y^4$
7. x^8+x^4+1
8. x^4-6x^2+1
9. $a^8+a^4x^4+x^8$
10. p^4+2p^2+9
11. $x^4-23x^2y^2+y^4$
12. $4x^4y^4-16x^2y^2+9$
13. $4x^4+625$
14. $9y^4-33y^2+16$
15. $9a^4-a^2+16$
16. $4x^4+11x^2+25$
17. $4x^4-24x^2+25$
18. $4x^4-16x^2+25$
19. $4a^4+1$
20. x^4+8x^2+144
21. $(a+b)^4+4$
22. $(x^2-2xy)-(z^2-2yz)$
23. $4a^2-9b^2-c^2-6bc$
24. $36x^2+y^2-z^2-12xy$
25. $4p^2-1+9q^2-25r^2+12pq-10r$
26. $16x^2-16y^2-9z^2-24x+24yz+9$
27. $2(ab+cd)-a^2-b^2+c^2+d^2$
28. $4x^2-3y^2-z^2-4xy+4yz$
29. $4a^2-4ab-c^2-2bc$
30. $3a^2+b^2-c^2-4ab+2ac$.

31. x^2+px+q আকারের x-অক্ষরের দ্বিমাত্রিক রাশির উৎপাদকে বিশ্লেষণ।

লক্ষ্য কর—(1) উক্ত রাশিটিতে x^2এর সহগ 1 (এক), xএর সহগ $+p$ এবং x-নিরপেক্ষ পদ $+q$.

(2) আবার, $x^2+(a+b)x+ab$ রাশিমালাটিও x-অক্ষরের দ্বিমাত্রিক; ইহার আকৃতি x^2+px+qএর অনুরূপ। $a+b=p$ এবং $ab=q$ বসাইলেই রাশিটি$=x^2+px+q$ হয়।

এখন, $x^2+(a+b)x+ab=x^2+ax+bx+ab=(x^2+ax)+(bx+ab)$

$$=x(x+a)+b(x+a)=(x+a)(x+b).$$

এখন, x^2+px+qএর গুণনীয়ক $(x+a)(x+b)$ হইবে, যদি $a+b=p$ এবং $ab=q$ হয়; সুতরাং x^2+px+qকে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করিতে হইলে, xএর সহগ $+p$কে এমন দুইটি ভাগে (a, b) বিভক্ত করিতে হইবে যেন উহাদের বৈজিক যোগফল $+p$ এবং গুণফল $+q$ হয়। উদাহরণ দ্বারা প্রক্রিয়াটি বুঝান যাইতেছে।

উদা. 1. x^2-x-6কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিতে হইবে।

এখানে -6এর উৎপাদক $(+6, -1)$, $(-6, +1)$ $(+3, -2)$ $(-3, +2)$; ইহাদের মধ্যে $(-3)+(+2)=-1$ (xএর সহগ); সুতরাং

রাশিটি$=x^2-3x+2x-6=(x^2-3x)+(2x-6)$

$$=x(x-3)+2(x-3)=(x-3)(x+2).$$

উদা. 2. $1-3x-10x^2$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিতে হইবে।

এখানে $-10=(-5)\times(+2)$, এবং $-3=(-5)+(+2)$,

সুতরাং রাশিটি$=1-5x+2x-10x^2=(1-5x)+(2x-10x^2)$

$$=(1-5x)+2x(1-5x)=(1-5x)(1+2x).$$

উদা. 3. $(a+b)^2-2(a+b)-15$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

এখানে $a+b=x$ ধরিলে রাশিটি $x^2-2x-15$ হয়;

$\therefore$ রাশিটি$=x^2-2x-15=x^2-5x+3x-15$

$$=(x^2-5x)+(3x-15)$$

$$=x(x-5)+3(x-5)=(x-5)(x+3)$$

$$=(a+b-5)(a+b+3)$$ [x-এর মান বসাইয়া]

উদা. 4. x^4-13x^2-48কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিতে হইবে।

এখানে $x^2=y$ ধরিলে, রাশিটি $y^2-13y-48$ হয়।

সুতরাং রাশিটি $=y^2-16y+3y-48=(y^2-16y)+(3y-48)$
$=y(y-16)+3(y-16)=(y-16)(y+3)$
$=(x^2-16)(x^2+3)$ [y স্থলে x^2 বসাইয়া]
$=(x+4)(x-4)(x^2+3)$.

প্রশ্নমালা 20

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর (Resolve into factors) :—

1. x^2+x-20 2. $x^2-12x+20$ 3. $x^2-8x-20$
4. $x^2-19x-20$ 5. $1-5x-36x^2$ 6. $1+5x-36x^2$
7. $x^2-12x+36$ 8. $x^2-16x-36$ 9. x^2-x-72
10. $x^2-24x-81$ 11. $x^2-20x+91$ 12. $a^2-13a-90$
13. $x^2-x-132$ 14. $x^2-7x-144$ 15. $x^2-x-156$
16. $x^2-x-420$ 17. $x^2-10xy-39y^2$
18. $a^2b^2-abc-182c^2$ 19. a^4+4a^2-5
20. x^4+2x^2-3 21. x^4-10x^2+16
22. x^6-7x^3+12 23. a^6-7a^3-60
24. $a^6b^6-a^3b^3-6$ 25. a^8-a^4-2
26. $(a+b)^2-4(a+b)-12$ 27. $1-2(a-b)-15(a-b)^2$
28. $(x+y)^2-3(x^2-y^2)-10(x-y)^2$
29. $(x+y+z)^2-7(x+y+z)(y+z)-60(y+z)^2$
30. $(2a-3b)^2-(4a^2-9b^2)-2(2a+3b)^2$
31. $(x^2+2x)^2+12(x^2+2x)-45$
32. $(x^2-3x)^2-(x^2-3x)-2$ 33. $x^2+x-(a+1)(a+2)$
34. $x^2-2ax+(a+b)(a-b)$
35. $x^2+2(a^2+b^2)x+(a^2-b^2)^2$
36. $x^2-bx-(a+3b)(a+2b)$ 37. $x^2-\left(a+\frac{1}{a}\right)x+1$
38. $(a+b)^2-5a-5b+6$.

32. ax^2+bx+c আকৃতির দ্বিমাত্রিক রাশির উৎপাদকে বিশ্লেষণ।

ax^2+bx+c রাশিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিতে হইলে মধ্যপদ অর্থাৎ x-এর সহগকে (bকে) এমন দুইটি রাশিতে বিভক্ত করিতে হইবে যেন উহাদের গুণফল হয় ac অর্থাৎ x^2এর সহগ ও x-বর্জিত পদের গুণফল। উদাহরণ দ্বারা এই প্রক্রিয়াটি পরিস্ফুট করা যাইতেছে।

উদা. 1. $10x^2-x-11$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিতে হইবে।

এখানে $ac=10\times-11$, এবং $10-11=-1$ (xএর সহগ)।

$$10x^2-x-11=10x^2+10x-11x-11$$
$$=(10x^2+10x)-(11x+11)$$
$$=10x(x+1)-11(x+1)$$
$$=(x+1)(10x-11).$$

উদা. 2. $(a-1)x^2+a^2xy+(a+1)y^2$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

এখানে $(a-1)(a+1)=a^2-1$ এবং $(a^2-1)+1=a^2$.

$\therefore$ রাশিটি $=(a-1)x^2+\{(a^2-1)+1\}xy+(a+1)y^2$
$$=(a-1)x^2+(a^2-1)xy+xy+(a+1)y^2$$
$$=(a-1)x\{x+(a+1)y\}+y\{x+(a+1)y\}$$
$$=\{x+(a+1)y\}\{(a-1)x+y\}.$$

প্রশ্নমালা 21

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর (Resolve into factors) :—

1. $4a^2+11a+6$ 2. $4a^2-2a-6$ 3. $4a^2-10a-6$
4. $5x^2-x-4$ 5. $4x^2-x-5$ 6. $8p^2-10p-7$
7. $7p^2-15p+8$ 8. $7p^2-p-8$ 9. $3-13a+10a^2$
10. $3-a-10a^2$ 11. $42l^2-41lm-20m^2$
12. $18x^2+31xy-20y^2$ 13. $4(x^2-2x)^2+11(x^2-2x)+6$
14. $5(x^2-3x)^2+19(x^2-3x)-4$
15. $5(2x^2-x)^2-(2x^2-x)-4$
16. $3(a+b)^2+10(a^2-b^2)-25(a-b)^2$
17. $7(a^2+b^2)^2-15(a^4-b^4)+8(a^2-b^2)^2$
18. $ax^2+(a^2+1)x+a$
19. $6(a+b)^2+5(a^2-b^2)-21(a-b)^2$
20. $(a-b)^2x^2+4abxy-(a+b)^2y^2$.

38. দুইটি ঘন রাশির সমষ্টি বা অন্তর :

আমরা জানি, $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

এবং $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$.

সুতরাং উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিলে হইবে

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

এবং $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

দ্রষ্টব্য : সূত্রের সাহায্য না লইয়াও নিম্নলিখিতভাবে বিশ্লেষণ করা যায়।

$$a^3+b^3=a^3+a^2b-a^2b-ab^2+ab^2+b^3$$
$$=(a^3+a^2b)-(a^2b+ab^2)+(ab^2+b^3)$$
$$=a^2(a+b)-ab(a+b)+b^2(a+b)$$
$$=(a+b)(a^2-ab+b^2)\ ;$$

এবং $a^3-b^3=a^3-a^2b+a^2b-ab^2+ab^2-b^3$
$$=a^2(a-b)+ab(a-b)+b^2(a-b)$$
$$=(a-b)(a^2+ab+b^2).$$

উদা. 1. $81a^3b^3-3$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

$$81a^3b^3-3=3(27a^3b^3-1)=3\{(3ab)^3-1^3\}$$
$$=3(3ab-1)(9a^2b^2+3ab+1).$$

উদা. 2. x^6-y^6কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিতে হইবে।

$$x^6-y^6=(x^3)^2-(y^3)^2=(x^3+y^3)(x^3-y^3)$$
$$=(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)$$
$$=(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2).$$

উদা. 3. $(a+b)^3-c^3$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

$$(a+b)^3-c^3=(a+b-c)\{(a+b)^2+(a+b)c+c^2\}$$
$$=(a+b-c)(a^2+b^2+c^2+2ab+ac+bc).$$

উদা. 4. $x^3+3x^2+3x-26$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

রাশিটি$=x^3+3.x^2.1+3.x.1^2+1^3-3^3=(x+1)^3-3^3$
$$=(x+1-3)\{(x+1)^2+(x+1).3+3^2\}$$
$$=(x-2)(x^2+2x+1+3x+3+9)$$
$$=(x-2)(x^2+5x+13).$$

প্রশ্নমালা 22

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

1. $8x^3+27$ 2. $8a^3-27$ 3. x^3+1 [C. U. '10]
4. x^3+64y^3 [C. U. '23] 5. a^3-8b^3 [C. U. '31]
6. $81x^3-24y^3$ 7. $a^3b^3-x^3y^3$ 8. $64p^3-125q^3$
9. x^4-x 10. $4x^3+108y^3$ 11. $64x^3-y^6$
12. $(x-y)^3-z^3$ 13. $(a+1)^3+(a-1)^3$
14. $(2x+3y)^3+(x-y)^3$ 15. a^6-b^6 16. $x^3-8(y-z)^3$
17. $x^3+6x^2+12x+9$ 18. $63a^3+6a^2-12a+8$
19. $a^3-9b^3+(a+b)^3$ 20. $8x^3-4x^2-2x+1.$

প্রশ্নমালা 23

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :—

1. $x^2-ax-bx+ab$
2. $a^2+bc+ca+ab$
3. $a^2bc-a-ab^2c+b$
4. $(b-c)(1+x)+(x-b)(1+c)$
5. $(b-c)(x+ay)+(a-b)(x+cy)$.
6. $x^4+4(x-1)^2-4(x^3-x^2)$
7. $1-2x+x^2-a+ax$
8. $1-2y+y^2-z^2$
9. $1+2ax-x^2+a^2x^2$
10. x^4-7x^2+9
11. $x^4-(a^2+2)x^2y^2+y^4$
12. $x^6+(x^2-2a^2)^3$
13. $a^3x+a-x-1$
14. $x(x+a)-y(y+a)$
15. $(a+b)^2(x+y)^2-(a-b)^2(x-y)^2$
16. $(ac+bd)^2-(ad+bc)^2$
17. $x(x-b)-(a^2+5ab+6b^2)$
18. a^8-20a^4+64
19. $8(x+1)^2+2(x+1)(x+2)-15(x+2)^2$
20. $(a-x)^3-(b-x)^3-3(a-b)(a-x)(b-x)$
21. $64(a^2+ab)^3+(a^2-ab)^3$
22. $a^{12}-b^{12}$
23. $x^3+9y^3+(x-y)^3$
24. $a^3+3a^2+9a+27$
25. $a^2+2ab+b^2+a+b$
26. $a^2+b(2a+b)+3(a+b)$
27. $(x^2-y^2)+3x+3y$
28. $(x+y)^3+(x+y)^2+(x+y)$.

গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক (গ. সা. গু.)
(Highest Common Factor বা H. C. F.)

34. **মৌলিক গুণনীয়ক** (Elementary factor), **সাধারণ গুণনীয়ক** (Common factor), **গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক** কাহাকে বলে তাহা এবং প্রদত্ত রাশিগুলিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিয়া তাহাদের গ. সা. গু. নির্ণয় করিবার প্রণালী তোমরা পূর্ব-শ্রেণীতে শিখিয়াছ।

গ. সা. গু. নির্ণয় প্রণালী :

(1) রাশিগুলিকে প্রথমতঃ উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিতে হইবে।

(2) সাধারণ মৌলিক গুণনীয়কগুলির যে সর্বোচ্চ শক্তি প্রদত্ত রাশিগুলিকে সম্পূর্ণভাবে ভাগ করে, তাহাদের গুণফলই গ. সা. গু. হইবে।

(3) রাশিগুলির সাংখ্য-সহগগুলির গ. সা. গু.-ই নির্ণেয় গ. সা. গু.-র সাংখ্য-সহগ হইবে।

উদা. 1. $16a^2b^3x^4y^5$, $40a^3b^2x^3y^4$, $24a^5b^5x^6y^4$এর গ. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইবে।

16, 40, ও 24এর গ. সা. গু.=8.

a, b, x, y সাধারণ মৌলিক গুণনীয়ক ; ইহাদের যে যে উচ্চতম শক্তি রাশিগুলিকে নিঃশেষে ভাগ করে, তাহারা হইতেছে, a^2, b^2, x^3, y^4.

$\therefore$ নির্ণেয় গ. সা. গু.$=8a^2b^2x^3y^4$.

উদা. 2. x^3-5x^2+6x, x^3+4x^2-12x, x^3-9x^2+14xএর গ. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইবে।

প্রথম রাশি$=x(x^2-5x+6)=x(x-2)(x-3)$

দ্বিতীয় রাশি$=x(x^2+4x-12)=x(x-2)(x+6)$

তৃতীয় রাশি$=x(x^2-9x+14)=x(x-2)(y-7)$

$\therefore$ নির্ণেয় গ. সা. গু.$=x(x-2)$.

প্রশ্নমালা 24

নিম্নরাশিগুলির গ. সা. গু. নির্ণয় কর :—

1. $3a^2b^3c^2$, $6a^5b^3c^4$, $18a^4b^3c^2$ 2. $a^2(b+c)^2$, $a^3(b+c)$
3. $3(a+b)^3(c+d)^2$, $4(a+b)^2(c+d)^3$
4. a^3-ab^2, $ac-bc$
5. $(a^2-b^2)(b^2-c^2)$, $(a^3-b^3)(b^3-c^3)$
6. $(a-b)^2(a+b)^2$, a^2-b^2
7. (x^2-y^2), $(x-y)^3$ এবং x^3-y^3
8. $3(x+y)^3$, $6(x+y)^2$, $9(x^2-y^2)$
9. x^3-y^3, $x^3-x^2y+xy^2-y^3$
10. $ax^2-(a+1)x+1$, $bx^2-(b-1)x-1$
11. x^2-y^2, x^3-y^3, $3x^2-5xy+2y^2$
12. x^2-2x-3, x^2+5x+4, x^2+7x+6
13. x^3-3x^2-10x, x^3+6x^2+8x, $x^4-5x^3-14x^2$
14. $a^2+b^2-c^2+2ab$, $a^2-b^2-c^2+2bc$.

লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক (ল. সা. গু.)
(Lowest Common Multiple বা L. C. M.)

35. **গুণিতক** (Multiple), **সাধারণ গুণিতক** (Common multiple), **লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক** (Lowest common multiple or L. C. M. অর্থাৎ ল. সা. গু.) কাহাকে বলে তাহা এবং উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিয়া ল. সা. গু. নির্ণয় প্রণালী তোমরা পূর্ব-শ্রেণীতে শিখিয়াছ।

36. ল. সা. গু. নির্ণয় পদ্ধতি।

প্রত্যেক রাশিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিয়া, উক্ত উৎপাদকগুলির প্রত্যেকটির যে মাত্রা রাশিগুলির মধ্যে সর্বোচ্চ তাহাদের গুণফলই রাশিগুলির ল. সা. গু. হইবে। সাংখ্য-সহগগুলির ল. সা. গু.-ই নির্ণেয় ল. সা. গু-র সাংখ্য-সহগ হইবে।

উদা. 1. $5x^3y^2z$, $10x^4y^3z^2$, $15y^3z$এর ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

5, 10, 15-এর ল. সা. গু.$=30$. x^3, x^4-এর ল. সা. গু.$=x^4$;

y^2, y^3, y^3-এর ল. সা. গু.$=y^3$.; z, z^2, z-এর ল. সা. গু.$=z^2$.

$\therefore$ নির্ণেয় ল. সা. গু.$=30\times x^4\times y^3\times z^2=30x^4y^3z^2$.

উদা. 2. x^2-x-2, x^2+x-6 এবং x^2-2x+1-এর ল. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইবে।

প্রথম রাশি$=x^2-2x+x-2=x(x-2)+(x-2)=(x-2)(x+1)$,

দ্বিতীয় রাশি$=x^2+3x-2x-6=x(x+3)-2(x+3)=(x+3)(x-2)$,

তৃতীয় রাশি$=x^2-2x+1=(x-1)^2$.

$\therefore$ নির্ণেয় ল. সা. গু.$=(x-2)(x+1)(x+3)(x-1)^2$.

প্রশ্নমালা 25

নিম্নরাশিগুলির ল. সা. গু. নির্ণয় কর :—

1. $6a^2bc$, $8abc^2$ 2. $15a^2c^2(a-c)$, $20ac(a-c)^2$
3. $(a-b)^2$, $(a+b)^2$, (a^3+b^3)
4. x^4-y^4, x^3-y^3, $(x-y)^3$
5. $(x+y)(y+z)$, $(y+z)(z+x)$, $(z+x)(x+y)$
6. $(x+1)(x+2)$, $(x+2)(x+3)$, $(x+3)(x+4)$
7. $ab-bx-ay+xy$ এবং $ab-bx+ay-xy$
8. x^6-y^6, $x^8+x^4y^4+y^8$ 9. a^2-1, a^3-1, a^2+a-2
10. a^2-b^2, a^3-b^3, $3a^2-5ab+2b^2$
11. $x^2+(a-b)x-ab$, $x^2+(a+b)x+ab$
12. $a^2-b^2-c^2-2bc$, $b^2-c^2-a^2-2ca$
13. x^3+y^3, x^3-y^3, $x^4+x^2y^2+y^4$
14. $2a^2-5a+3$, $4a^2-4a-3$, $3a^2-a-2$
15. $3(x^2+xy)$, $8(xy-y^2)$, $5(x^2-y^2)$
16. x^2-3x+2, x^3-4x, $x^4+x^3-6x^2$ [C. U. '36]
17. x^3-3x^2+x-3, x^4+6x^2+5
18. $a^2-b^2-c^2+2bc$, $(a+b-c)^2$, $a^2+c^2-b^2+2ac$. [C.U.'40]

জটিল রাশিমালার গ. সা. গু. এবং ল. সা. গু.

37. যে সকল রাশিমালা সহজে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যায় না, তাহাদের গ. সা. গু. পাটীগণিতের ন্যায় ভাগক্রিয়া দ্বারা নির্ণয় করিতে হয়। নিম্নে ভাগক্রিয়ার অন্তর্নিহিত সূত্রটির ব্যাখ্যা করা যাইতেছে।

38. যদি X ও Y দুইটি রাশিমালার Xকে Y দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফল Q এবং ভাগশেষ R হয়, তাহা হইলে $X=YQ+R$ হইবে। X, Y, Q, R অখণ্ড মূলদ রাশিমালা। এখন এই $X=YQ+R$ হইলে X ও Yএর গ. সা. গু. এবং Y ও Rএর গ. সা. গু. একই হইবে।

(1) মনে কর X ও Yএর গ. সা. গু. H. তাহা হইলে H দ্বারা X ও Y বিভাজ্য; সুতরাং $X=aH$ এবং $Y=bH$, a ও bএর কোন সাধারণ গুণনীয়ক নাই।

∴ $X=YQ+R$এ X ও Yএর মান বসাইলে পাই $aH=bHQ+R$,

∴ $R=aH-bHQ=H(a-bQ)$. H হইল Rএর গুণনীয়ক।

(2) আবার মনে কর, Y ও Rএর গ. সা. গু. H′. তাহা হইলে $Y=a'H'$ এবং $R=b'H'$, a' ও b'এর সাধারণ গুণনীয়ক নাই;

∴ $X=a'H'Q+b'H'=H'(a'Q+b')$;

∴ H′ হইল Xএর গুণনীয়ক।

সুতরাং (1) হইতে X ও Yএর সাধারণ গুণনীয়ক Rএরও গুণনীয়ক।

এবং (2) হইতে Y ও Rএর সাধারণ গুণনীয়ক Xএরও গুণনীয়ক।

অতএব, প্রমাণিত হইল X ও Yএর গ. সা. গু. এবং Y ও Rএর গ. সা. গু. একই।

নিয়ম: দুইটি রাশির একটি দ্বারা অপরটিকে ভাগ করিলে যে ভাগশেষ থাকিবে, তাহা দ্বারা প্রথম (ভাজক) রাশিকে আবার ভাগ করিতে হইবে; এই ভাগক্রিয়ার যে ভাগশেষ থাকিবে তাহা দ্বারা প্রথম ভাগশেষকে ভাগ করিতে হইবে। এইরূপে অগ্রসর হইয়া যখন ভাগশেষ থাকিবে না তখন শেষ ভাগশেষ অর্থাৎ শেষ ভাজকটিই উভয় রাশির গ. সা. গু. হইবে।

[**দ্রষ্টব্য:** প্রতি ভাগক্রিয়ার ভাজক ও ভাজ্যকে মূলরাশির সাধারণ নয় এমন যে কোন সংখ্যা দ্বারা ভাগ বা গুণ করা যাইতে পারে; তাহাতে **স্পষ্টতঃ** গ. সা. গু.-র কোন পরিবর্তন হয় না।]

উদাহরণ 1. $x^3+7x^2+14x+8$ এবং $x^3+6x^2+11x+6$এর গ. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইবে।

এখানে দুইটি রাশিই x-এর ঘাত অনুসারে সাজান আছে। মনে কর; প্রথমটি X এবং দ্বিতীয়টি Y; এবং মনে কর Xকে Y দ্বারা ভাগ করিলে ভাগশেষ হয় R_1.

$$\begin{array}{r|l}
\text{(Y)} & \text{(X)} \\
x^3+6x^2+11x+6 & x^3+7x^2+14x+8 \;(\,1 \\
 & \underline{x^3+6x^2+11x+6} \\
 & x^2+\;3x+2 \cdots (R_1)
\end{array}$$

এখন উপরি-উক্ত প্রতিজ্ঞা অনুসারে X ও Yএর গ. সা. গু. এবং Y ও R_1-এর গ. সা. গু. একই। এইবার Yকে R_1 দিয়া ভাগ করিলে পাই

$$\begin{array}{r|l}
x^2+3x+2 & x^3+6x^2+11x+6 \;(\,x+3 \\
 & \underline{x^3+3x^2+\;2x} \\
 & \quad 3x^2+\;9x+6 \\
 & \quad \underline{3x^2+\;9x+6}
\end{array}$$

এখানে দেখা গেল (R_1) অর্থাৎ x^2+3x+2 হইল Yএর গুণনীয়ক;

$\therefore$ নির্ণেয় গ. সা. গু. হইল x^2+3x+2.

উদা. 2. $3x^4+7x^3-14x^2-24x$ এবং $6x^4-10x^3-24x^2$এর গ. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইবে।

প্রথম রাশি$=x(3x^3+7x^2-14x-24)$

দ্বিতীয় রাশি$=2x^2(3x^2-5x-12)$

$\therefore$ উভয় রাশির গ. সা. গু.-র একটি গুণনীয়ক হইল x ও $2x^2$এর গ. সা. গু. x. এখন বন্ধনীভুক্ত রাশি দুইটির গ. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইবে।

$$\begin{array}{r|r|r|l}
x-3 & 3x^2-5x-12 & 3x^3+\;7x^2-14x-24 & x+4 \\
 & \underline{3x^2+4x} & \underline{3x^3-\;5x^2-12x} & \\
 & -9x-12 & 12x^2-\;2x-24 & \\
 & -9x-12 & 12x^2-20x-48 & \\
 & & 6\;\big|\;18x+24 & \\
 & & 3x+\;4 &
\end{array}$$

$\therefore$ নির্ণেয় গ. সা. গু.$=x(3x+4)$.

উদা. 3. $2x^3-10x^2+20x-16$ এবং $3x^3-12x^2+21x-18$এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

এখানে, প্রথম রাশিকে 3 দ্বারা ও দ্বিতীয় রাশিকে 2 দ্বারা গুণ করিয়া ভাগক্রিয়া করিতে হইবে; ইহাতে ভাগফলে বা ভাগশেষে ভগ্নাংশ সাংখ্য-সহগ

থাকিবে না ; আবার যেহেতু, 2 বা 3 কোন রাশিরই গুণনীয়ক নহে, সেজন্য ইহাদের গ. সা. গু. অপরিবর্তিতই থাকিবে।

প্রথম রাশি $\times 3 = 6x^3 - 30x^2 + 60x - 48$
দ্বিতীয় রাশি $\times 2 = 6x^3 - 24x^2 + 42x - 36$

$$
\begin{array}{r|l}
6x^3-30x^2+60x-48 & 6x^3-24x^2+42x-36 \;(1 \\
 & 6x^3-30x^2+60x-48 \\ \hline
 & 6 \,|\, 6x^2-18x+12 \\ \hline
 & \quad x^2-3x+2 \cdots (R_1)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
x^2-3x+2 & 6x^3-30x^2+60x-48 \;(6x-12 \\
 & 6x^3-18x^2+12x \\ \hline
 & -12x^2+48x-48 \\
 & -12x^2+36x-24 \\ \hline
 & 12 \,|\, 12x-24 \\ \hline
 & \quad x-2
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
x-2 & x^2-3x+2 \;(x-1 \\
 & x^2-2x \\ \hline
 & -x+2 \\
 & -x+2 \\ \hline
\end{array}
$$

$\therefore$ নির্ণেয় গ. সা. গু. $= x - 2$.

[**দ্রষ্টব্য :** প্রথম ভাগশেষ R_1কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিলে $(x-2)(x-1)$ হয় ; এখন, প্রথম রাশিতে $x=2$ বসাইলে উহা 0 হয় এবং $x=1$ বসাইলে 0 হয় না ; সুতরাং $x-2$-ই গ. সা. গু. হইবে। সুতরাং ভাগশেষ সম্পূর্ণ না করিয়াও গ. সা. গু. নির্ণয় করা যায়।]

39. তিন বা ততোধিক রাশিমালার গ. সা. গু. নির্ণয়।

নিয়ম : যে কোন দুইটি রাশির গ. সা. গু. নির্ণয় কর ; এই গ. সা. গু. এবং তৃতীয় রাশির গ. সা. গু. নির্ণয় কর ; এইরূপে অগ্রসর হইয়া শেষ রাশির সহিত পূর্ববর্তী সমস্ত রাশির গ. সা. গু.-টির যে গ. সা. গু. পাইবে তাহাই প্রদত্ত সকল রাশির গ. সা. গু. হইবে। নিম্নে উদাহরণ প্রদত্ত হইল।

উদা. 4. $2x^3+7x^2-5x-4$, $x^3+8x^2+11x-20$ এবং $2x^3+19x^2+49x+20$, ইহাদের গ. সা. গু. কত ?

প্রথমে প্রথম ও দ্বিতীয় রাশির গ. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইবে ;

$$
\begin{array}{r|l|l}
x^3+8x^2+11x-20 & 2x^3+7x^2-5x-4 & 2 \\
 & 2x^3+16x^2+22x-40 & \\ \hline
-9 & -9x^2-27x+36 & \\
 & x^2+3x-4 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l|l}
x^2+3x-4 & x^3+8x^2+11x-20 & x+5 \\
 & x^3+3x^2-4x & \\ \hline
 & 5x^2+15x-20 & \\
 & 5x^2+15x-20 & \\ \hline
\end{array}
$$

$\therefore$ প্রথম দুইটি রাশির গ. সা. গু. হইল x^2+3x-4.

এখন, এই গ. সা. গু. এবং তৃতীয় রাশির গ. সা. গু. নির্ণয় করিলে যাহা হইবে, তাহাই তিনটি রাশির গ. সা. গু. হইবে।

$$
\begin{array}{r|l|l|l}
x-1 & x^2+3x-4 & 2x^3+19x^2+49x+20 & 2x+13 \\
 & x^2+4x & 2x^3+6x^2-8x & \\ \hline
 & -x-4 & 13x^2+57x+20 & \\
 & -x-4 & 13x^2+39x-52 & \\ \hline
 & & 18 \mid 18x+72 & \\
 & & x+4 &
\end{array}
$$

$\therefore$ নির্ণেয় গ. সা. গু. $=x+4$.

উদা. 5. যদি x^2+px+q ও $x^2+p'x+q'$এর গ. সা. গু. $x+a$ হয়, তবে দেখাও যে, $(p-p')a=q-q'$. [C. U. 1911]

$\because$ $x+a$ প্রদত্ত রাশি দুইটির গ. সা. গু.,

$\therefore$ উহা দুইটি রাশিরই উৎপাদক (factor) ; সুতরাং উহার মান 0 হইলে রাশি দুইটির মান শূন্য হইবে। এখন দেখ, $x=-a$ হইলে $x+a=0$ হয়, সুতরাং xএর মান $-a$ বসাইলে রাশি দুইটিও শূন্য হইবে।

অতএব, $a^2-ap+q=0 \cdots\cdots(1)$

এবং $a^2-ap'+q'=0 \cdots\cdots(2)$

$\therefore$ (বিয়োগ) $-ap+ap'+q-q'=0$, বা, $-a(p-p')=-(q-q')$

$\therefore$ $a(p-p')=q-q'$.

প্রশ্নমালা 26

নিম্নরাশিগুলির গ. সা. গু. নির্ণয় কর :—

1. $2x^3+x^2-5x-3$ এবং $8x^3+6x^2-21x-18$. [C. U. 1913]
2. x^2-2x-3 ও x^3-2x^2-2x-3. [C. U. 1915]
3. $3x^2-11x-4$ ও $6x^3-25x^2+3$. [C. U. 1916]

4. $2x^3-7x^2-46x-21$ ও $2x^4+11x^3-13x^2-99x-45$. [C. U. 1920 ; D. B. 1927]

5. $x^3+6x^2+2x-15$ ও $x^3+5x^2-2x-10$. [C. U. 1923]

6. x^3-3x-2 এবং x^3-4x^2+6x-4. [C. U. 1924]

7. x^2-x-2, x^3+1 এবং $(x+1)^2$. [C. U. 1926]

8. $x^4+2x^3+3x^2+11x+10$ ও $x^5+2x^3+5x^2-3x-5$. [C. U. 1934]

9. $x^3+6x^2+11x+6$ ও $x^3+8x^2+19x+12$. [C. U. 1948]

10. $2b^2+ab-a^2$ এবং $a^3-a^2b-4ab^2+4b^3$. [C. U. 1936]

11. $2x^3-3x^2-17x-12$ ও $3x^3-7x^2-18x-8$. [C. U. 1937 ; D. B. 1935]

12. $2x^2+18x+28$ ও $x^3+10x^2+24x+16$. [C. U. 1933]

13. $2x^4-6x+40$ ও $15x^4-9x^3+192$. [C. U. 1939]

14. x^5-x^2-4x-2 ও $x^5+3x^4-x^3-7x^2-5x-1$. [C. U. 1942]

15. x^3+4x^2+4x+3 এবং $x^3+8x^2+21x+18$. [C. U. 1943]

16. x^3+3x^2-9x+5 এবং $x^3-19x+30$. [C. U. 1944]

17. $2x^2-x-1$ এবং $3x^3-7x^2+4$. [C. U. 1945]

18. $2x^5-10x^3-4x^2$ এবং $6x^4-15x^3+3x$.

19. a^3+4a^2+4a+1, $a^4+3a^3+2a^2+3a+1$ এবং a^3+5a^2+7a+2.

20. x^4-5x^2+4 ও $x^5-11x+10$. [D. B. 1932]

21. x^3-3x-2 ও x^3-4x^2+6x-4. [D. B. 1934]

22. $2x^5-11x^2-9$ ও $4x^5+11x^4+81$. [D. B. 1936]

23. $3x^3-13x^2+23x-21$ ও $6x^3+x^2-44x+21$. [D. B. 1939]

24. x^3-3x^2+4x-2 ও x^3+2x^2-4x+1. [D. B. 1940]

25. a^3-1 এবং a^7-1. [D. B. 1941]

26. $3x^3-5x^2+5x-2$ ও $2x^4-2x^3+3x^2-x+1$. [P. U. 1930]

27. $4x^4-12x^2-8x$ এবং $6x^4-24x^3+30x^2-12x$.

28. যদি bx^2+cx+d ও $b_1x^2+c_1x+d$এর গ. সা. গু. $x-a$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $a(b-b_1)=c_1-c$.

লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক (ল. সা. গু.)

40. পূর্বে বলা হইয়াছে যে, দুই বা ততোধিক রাশির ল. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইলে প্রত্যেক রাশির উৎপাদকগুলি নির্ণয় করিয়া যত প্রকারের উৎপাদক হইল (তাহা সকলের সাধারণ উৎপাদক হউক বা না হউক) সেইগুলির গুণফল ল. সা. গু. হইবে। যদি একই রকমের উৎপাদকের বিভিন্ন ঘাত (power) থাকে, তবে কেবল বৃহত্তম ঘাতটি লইতে হইবে।

41. গ. সা. গু -এর সাহায্যে ল. সা. গু. নির্ণয়।

যদি রাশিগুলিকে সহজে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা না যায়, তবে গ. সা. গু.-র সাহায্যে ল. সা. গু. নির্ণয় করিবে।

মনে কর, X ও Y দুইটি রাশির গ. সা. গু. H এবং X ও Yকে H দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফল যথাক্রমে q ও p হয়। এখানে অবশ্যই q ও pএর কোন সাধারণ উৎপাদক থাকিতে পারে না।

$$\therefore \quad X=qH \text{ এবং } Y=pH.$$

$$\therefore \quad X \text{ ও } Y\text{-এর ল. সা. গু.}=q\times p\times H=\frac{qH\times pH}{H}=\frac{X.Y}{H}$$

$$=\frac{X}{H}.Y, \quad \text{বা,} \quad \frac{Y}{H}.X.$$

অতএব, দেখা গেল যে, দুইটি রাশির গুণফল উহাদের গ. সা. গু. ও ল. সা. গু.-র গুণফলের সমান।

∴ ল. সা. গু. নির্ণয়ের একটি নিয়ম হইল :—

প্রথমে দুইটি রাশির গ. সা. গু. নির্ণয় করিয়া ঐ গ. সা. গু. দ্বারা উহাদের একটি রাশিকে ভাগ করিবে এবং ঐ ভাগফলকে অন্য রাশি দ্বারা গুণ করিয়া যে গুণফল পাইবে তাহাই নির্ণেয় ল. সা. গু. হইবে। যদি তিনটি রাশি থাকে, তবে প্রথমে দুইটি রাশির ঐরূপে ল. সা. গু. নির্ণয় করিয়া পরে ঐ ল. সা. গু. এবং তৃতীয় রাশির ঐ ভাবে আবার ল. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইবে।

উদাহরণ। $x^3-16x+24$ ও $2x^3-5x^2+4$ এর ল. সা. গু. কত ?

[C. U. '33]

$$
\begin{array}{l}
x^3-16x+24\ )\ 2x^3-5x^2\qquad +4\ (\ 2 \\
\qquad\qquad\qquad\quad 2x^3\qquad -32x+48 \\
\qquad\qquad\quad -\ |\ \overline{-5x^2+32x-44} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 5x^2-32x+44\ )\ x^3\qquad -16x+24\ (\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 5 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \overline{5x^3\qquad -80x+120}\ (\ x \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 5x^3-32x^2+44x \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \overline{32x^2-124x+120} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 5 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \overline{160x^2-\ 620x+\ 600}\ (\ 32 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 160x^2-1024x+1408 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 404\ |\ \overline{404x-\ 808} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad x-2
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
x-2\ )\ 5x^2-32x+44\ (\ 5x-22 \\
\qquad\quad 5x^2-10x \\
\qquad\quad \overline{\quad -22x+44} \\
\qquad\qquad -22x+44
\end{array}
$$

$\therefore$ গ. সা. গু.$=x-2$.

$$\therefore \text{ নির্ণেয় ল. সা. গু.}=\frac{(x^3-16x+24)(2x^3-5x^2+4)}{(x-2)}$$

$$=(x^2+2x-12)(2x^3-5x^2+4).$$

[বিবিধ]

উদাহরণ 1. দুইটি রাশির গ. সা. গু. এবং ল. সা. গু. যথাক্রমে a^2-a-2 ও a^4-5a+4 এবং একটি রাশি a^3+a^2+a-4 ; অন্য রাশিটি নির্ণয় কর।

দুইটি রাশির গুণফল=উহাদের গ. সা.গু. $\times$ ল. সা. গু.

এখানে রাশি দুইটির গুণফল$=(a^2-a-2)(a^4-5a+4)$

এবং একটি রাশি$=a^3+a^2+a-4$.

$$\therefore \text{ নির্ণেয় অন্য রাশি}=\frac{(a^2-a-2)(a^4-5a+4)}{(a^3+a^2+a-4)}$$

$$=(a^2-a-2)(a-1)=a^3-2a^2-a+2.$$

উদা. 2. যদি X ও Y যথাক্রমে a ও bএর গ. সা. গু. ও ল. সা. গু. হয় এবং $X-Y=a-b$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে $X^3-Y^3=a^3-b^3$.

$\because$ গ. সা. গু. $\times$ ল. সা. গু.=সংখ্যা দুইটির গুণফল, $\therefore$ $XY=ab$.

অতএব, $X^3-Y^3=(X-Y)^3+3XY(X-Y)$

$$=(a-b)^3+3ab(a-b)=a^3-b^3.$$

উদা. 3. $x+1, x^2+1$ এবং x^2-x+1এর ল. সা. গু. কত ?

এখানে কোন রাশিরই উৎপাদক (factor) হয় না, সুতরাং উহাদের গুণফলই নির্ণেয় ল. সা. গু. হইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় ল. সা. গু.$=(x+1)(x^2+1)(x^2-x+1)=(x^3+1)(x^2+1)$.

উদা. 4. দুইটি দ্বিঘাত রাশির গ. সা. গু. ও ল. সা. গু. যথাক্রমে $a+1$ ও a^3+2a^2-a-2 ; রাশি দুইটি নির্ণয় কর।

এখানে গ. সা. গু.$=a+1$,

এবং ল. সা. গু.$=a^3+2a^2-a-2=a^2(a+2)-1(a+2)$

$$=(a^2-1)(a+2)=(a+1)(a-1)(a+2).$$

দেখা যাইতেছে যে, গ. সা. গু. $(a+1)$ ভিন্ন ল. সা. গু.-টির অপর দুইটি উৎপাদক $a-1$ ও $a+2$. অতএব নির্ণেয় রাশিদ্বয় $(a+1)(a-1)$ এবং $(a+1)(a+2)$ অর্থাৎ a^2-1 ও a^2+3a+2.

[**দ্রষ্টব্য :** একটি রাশি $(a+1)$ এবং অন্য রাশিটি $(a+1)(a-1)(a+2)$ হইতে পারিত, কিন্তু দ্বিতীয়টিতে a^3 বা a-এর ত্রিঘাত হইত, প্রশ্নে বলা আছে রাশি দুইটিতে a-এর দ্বিঘাতের অধিক নাই। সেজন্য ঐ রাশিটি ধরা হইবে না।]

প্রশ্নমালা 27

ল. সা. গু. নির্ণয় কর :—

1. x^2-4, x^2-x-2 ও x^2+x-2. [C. U. 1910]
2. $2x^2-x-1, 2x^2+3x+1$ ও x^2-1. [C. U. 1912]
3. $x^2-(a-c)x-ac$ ও $x^2-(a+c)x+ac$. [C. U. 1928]
4. x^2-3x+2, x^2-4x+3 এবং x^2-5x+6. [C. U. 1922 ; D. B. 1929]
5. a^2+6a+8, a^2+5a+6 ও a^3+4a^2+4a+3. [C. U. '34]
6. $x^2-12x+35, x^2-8x+7$ ও x^3-5x^2-x+5. [C. U. '35]
7. x^2-3x+2, x^3-4x এবং $x^4+x^3-6x^2$. [C. U. '36]
8. $a^2-3a+2, (a-1)^2$ এবং a^4-1. [C. U. '38]
9. $a^2-b^2-c^2+2bc, (a+b-c)^2, a^2-b^2+c^2+2ac$. [C. U. '40]
10. $8x^3+27, 16x^4+36x^2+81$ ও $7x^2-5x-6$. [D. B. '26]
11. $4x^2+8x-12, 9x^2-9x-54$ এবং $6x^4-30x^2+24$. [D. B. '39]

12. $6x^2-x-1$, $3x^2+7x+2$ ও $2x^2+3x-2$. [C. U. '26]

13. $x^2(x^2-4)$ এবং $x^4+2x^3-8x^2$. [W. B. S. F. '52]

14. $x-2$, x^2+2 এবং x^2+x+1.

15. দুইটি রাশির গ. সা. গু. ও ল. সা. গু. যথাক্রমে $x+1$ ও $x^3+6x^2+11x+6$ এবং একটি রাশি x^2+3x+2 হইলে অপর রাশিটি নির্ণয় কর।

16. x ও y বীজগণিতীয় রাশিদ্বয়ের গ. সা. গু. ও ল. সা. গু. যথাক্রমে h ও l. যদি $h+l=x+y$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $h^3+l^3=x^3+y^3$. [P. U.]

17. দুইটি দ্বিঘাত রাশির গ. সা. গু. এবং ল. সা. গু. যথাক্রমে $(x-1)$ এবং $(x-1)(x+1)(x+3)$; ঐ রাশি দুইটি নির্ণয় কর। [D. B. '37 Addl.]

সহজ ভগ্নাংশ (Easy Fraction)

42. a ও bর যে কোন মানেই $\frac{a}{b}$ একটি ভগ্নাংশ। ইহার অর্থ $a \div b$, অথবা কোন রাশির b ভাগের a ভাগ, অর্থাৎ $\frac{1}{b} \times a$. এই $\frac{a}{b}$ ভগ্নাংশটি এমন যে $\frac{a}{b} \times b = a$, কারণ কোন রাশিকে b ভাগ করিয়া ঐ ভাগগুলি সব লইলে উক্ত রাশিটিই লওয়া হয়। ভগ্নাংশ $\frac{a}{b}$-র a-কে বলে **লব** (numerator) এবং bকে বলে **হর** (denominator)।

43. কোন ভগ্নাংশের লব ও হরকে সমান সমান রাশিদ্বারা গুণ বা ভাগ করিলে ভগ্নাংশের মানের কোন পরিবর্তন হয় না।

যদি a, b, x তিনটি রাশি হয়, তবে $\frac{a}{b}=\frac{ax}{bx}$ হইবে এবং $\frac{a}{b}=\frac{a \div x}{b \div x}$ হইবে।

(1) যেহেতু $\frac{a}{b} \times b = a$, $\therefore$ $\frac{a}{b} \times b \times x = a \times x$, $\therefore$ $\frac{a}{b}=\frac{a \times x}{b \times x}$.

(2) আবার $\because$ $\frac{a}{b} \times b = a$, $\because$ $\frac{a}{b} \times b \div x = a \div x$, $\therefore$ $\frac{a}{b}=\frac{a \div x}{b \div x}$.

44. লব ও হরের চিহ্ন অনুযায়ী ভগ্নাংশের চিহ্ন হয়।

$$\frac{a}{b}=\frac{a\times -1}{b\times -1}=\frac{-a}{-b},$$

সুতরাং ভগ্নাংশের লব ও হরের একই চিহ্ন হইলে ভগ্নাংশের চিহ্ন হইবে (+) ধনাত্মক এবং বিপরীত চিহ্ন হইলে ভগ্নাংশের চিহ্ন হইবে (−) ঋণাত্মক।

অর্থাৎ, $\frac{+a}{+b}=+\frac{a}{b}$, $\frac{-a}{-b}=+\frac{a}{b}$, $\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b}$, $\frac{a}{-b}=-\frac{a}{b}$.

45. ভগ্নাংশের লঘিষ্ঠ আকার :

যখন ভগ্নাংশের লব ও হর উভয়ের সাধারণ কোন গুণনীয়ক থাকে না, তখনই ভগ্নাংশটির লঘিষ্ঠ আকার হয়। সুতরাং কোন ভগ্নাংশকে লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত করিতে হইলে, ইহার লব ও হরকে উভয়ের গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক দ্বারা ভাগ করিতে হইবে। যেমন, $\frac{ma}{mb}=\frac{ma\div m}{mb\div m}=\frac{a}{b}$.

পাটীগণিতে ভগ্নাংশের কাটাকুটির অন্তর্নিহিত অর্থ ইহাই। সুতরাং নিয়ম হইল এই, ভগ্নাংশের লব ও হরকে উহাদের মৌলিক উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিয়া উভয়ের সাধারণ উৎপাদকগুলি পরস্পর কাটিয়া দিলেই ভগ্নাংশটি লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত হইবে।

উদাহরণ 1. $\frac{25a^3b^4c^5}{75a^2b^5c^6}$কে লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত করিতে হইবে।

প্রদত্ত ভগ্নাংশ$=\frac{5\times 5\times a^3\times b^4\times c^5}{5\times 5\times 3\times a^2\times b^5\times c^6}=\frac{a}{3bc}$.

উদা. 2. $\frac{(x^2-2x-15)(x^2-x-2)}{(x^2-x-12)(x^2-4x+4)}$কে লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত কর।

লব ও হর উভয়কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিলে,

$$\text{প্রদত্ত ভগ্নাংশ}=\frac{(x+3)(x-5)(x-2)(x+1)}{(x+3)(x-4)(x-2)(x-2)}$$
$$=\frac{(x-5)(x+1)}{(x-4)(x-2)}=\frac{x^2-4x-5}{x^2-6x+8}.$$

প্রশ্নমালা 28

লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত কর (Reduce to lowest terms.) :

1. $\frac{18a^3b^2c^3d^3}{27a^5b^2c^3d}$ 2. $\frac{x^2-y^2}{x^3-y^3}$ 3. $\frac{(a-b)^2}{a^2-b^2}$

4. $\frac{(a^2-b^2)^2}{(a+b)^3}$ 5. $\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$ 6. $\frac{a^3+b^3}{(a+b)^2}$

7. $\dfrac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2}$

8. $\dfrac{9x^2-4y^2}{2y-3x}$

9. $\dfrac{3ax-12ax^3}{3ax(1-2x)}$

10. $\dfrac{4x^3-2x^2}{2x^2-3x+1}$

11. $\dfrac{5ax^3-10ax^2}{x^2-x-2}$

12. $\dfrac{a^2+2a-8}{a^3+a^2-12a}$

13. $\dfrac{x^2-2xy-15y^2}{x^2-9xy+20y^2}$

14. $\dfrac{a^4+a^2b^2+b^4}{a^2+ab+b^2}$

15. $\dfrac{x^4+x^2y^2+y^4}{x^3+y^3}$

16. $\dfrac{3x^2-x-2}{3x^2+5x+2}$

17. $\dfrac{a^4-a^3-a+1}{a^4+a^3-a-1}$

18. $\dfrac{x^3-y^3}{x^4+x^3y-xy^3-y^4}$

19. $\dfrac{x^2-(y+z)^2}{(x+y)^2-z^2}$

20. $\dfrac{a^4+a^2b^2+b^4}{(a^3+b^3)(a^3-b^3)}$.

46. ভগ্নাংশগুলিকে লঘিষ্ঠ সাধারণ হরবিশিষ্ট করিবার প্রণালী।

নিয়ম : প্রথমতঃ ভগ্নাংশগুলির হরসমূহের ল. সা. গু. নির্ণয় কর। এই ল. সা. গু. প্রত্যেকটি ভগ্নাংশের হর হইবে। তারপর ল. সা. গু.-কে প্রত্যেকটি ভগ্নাংশের হর দ্বারা ভাগ করিয়া ভাগফল দ্বারা লবকে গুণ কর। এই গুণফলই পরিবর্তিত ভগ্নাংশের লব হইবে।

উদা. 1. $\dfrac{(a-x)}{a^2(a+x)}$, $\dfrac{a+x}{x^2(a-x)}$, $\dfrac{x^2-1}{ax(x^2-a^2)}$ কে লঘিষ্ঠ সাধারণ হরবিশিষ্ট কর।

হরগুলির ল. সা. গু.$=a^2x^2(a^2-x^2)$.

এখন, $a^2x^2(a^2-x^2)\div a^2(a+x)=x^2(a-x)$,

$a^2x^2(a^2-x^2)\div x^2(a-x)=a^2(a+x)$,

$a^2x^2(a^2-x^2)\div ax(x^2-a^2)=-ax$;

$$\therefore \quad \frac{a-x}{a^2(a+x)}=\frac{x^2(a-x)^2}{a^2x^2(a^2-x^2)},$$

$$\frac{a+x}{x^2(a-x)}=\frac{a^2(a+x)^2}{a^2x^2(a^2-x^2)},$$

এবং $$\frac{x^2-1}{ax(x^2-a^2)}=\frac{-ax(x^2-1)}{a^2x^2(a^2-x^2)}.$$

উদা. 2. $\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}$, $\frac{b^2}{(b-c)(b-a)}$, $\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$কে লঘিষ্ঠ সাধারণ হরবিশিষ্ট কর।

$$(a-b)(a-c)=-(a-b)(c-a),$$
$$(b-c)(b-a)=-(b-c)(a-b),$$
$$(c-a)(c-b)=-(c-a)(b-c),$$

∴ ইহাদের ল. সা. গু.$=(b-c)(c-a)(a-b)$; এই ল. সা. গু.-কে হরগুলি দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফল যথাক্রমে $-(b-c)$, $-(c-a)$, $-(a-b)$ হয় ; সুতরাং লঘিষ্ঠ সাধারণ হরবিশিষ্ট করিলে ভগ্নাংশগুলি হইবে যথাক্রমে

$$\frac{-a^2(b-c)}{(b-c)(c-a)(a-b)},\ \frac{-b^2(c-a)}{(b-c)(c-a)(a-b)},\ \frac{-c^2(a-b)}{(b-c)(c-a)(a-b)}.$$

প্রশ্নমালা 29

লঘিষ্ঠ সাধারণ হরবিশিষ্ট ভগ্নাংশে পরিবর্তিত কর :—

1. $\frac{x}{2y}$, $\frac{y}{2z}$, $\frac{z}{3x}$

2. $\frac{xy}{bc}$, $\frac{yz}{ca}$, $\frac{zx}{ab}$

3. $\frac{x}{a^2bc}$, $\frac{y}{b^2ca}$, $\frac{z}{c^2ab}$

4. $\frac{x}{y+z}$, $\frac{y}{z+x}$, z

5. $\frac{x^2}{y(x+y)}$, $\frac{y^2}{z(x+y)}$, $\frac{z^2}{x(x+y)}$

6. $\frac{1}{yz(z-x)}$, $\frac{1}{zx(z+x)}$, $\frac{1}{xy(z^2-x^2)}$

7. $\frac{a+b}{a-b}$, $\frac{a-b}{a+b}$, $\frac{c}{a^2-b^2}$

8. $\frac{a-b}{a^2-b^2}$, $\frac{a^2+b^2+ab}{a^3-b^3}$, $\frac{a^2}{a+b}$.

9. $\frac{1}{x^2-5x+6}$, $\frac{1}{x^2-4x+3}$, $\frac{1}{x^2-3x+2}$

10. $\frac{a}{(c-b)(c-a)}$, $\frac{b}{(a-c)(a-b)}$, $\frac{c}{(b-a)(b-c)}$

11. $\frac{1}{a^2-ab}$, $\frac{1}{ab+b^2}$, $\frac{1}{a^3b-ab^3}$

12. $\frac{1}{ab(b-c)(c-a)}$, $\frac{1}{bc(b-c)(a-b)}$, $\frac{1}{ca(c-a)(a-b)}$.

47. ভগ্নাংশের যোগ ও বিয়োগ।

ভগ্নাংশের যোগ বিয়োগের প্রণালী পাটীগণিতের যোগ ও বিয়োগের প্রণালীর অনুরূপ। নিম্নে উভয়বিধ উদাহরণ পাশাপাশি দেওয়া হইল।

$$\frac{2}{3}+\frac{5}{7}-\frac{4}{21}$$

$$=\frac{2\times7+5\times3-4\times1}{21}$$

$$=\frac{14+15-4}{21}$$

$$=\frac{25}{21}.$$

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}-\frac{c}{d}$$

$$=\frac{a\times cd+b\times bd-c\times bc}{bcd}$$

[bcd হরগুলির ল. সা. গু.]

$$=\frac{acd+b^2d-bc^2}{bcd}$$

[bcd-কে হরগুলি দ্বারা ভাগ করিয়া ভাগফল দ্বারা লবগুলির গুণ।]

লক্ষ্য করিলে বুঝিতে পারা যায়, এখানে প্রত্যেক ভগ্নাংশকে সাধারণ লঘিষ্ঠ হরবিশিষ্ট করিয়া পরিবর্তিত লবগুলিকে সরল করা হইয়াছে। ভগ্নাংশের ফলটি সর্বদাই লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত করিতে হইবে।

উদাহরণ। সরল কর: $\frac{x+3}{x^2-3x+2}+\frac{x+2}{x^2-4x+3}+\frac{x+1}{x^2-5x+6}$.

$$\text{রাশিটি}=\frac{x+3}{(x-1)(x-2)}+\frac{x+2}{(x-3)(x-1)}+\frac{x+1}{(x-2)(x-3)}$$

$$=\frac{(x+3)(x-3)+(x+2)(x-2)+(x+1)(x-1)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

$$=\frac{x^2-9+x^2-4+x^2-1}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{3x^2-14}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

প্রশ্নমালা 30

সরল কর :—

1. $\frac{5}{a+2b}-\frac{2}{a-2b}$ 2. $\frac{2}{(a+3)}+\frac{5}{(a+3)(a-3)}$

3. $\frac{x}{(x-2y)^2}-\frac{2y}{(x+2y)(x-2y)}$

4. $\frac{7}{a^2+2a-15}-\frac{7}{a^2+3a-10}$ 5. $\frac{2a+1}{3}+\frac{3}{2a+1}+(a-1)$

6. $\frac{x}{x-y}+\frac{y}{x+y}+\frac{2xy}{y^2-x^2}$ [C. U. '16]

7. $1+\frac{2a}{2a-1}-\frac{8a^2}{4a^2-1}$

8. $\frac{1}{x^2-8x+15}+\frac{1}{x^2-4x+3}-\frac{2}{x^2-6x+5}$ [C. U. '20]

9. $\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}-\frac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2}$

10. $\frac{x+y}{y}-\frac{x}{x+y}-\frac{x^3-x^2y}{x^2y-y^3}$ [C U. '39]

11. $1-\frac{x-2y}{2y}-\frac{2x}{x-2y}+\frac{x^2}{2y(x-2y)}$

12. $\frac{2x-1}{2(x-1)(2x-3)}-\frac{1}{2x-2}-\frac{2}{2x-3}$

13. $\frac{a-1}{a-2}-\frac{a+1}{a+2}-\frac{4}{4-a^2}+\frac{2}{2-a}$ [D. B. 1945]

14. $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}+\frac{2x}{x^2+1}+\frac{4x^3}{x^4+1}+\frac{8x^7}{x^8+1}$ [C. U. 1950]

15. $\frac{1-x}{1-x+x^2}+\frac{1+x}{1+x+x^2}-\frac{1}{1+x^2+x^4}$

16. $\frac{a}{(b-a)(a-c)}+\frac{b}{(c-b)(b-a)}+\frac{c}{(a-c)(c-b)}$

17. $\frac{2x}{(x+y)^2(x-y)}+\frac{2y}{(x+y)(x-y)^2}-\frac{1}{(x+y)^2}-\frac{1}{(x-y)^2}$

18. $\frac{x^2+y^2}{xy}-\frac{x^2}{xy+y^2}-\frac{y^2}{x^2+xy}-\frac{1}{xy(x+y)}$

19. $\frac{b-c}{a^2-(b-c)^2}+\frac{c-a}{b^2-(c-a)^2}+\frac{a-b}{c^2-(a-b)^2}$ [C. U. '47]

20. $\frac{x^2-(y-2z)^2}{(2z+x)^2-y^2}+\frac{y^2-(2z-x)^2}{(x+y)^2-4z^2}+\frac{4z^2-(x-y)^2}{(y+2z)^2-x^2}$

21. $\frac{(a-c)^2-b^2}{a^2-(b+c)^2}+\frac{(b-a)^2-c^2}{b^2-(c+a)^2}+\frac{(c-b)^2-a^2}{c^2-(a+b)^2}$ [C. U. '35]

22. যদি $x+\frac{1}{x}=5$ হয়, তবে $\frac{x}{x^2+x+1}$ এর মান কত?

[C. U. '48 Sup.]

48. ভগ্নাংশের গুণন :

পাটীগণিতে ও বীজগণিতে ভগ্নাংশের গুণন প্রক্রিয়া একই প্রকার। দুই বা ততোধিক ভগ্নাংশের গুণফল হইবে একটি ভগ্নাংশ যাহার লব হইবে উক্ত ভগ্নাংশগুলির লবগুলির গুণফল এবং হর হইবে হরগুলির গুণফল।

$$\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{6}{7} = \frac{2\times 3\times 6}{3\times 5\times 7} = \frac{12}{35}$$

$$\frac{a}{b}\times\frac{b^2}{c}\times\frac{c^2}{d} = \frac{a\times b^2\times c^2}{b\times c\times d} = \frac{a\times b\times c}{d} = \frac{abc}{d}$$

গুণফল সর্বদাই লঘিষ্ঠ আকারে রাখিতে হইবে।

49. ভগ্নাংশের ভাগ :

ভাজ্যকে ভাজকের অন্যোন্যক রাশি দ্বারা গুণ করিলেই ভাগফল পাওয়া যাইবে। দুইটি রাশির গুণফল 1 (এক) হইলে একটিকে অপরটির অন্যোন্যক (reciprocal) বলে ; যেমন 3এর অন্যোন্যক $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$এর অন্যোন্যক $\frac{5}{2}$, a-এর অন্যোন্যক $\frac{1}{a}$, $\frac{a}{b}$র অন্যোন্যক $\frac{b}{a}$, $\frac{a+b}{x+y}$ এর অন্যোন্যক $\frac{x+y}{a+b}$

$$\frac{15}{16}\div\frac{5}{6} = \frac{15}{16}\times\frac{6}{5} = \frac{9}{8}$$

$$\frac{a}{b}\div\frac{a^2}{bc} = \frac{a}{b}\times\frac{bc}{a^2} = \frac{c}{a}.$$

নিম্নে ভগ্নাংশের গুণ ও ভাগের উদাহরণ প্রদর্শিত হইতেছে।

উদাহরণ 1. সরল কর : $\frac{5x^3y^2}{6y^3z^2}\times\frac{12y^5z^3}{10x^5y^2}\times\frac{2x^2y^2z^2}{x^3y^2z}$.

প্রদত্ত ভগ্নাংশ $= \frac{5.12.2.x^3.y^2.y^5.z^3.x^2.y^2.z^2}{6.10.y^3.z^2.x^5.y^2.x^3.y^2.z} = \frac{2x^2y^5z^3}{x^5y^3z} = \frac{2y^2z^2}{x^3}$.

উদা. 2. সরল কর : $\left(a+\frac{ax}{a-x}\right)\left(a-\frac{ax}{a+x}\right)\left(\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}\right)$.

$$\text{ভগ্নাংশটি} = \frac{a(a-x)+ax}{a-x}\times\frac{a(a+x)-ax}{a+x}\times\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}$$

$$= \frac{a^2-ax+ax}{a-x}\times\frac{a^2+ax-ax}{a+x}\times\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}$$

$$= \frac{a^2}{a-x}\times\frac{a^2}{a+x}\times\frac{(a+x)(a-x)}{a^2+x^2} = \frac{a^4}{a^2+x^2}.$$

উদা. 3. $\dfrac{6a^5b^6c^7}{13x^2y^2z^5}\div\dfrac{12a^3b^4c^7}{39x^3y^3z^3}$ কে সরল কর।

$$\text{প্রদত্ত ভগ্নাংশ}=\frac{6a^5b^6c^7}{13x^2y^2z^5}\times\frac{39x^3y^3z^3}{12a^3b^4c^7}=\frac{3a^2b^2xy}{2z^2}.$$

উদা. 4. সরল কর : $\left(\dfrac{1+x}{1-x}-\dfrac{2x}{1+x}\right)\div\left(\dfrac{1-x}{1+x}+\dfrac{2x}{1-x}\right).$

$$\text{ভগ্নাংশটি}=\frac{(1+x)^2-2x(1-x)}{(1-x)(1+x)}\div\frac{(1-x)^2+2x(1+x)}{(1+x)(1-x)}$$

$$=\frac{1+2x+x^2-2x+2x^2}{(1-x)(1+x)}\div\frac{1-2x+x^2+2x+2x^2}{(1+x)(1-x)}$$

$$=\frac{1+3x^2}{(1-x)(1+x)}\div\frac{1+3x^2}{(1+x)(1-x)}$$

$$=\frac{1+3x^2}{(1-x)(1+x)}\times\frac{(1+x)(1-x)}{1+3x^2}=1.$$

প্রশ্নমালা 31

সরল কর :—

1. $\dfrac{25p^4q^4r^4}{75x^2y^3z^2}\times\dfrac{5xy^2z}{10pqr}$

2. $\dfrac{a^2}{b^2c^2}\times\dfrac{bc^3}{ax^3}\times\dfrac{b^4y^3}{ac}\times\dfrac{x^3}{b^3y^3}$

3. $\dfrac{3l^2m^2}{10p^2q^2}\div\dfrac{12lq}{5mp}\times\dfrac{4qp^4}{9lm^5}$

4. $\left(\dfrac{8}{a}+\dfrac{a}{4}-3\right)\div\left(\dfrac{a}{12}-\dfrac{1}{3}-\dfrac{8}{3a}\right)$

5. $\left(x-\dfrac{1}{9x}\right)\div\left(1+\dfrac{1}{3x}\right)$

6. $\left(3a-\dfrac{1}{3a}\right)\div\left(3a-2+\dfrac{1}{3a}\right)$

7. $\dfrac{a+1}{a-1}\times\dfrac{a^2+a-2}{a^2+a}$

8. $\dfrac{a^3-b^3}{a^2+ab}\times\dfrac{(a+b)^2}{a^2+ab+b^2}$

9. $\left(\dfrac{1-x^2}{1+y}\right)\left(\dfrac{1-y^2}{x+x^2}\right)\left(1+\dfrac{x}{1-x}\right)$

10. $\dfrac{x^4-y^4}{x^2-2xy+y^2}\times\dfrac{x-y}{x^2+xy}$

11. $\dfrac{x^2-9y^2}{x^2+5xy+6y^2}\div\dfrac{x^2-2xy-3y^2}{x^2-y^2}$

12. $\left(1-\frac{2xy}{x^2+y^2}\right)\div\left(\frac{x^3-y^3}{x-y}-3xy\right)$ [A. U.]

13. $\left(\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}\right)\div\left(\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}\right)$

14. $\left\{1-\frac{2xy}{x^2+y^2}\right\}\div\left\{\frac{x^3-y^3}{3(x-y)}-xy\right\}$

15. $\left(\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}\right)\times\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)$

16. $\frac{a^4-b^4}{a^2-2ab+b^2}\times\frac{a-b}{a(a+b)}\div\frac{a^2+b^2}{a^2}$

17. $\frac{2a^2+5a+3}{a^2-3a+2}\div\frac{6a^2+a-12}{3a^2-10a+8}$

18. $\left(\frac{x}{x-1}-\frac{x+1}{x}\right)\div\left(\frac{x}{x+1}-\frac{x-1}{x}\right)$

19. $\frac{1-2x+x^2}{1-x^6}\div\frac{1-3x+3x^2-x^3}{1+x^2+x^4}\times\frac{(1-x)^2}{1+x}$

20. $\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y+z}\right)\div\left(\frac{1}{y+z}+\frac{1}{x}\right)$

21. $\dfrac{1-\frac{x-y}{x+y}}{2+\frac{2y}{x-y}}$

22. $\dfrac{2-\frac{7}{x+3}}{1-\frac{5}{x+3}}\times\dfrac{1-\frac{1}{x-1}}{1+\frac{1}{2(x-1)}}$

23. $\left(\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}-\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)\div\left(\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}\right)$ [C. U.]

24. $\left(\dfrac{\frac{x}{a}-\frac{y}{b}}{\frac{a}{x}-\frac{b}{y}}+\dfrac{\frac{x}{b}+\frac{a}{y}}{\frac{b}{x}+\frac{y}{a}}\right)\div\left(\frac{a}{y}-\frac{y}{a}\right)$

25. $\dfrac{1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}{1-\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}\times\dfrac{2x}{x+\frac{1}{x}}\div\frac{1}{x}$

26. $\left(\dfrac{a^2}{\frac{a^2+b^2}{a+b}-b}+\dfrac{b^2}{\frac{a^2+b^2}{a+b}-a}\right)\times\frac{1}{a+b}$

27. $\left\{2-\frac{b^2+c^2-a^2}{bc}\right\}\div\left\{2+\frac{a^2+b^2-c^2}{ab}\right\}$

28. $\left\{\dfrac{3a}{3a\ \ 2b}+\dfrac{2b}{3a+2b}-\dfrac{8b^2}{4b^2-9a^2}\right\}\div\left\{1+\dfrac{4b}{3a-2b}\right\}^2$

29. $\left\{\dfrac{(a+b)^2}{4ab}-1\right\}\div\left\{\dfrac{(a-b)^2}{4ab}+1\right\}\times\dfrac{a+b}{a-b}$

30. $\left(\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)\div\left(\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}\right)\times\dfrac{a^2+b^2}{ab}$

31. $\left\{a+\dfrac{b^2}{a+b}+\dfrac{b^2}{a-b}\right\}\div\left\{\dfrac{1}{b(a-b)}-\dfrac{1}{b(a+b)}-\dfrac{1}{a^2}\right\}$

32. $\dfrac{\dfrac{a}{a-b}-\dfrac{a}{a+b}}{\dfrac{b}{a-b}-\dfrac{b}{a+b}}\div\dfrac{\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{b-a}{a+b}}{\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}}.$ [C. U. '34]

50. ক্রমিক ভগ্নাংশ (Continued Fraction)

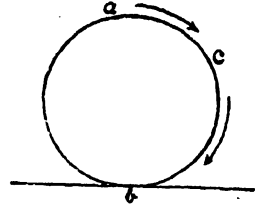
ক্রমিক বা অবিরত ভগ্নাংশ কাহাকে বলে তাহা তোমরা পাটীগণিতে শিখিয়াছ। পাটীগণিতের ন্যায় বীজগণিতীয় ক্রমিক ভগ্নাংশ সরল করিবার সময়ও উহার সর্বনিম্ন অংশ হইতে আরম্ভ করিয়া ক্রমশঃ উপরের দিকে সরল করিতে হয়। নিম্নের উদাহরণ দেখ।

উদাহরণ। $\dfrac{1}{x-\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x-\dfrac{1}{x}}}}$ কে সরল কর। [C. U. '36, '48, '49]

প্রদত্ত ভগ্নাংশ $=\dfrac{1}{x-\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{\dfrac{x^2-1}{x}}}}=\dfrac{1}{x-\dfrac{1}{x+\dfrac{x}{x^2-1}}}=\dfrac{1}{x-\dfrac{1}{\dfrac{x^3-x+x}{x^2-1}}}$

$=\dfrac{1}{x-\dfrac{1}{\dfrac{x^3}{x^2-1}}}=\dfrac{1}{x-\dfrac{x^2-1}{x^3}}=\dfrac{1}{\dfrac{x^4-x^2+1}{x^3}}=\dfrac{x^3}{x^4-x^2+1}.$

51. চক্রক্রম রাশিমালা :

$bc+ca+ab$ এই রাশিমালাটি লক্ষ্য কর। তিনটি পদের প্রথম অক্ষরটি যথাক্রমে b, c, a এবং দ্বিতীয় অক্ষরটি c, a, b. এখন মনে কর, একটি চাকার পরিধির উপর তিনটি অক্ষর a, b, c আছে; এবং b অক্ষরটি ভূমি-সংলগ্ন। তীর নির্দিষ্ট দিকে চাকাটি ঘুরাইলে bর পরে c, cর পরে a, aর পরে b. আবার bর পরে c ইত্যাদিক্রমে অক্ষরগুলি ঘুরিয়া ভূমি-সংলগ্ন হইবে। আরও লক্ষ্য কর, $bc+ca+ab$ রাশিটির অক্ষরগুলি চক্রক্রমে রাখিয়া যদি আরও লিখা যায়, তবে

পুনরায় $bc+ca+ab$ রাশিটিই ফিরিয়া আসিবে। এই অবস্থায় $bc+ca+ab$ রাশিটিতে a, b, c এই তিনটি অক্ষর চক্রক্রমে অবস্থিত (in cyclic order) বলা হয়। তিনটি অক্ষর a, b, cর চক্রক্রমে অবস্থিত এমন রাশিমালার উদাহরণ, $a+b+c$, $a^2bc+b^2ca+c^2ab$, $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ ইত্যাদি। আবার ইহাও লক্ষ্য করিবার বিষয় যে, এই রাশিমালার a স্থলে b, b স্থলে c এবং c স্থলে a বসাইলে রাশিমালাটি অপরিবর্তিত থাকে।

52. চক্রক্রমের রাশিমালাকে সরল করিবার সময় প্রথমে হরগুলিকে চক্রক্রমে সাজাইয়া লইবে। $(a-b)(b-c)(c-a)$ ইহাই চক্রক্রম। কোন ভগ্নাংশের হরে যদি $a-c$ থাকে, তবে উহা চক্রক্রমের সহিত মিলে নাই বলিয়া উহাকে $-(c-a)$ এইভাবে লিখিয়া লইবে। নিম্নের উদাহরণগুলি দেখ। নিম্নের সূত্রগুলি মনে রাখিবে। ঐগুলি পরে চক্রক্রমের রাশিমালার উৎপাদক নির্ণয়ে প্রমাণ করা হইয়াছে :—

(1) $(a-b)+(b-c)+(c-a)=0$

(2) $a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)=0$

(3) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=-(a-b)(b-c)(c-a)$

(4) $bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)=-(a-b)(b-c)(c-a)$

(5) $a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)=(a-b)(b-c)(c-a)$

(6) $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$
$$=-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$$

(7) $b^2c^2(b-c)+c^2a^2(c-a)+a^2b^2(a-b)$
$$=-(a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca).$$

নিম্নের ভগ্নাংশগুলিকে সরল কর :—

উদাহরণ 1. $\dfrac{a}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{c}{(c-a)(c-b)}$.

প্রদত্ত রাশি $=\dfrac{a}{-(a-b)(c-a)}+\dfrac{b}{-(a-b)(b-c)}+\dfrac{c}{-(c-a)(b-c)}$

$$=\frac{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)}{-(a-b)(b-c)(c-a)}=\frac{0}{-(a-b)(b-c)(c-a)}=0.$$

উদা. 2. $\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}$

[D. B. 1932, 1948 ; A. U. 1925]

$$=\frac{a^2}{-(a-b)(c-a)}+\frac{b^2}{-(a-b)(b-c)}+\frac{c^2}{-(c-a)(b-c)}$$

$$=\frac{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}{-(a-b)(b-c)(c-a)}=\frac{-(a-b)(b-c)(c-a)}{-(a-b)(b-c)(c-a)}=1.$$

উদা. 3. $\dfrac{1}{bc(b-a)(c-a)}+\dfrac{1}{ca(c-b)(a-b)}+\dfrac{1}{ab(a-c)(b-c)}$

$$=\frac{1}{-bc(a-b)(c-a)}+\frac{1}{-ca(b-c)(a-b)}+\frac{1}{-ab(c-a)(b-c)}$$

$$=\frac{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)}{-abc(a-b)(b-c)(c-a)}=\frac{0}{-abc(a-b)(b-c)(c-a)}=0.$$

উদা. 4. $\dfrac{(b-c)^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{(c-a)^2}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{(a-b)^2}{(c-a)(c-b)}+3.$

[C. U. '39]

প্রদত্ত রাশি

$$=\frac{(b-c)^2}{-(a-b)(c-a)}+\frac{(c-a)^2}{-(a-b)(b-c)}+\frac{(a-b)^2}{-(c-a)(b-c)}+3$$

$$=\frac{(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3}{-(a-b)(b-c)(c-a)}+3=\frac{3(a-b)(b-c)(c-a)}{-(a-b)(b-c)(c-a)}+3$$

[$\because$ $(b-c)+(c-a)+(a-b)=0$]

$=-3+3=0.$

উদা. 5. $\dfrac{b+c}{bc}(b^2+c^2-a^2)+\dfrac{c+a}{ca}(c^2+a^2-b^2)$

$$+\frac{a+b}{ab}(a^2+b^2-c^2).$$

প্রদত্ত রাশি$=\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{b}\right)\left(b^2+c^2-a^2\right)+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)\left(c^2+a^2-b^2\right)$

$$+\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right)\left(a^2+b^2-c^2\right)$$

$$=\frac{1}{c}(b^2+c^2-a^2)+\frac{1}{c}(c^2+a^2-b^2)+\frac{1}{b}(b^2+c^2-a^2)$$

$$+\frac{1}{b}(a^2+b^2-c^2)+\frac{1}{a}(c^2+a^2-b^2)+\frac{1}{a}(a^2+b^2-c^2)$$

$$=\frac{1}{c}(b^2+c^2-a^2+c^2+a^2-b^2)+\frac{1}{b}(b^2+c^2-a^2+a^2+b^2-c^2)$$

$$+\frac{1}{a}(c^2+a^2-b^2+a^2+b^2-c^2)$$

$$=\frac{1}{c}\times 2c^2+\frac{1}{b}\times 2b^2+\frac{1}{a}\times 2a^2=2c+2b+2a=2(a+b+c).$$

[**দ্রষ্টব্য :** $\frac{b+c}{bc}$কে $\left(\frac{b}{bc}+\frac{c}{bc}\right)$ লেখা যায়। উহাকে আবার $\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{b}\right)$ লেখা যায়। এইভাবে তিনটি পদকে লেখা হইয়াছে। $\frac{1}{c}$এর সহিত যে দুইটি স্থানে গুণ আছে সেই দুইটি গুণফল এক স্থানে পর পর রাখা হইয়াছে। এইভাবে বাকিগুলিও লেখা হইয়াছে।]

উদা. 6. $\dfrac{\frac{a}{a-b}+\frac{b}{b-c}+\frac{c}{c-a}}{\frac{a+b}{a-b}+\frac{b+c}{b-c}+\frac{c+a}{c-a}+3}.$

প্রদত্ত ভগ্নাংশের হরের রাশিমালা

$$=\frac{a+b}{a-b}+1+\frac{b+c}{b-c}+1+\frac{c+a}{c-a}+1$$

$$=\frac{a+b+a-b}{a-b}+\frac{b+c+b-c}{b-c}+\frac{c+a+c-a}{c-a}$$

$$=\frac{2a}{a-b}+\frac{2b}{b-c}+\frac{2c}{c-a}=2\left(\frac{a}{a-b}+\frac{b}{b-c}+\frac{c}{c-a}\right)$$

$\therefore$ সমগ্র প্রদত্ত ভগ্নাংশ$=\dfrac{\frac{a}{a-b}+\frac{b}{b-c}+\frac{c}{c-a}}{2\left(\frac{a}{a-b}+\frac{b}{b-c}+\frac{c}{c-a}\right)}=\frac{1}{2}.$

প্রশ্নমালা 32

সরল কর :—

1. $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}}$ [A. U. '12]

2. $\dfrac{1}{a-\dfrac{1}{a-\dfrac{1}{a+\dfrac{1}{a}}}}$

3. $1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{x}{1-x}}}$

4. $\dfrac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b+c}}{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b+c}}\left\{1+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right\}$ [C. U. '21]

5. $\dfrac{\dfrac{a^2}{x-a}+\dfrac{b^2}{x-b}+\dfrac{c^2}{x-c}+a+b+c}{\dfrac{a}{x-a}+\dfrac{b}{x-b}+\dfrac{c}{x-c}}$ [C. U. '25]

6. $\dfrac{\dfrac{a}{a-x}+\dfrac{b}{b-x}+\dfrac{c}{c-x}}{\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x-a}-\dfrac{1}{x-b}-\dfrac{1}{x-c}}$

7. $\dfrac{1}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{1}{(c-a)(c-b)}$

8. $\dfrac{bc}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{ca}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{ab}{(c-a)(c-b)}$

9. $\dfrac{x+1}{(x-y)(x-z)}+\dfrac{y+1}{(y-z)(y-x)}+\dfrac{z+1}{(z-x)(z-y)}$

10. $\dfrac{b+c}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{c+a}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{a+b}{(c-a)(c-b)}$

11. $\dfrac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^3}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{c^3}{(c-a)(c-b)}$

12. $\dfrac{a(b+c)}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b(c+a)}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{c(a+b)}{(c-a)(c-b)}$ [C. U. '23]

13. $\dfrac{b^2c^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{c^2a^2}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{a^2b^2}{(c-b)(c-a)}$ [C. U. '31]

14. $\dfrac{a^2-bc}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2-ca}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{c^2-ab}{(c-a)(c-b)}$ [C. U. '24]

15. $\frac{1}{a(a-b)(a-c)}+\frac{1}{b(b-c)(b-a)}+\frac{1}{c(c-a)(c-b)}$ [C. U. '15]

16. $\frac{3a-b-c}{(a-b)(a-c)}+\frac{3b-c-a}{(b-c)(b-a)}+\frac{3c-a-b}{(c-a)(c-b)}$ [D. B. '33]

17. $\frac{b^2+bc+c^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{c^2+ca+a^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{a^2+ab+b^2}{(c-a)(c-b)}$ [D. B. '40]

18. $\frac{a^2(b-c)}{(b+a)(a+c)}+\frac{b^2(c-a)}{(c+b)(b+a)}+\frac{c^2(a-b)}{(a+c)(c+b)}$ [C. U. '47]

19. $\frac{a^2(b+c)}{(a-c)(a-b)}+\frac{b^2(c+a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2(a+b)}{(c-a)(c-b)}$ [C. U. '48]

20. $\frac{(a+1)^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{(b+1)^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{(c+1)^2}{(c-a)(c-b)}$

21. $\frac{b+c-k}{(a-b)(a-c)}+\frac{c+a-k}{(b-c)(b-a)}+\frac{a+c-k}{(c-a)(c-b)}$ [C. U. '46]

22. $\frac{x^2+x+1}{(x-y)(x-z)}+\frac{y^2+y+1}{(y-z)(y-x)}+\frac{z^2+z+1}{(z-x)(z-y)}$

23. $\frac{b+c}{2bc}\left(b+c-a\right)+\frac{c+a}{2ca}\left(c+a-b\right)+\frac{a+b}{2ab}\left(a+b-c\right)$

24. $\frac{(a+b)(a^2+b^2-c^2)}{2ab}+\frac{(b+c)(b^2+c^2-a^2)}{2bc}$

$$+\frac{(c+a)(c^2+a^2-b^2)}{2ca}$$

25. $\frac{x^3+y^3-z^3}{xy}\left(x+y\right)+\frac{y^3+z^3-x^3}{yz}\left(y+z\right)$

$$+\frac{z^3+x^3-y^3}{zx}\left(z+x\right)$$

26. $\frac{a}{bc(a-b)(a-c)}+\frac{b}{ca(b-c)(b-a)}+\frac{c}{ab(c-a)(c-b)}$

[A. U. '17]

27. $\frac{(x-c)(x-b)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-a)(b-c)}+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$ [A. U. '41]

28. $\frac{a^2x-ay+z}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2x-by+z}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2x-cy+z}{(c-a)(c-b)}$.

বিবিধ জটিল সূত্র ও তাহাদের প্রয়োগ

53. সূত্র : $(x+a)(x+b)(x+c)$
$$=x^3+(a+b+c)x^2+(bc+ca+ab)x+abc.$$

বামপক্ষ $=\{x^2+(a+b)x+ab\}(x+c)$
$$=x^3+(a+b)x^2+abx+cx^2+(a+b)xc+abc$$
$$=x^3+(a+b+c)x^2+(bc+ca+ab)x+abc.$$

এখানে, গুণফলের সহগগুলি লক্ষ্য করিতে হইবে। বামপক্ষ হইতে ইহা সুস্পষ্ট যে, x^3এর সহগ 1, বামপক্ষে তিনটি অক্ষর $+a$, $+b$, $+c$ আছে; দক্ষিণপক্ষের দ্বিতীয় পদে x^2এর সহগ হইল উক্ত রাশি তিনটির সমষ্টি; তৃতীয় পদে xএর সহগ হইল ঐ তিনটি পদের দুইটি করিয়া লইয়া গুণফলগুলির সমষ্টি, চতুর্থ পদ x^0 এর সহগ হইল ঐ তিনটি পদের গুণফল।

এই সূত্রে $+a$, $+b$, $+c$ স্থলে $-a$, $-b$, $-c$ বসাইলে হয়
$$(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-(a+b+c)x^2+(bc+ca+ab)x-abc.$$

এস্থলে লক্ষ্য কর, দক্ষিণপক্ষের সহগগুলি পূর্ববৎ আছে, কেবল চিহ্নগুলি পর্যায়ক্রমে $+$ এবং $-$ হইয়াছে।

উদাহরণ। $x-2$, $x+3$, $x-4$ এর গুণফল নির্ণয় কর।

এক্ষণে $a=-2$, $b=3$, $c=-4$. $\therefore$ $a+b+c=-2+3-4=-3$,
$$bc+ca+ab=3\times-4+(-4)(-2)+(-2)\times3$$
$$=-12+8-6=-10,$$

এবং $abc=-2\times3\times-4=24$,

$\therefore$ নির্ণেয় গুণফল $=(x-2)(x+3)(x-4)$
$$=x^3-3x^2-10x+24.$$

54. সূত্র : $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca.$

বহুপদরাশির বর্গফল হইবে প্রতি পদের বর্গ এবং পদগুলির দুই দুইটির গুণফলের দ্বিগুণের সমষ্টি। এইরূপে,
$$(a+b+c+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad$$
$$+2bc+2bd+2cd.$$

[**দ্রষ্টব্য :** যেহেতু $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$, সুতরাং, $a+b+c$, $a^2+b^2+c^2$ এবং $ab+bc+ca$ এই তিনটির যে কোন দুইটির মান দেওয়া থাকিলে তৃতীয়টির মান নির্ণয় করা যায়।]

উদাহরণ 1. যদি $a+b+c=6$ এবং $a^2+b^2+c^2=14$ হয়, তবে $ab+bc+ca$এর মান নির্ণয় কর।

এখন, $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

$\therefore \quad 36=14+2(ab+bc+ca)$

$\therefore \quad ab+bc+ca=(36-14)\div 2=11.$

উদা. 2. যদি $x=15$, $y=-16$, এবং $z=1$ হয়, তবে
$x^2+y^2+z^2+2yz+2zx+2xy$এর মান নির্ণয় কর।

রাশিটি$=(x+y+z)^2=(15-16+1)^2=0.$

উদা. 3. যদি $x=b+c$, $y=c+a$ এবং $z=a+b$ হয়, তবে
$x^2+y^2+z^2-2yz-2zx+2xy$এর মান নির্ণয় কর।

রাশিটি$=x^2+y^2+z^2+2(y)(-z)+2x(-z)+2x.y$
$=(x+y-z)^2=(b+c+c+a-a-b)^2=(2c)^2=4c^2.$

55. সূত্র : $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$
$=\frac{1}{2}\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}.$

বামপক্ষ$=\frac{1}{2}\times 2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
$=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$
$=\frac{1}{2}\{(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)+(a^2-2ab+b^2)\}$
$=\frac{1}{2}\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}.$

উদাহরণ 1. যদি $x=175$, $y=176$ এবং $z=177$ হয়, তবে $x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy$এর মান নির্ণয় কর।

রাশিটি$=\frac{1}{2}\{(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2\}$
$=\frac{1}{2}\{(176-177)^2+(177-175)^2+(175-176)^2\}$
$=\frac{1}{2}\{(-1)^2+(2)^2+(-1)^2\}=\frac{1}{2}(1+4+1)=\frac{1}{2}\times 6=3.$

উদা. 2. সরল কর $(x-1)^2+(x-2)^2+(x-3)^2-(x-1)(x-2)$
$-(x-2)(x-3)-(x-3)(x-1).$

মনে কর, $x-1=a$, $x-2=b$, এবং $x-3=c$, তাহা হইলে

রাশিটি$=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$
$=\frac{1}{2}\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}$
$=\frac{1}{2}\{(x-2-x+3)^2+(x-3-x+1)^2+(x-1-x+2)^2\}$
$=\frac{1}{2}\{(1)^2+(-2)^2+(1)^2\}=\frac{1}{2}(1+4+1)=\frac{1}{2}\times 6=3.$

প্রশ্নমালা 33

গুণফল নির্ণয় কর :—

1. $x+3, x-2, x+2$ 2. $x-5, x-7, x+12$

3. $a+10, a-11, a+1$

বর্গ নির্ণয় কর :—

4. $a+b-c$ 5. $a-b-c$ 6. $2a+3b-3c$

7. $-a-2b-3c$ 8. $a+b-c+d$ 9. $a-b-c-d$

10. $-a-b-c-d$.

মান নির্ণয় কর :—

11. $x^2+y^2+z^2-2xy+2xz-2yz$,
যদি $x=34$, $y=33$, এবং $z=10$ হয়।

12. $x^2+y^2+2xy-2x-2y+25$, যদি $x=20$, $y=-18$ হয়।

13. $a^2+9b^2-6ab-2a+6b+9$, যদি $a=50$, এবং $b=15$ হয়।

14. যদি $a+b+c=3$, $ab+bc+ca=2$ হয়, তবে $a^2+b^2+c^2$এর মান নির্ণয় কর।

15. যদি $a+b-c=4$ এবং $a^2+b^2+c^2=14$ হয়, তবে $ab-bc-ca$এর মান নির্ণয় কর।

16. যদি $2x+3y+z=6$, $4x^2+9y^2+z^2=14$ হয়, তবে $6xy+2xz+3yz$এর মান নির্ণয় কর।

17. যদি $x+y+z=a$, $x^2+y^2+z^2=b^2$ এবং $yz+zx+xy=c^2$ হয়, তবে a, b, cএর পরস্পর সম্বন্ধ নির্ণয় কর।

18. যদি $a=3071$, $b=3072$ এবং $c=3073$ হয়, তবে $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$এর মান নির্ণয় কর।

19. যদি $a=x+y$, $b=y+z$ এবং $c=z+x$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,
$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx.$$

20. $x=b+c-a$, $y=c+a-b$, $z=a+b-c$ হইলে প্রমাণ কর যে,
$$x^2+y^2+z^2+2yz+2zx+2xy=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca.$$

21. সরল কর :—
$$(x+1)^2+(x+2)^2+(x+3)^2-(x+1)(x+2)-(x+2)(x+3)-(x+3)(x+1).$$

22. প্রমাণ কর যে,
$$(x+y+a+b)^2+(x+y-a-b)^2=2\{(x+y)^2+(a+b)^2\}.$$

23. যদি $x=y=333$ এবং $z=334$ হয়, তবে $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$এর মান নির্ণয় কর।

24. যদি $x+y=a$, $x^2+y^2=b^2$ এবং $x^3+y^3=c^3$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে $a^3+2c^3=3ab^2$.

25. যদি $x=a+\frac{1}{a}$ এবং $y=a-\frac{1}{a}$ হয়, তবে $x^4+y^4-2x^2y^2$এর মান নির্ণয় কর। [C. U. '44]

26. যদি $a=x+y$, $b=x-y$, $c=x+2y$ হয়, তবে $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$এর মান নির্ণয় কর। [C. U. '14 ; D. B. '31]

27. $x=b+c-2a$, $y=c+a-2b$ এবং $z=a+b-2c$ হইলে $x^2+y^2-z^2+2xy$এর মান নির্ণয় কর।

28. $a+b=2$, $a^2+b^2=4$ হইলে a^3+b^3এর মান নির্ণয় কর।

56. সূত্র : (A). $(b-c)+(c-a)+(a-b)=0\cdots(1)$

$$(b^2-c^2)+(c^2-a^2)+(a^2-b^2)=0\cdots(2)$$

অথবা $(b^n-c^n)+(c^n-a^n)+(a^n-b^n)=0\cdots(3)$

(B). $a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)=0$,

$$a^2(b^2-c^2)+b^2(c^2-a^2)+c^2(a^2-b^2)=0,$$

$$a^3(b^3-c^3)+b^3(c^3-a^3)+c^3(a^3-b^3)=0,$$

অথবা, সাধারণতঃ $a^n(b^n-c^n)+b^n(c^n-a^n)+c^n(a^n-b^n)=0$.

উদাহরণ 1. সরল কর :

$$(b+c-1)(b-c)+(c+a-1)(c-a)+(a+b-1)(a-b).$$

এখানে প্রথমে লক্ষ্য করিতে হইবে প্রতি পদের অক্ষরগুলির চক্রক্রম বজায় আছে কি না। যদি থাকে, তবে প্রথম পদটির গুণফল হইতে চক্রক্রমে লিখিয়া অপর দুইটির গুণফল নির্ণয় করা যায়।

রাশিটির প্রথম পদের গুণফল$=(b+c)(b-c)-1(b-c)$

$$=(b^2-c^2)-(b-c).$$

সুতরাং চক্রক্রমে লিখিলে অপর দুইটি পদের গুণফল যথাক্রমে স্পষ্টতঃ

$(c^2-a^2)-(c-a)$ এবং $(a^2-b^2)-(a-b)$ হইবে।

$\therefore$ রাশিটি$=(b^2-c^2)-(b-c)+(c^2-a^2)-(c-a)+(a^2-b^2)-(a-b)$

$$=[(b^2-c^2)+(c^2-a^2)+(a^2-b^2)]-[(b-c)+(c-a)+(a-b)]$$

$$=0-0=0.$$

উদা. 2. সরল কর :

$$(b-c)(b^2+bc+c^2+1)+(c-a)(c^2+ca+a^2+1)+(a-b)(a^2+ab+b^2+1).$$

রাশিটি$=(b-c)(b^2+bc+c^2)+(b-c)+(c-a)(c^2+ca+a^2)+(c-a)$
$+(a-b)(a^2+ab+b^2)+(a-b)$
$=(b^3-c^3)+(b-c)+(c^3-a^3)+(c-a)+(a^3-b^3)+(a-b)$
$=[(b^3-c^3)+(c^3-a^3)+(a^3-b^3)]+[(b-c)+(c-a)+(a-b)]$
$=0+0=0.$

[**দ্রষ্টব্য :** চক্রক্রমে গঠিত এই প্রকার রাশির সরল মান বস্তুতঃ প্রথম পদটি হইতেই সূত্রের সাহায্যে মুখে মুখে নির্ণয় করা যায়।]

প্রশ্নমালা 34

সরল কর :—

1. $4x(5y-6z)+5y(6z-4x)+6z(4x-5y)$
2. $y^2(x^2-z^2)+z^2(y^2-x^2)+x^2(z^2-y^2)$
3. $a^2(b^2-c^2)+b^2(c^2-a^2)+c^2(a^2-b^2)+abc$
4. $(ax^2+b)(y^2-z^2)+(ay^2+b)(z^2-x^2)+(az^2+b)(x^2-y^2)$
5. $pq(rs-ty)+rs(ty-pq)+ty(pq-rs)+3$
6. $(x+a)(x+b)(a-b)+(x+b)(x+c)(b-c)$
$+(x+c)(x+a)(c-a)-ab(a-b)-bc(b-c)-ca(c-a).$

57. **সূত্র :** $-(b-c)(c-a)(a-b)$
$=a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)\cdots\cdots(1)$

অথবা $=bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)\cdots\cdots(2)$

অথবা $=a(c^2-b^2)+b(a^2-c^2)+c(b^2-a^2)\cdots\cdots(3)$

সূত্রের বামপক্ষ$=-\{(bc-ab-c^2+ac)(a-b)\}$
$=-(abc-a^2b-ac^2+a^2c-b^2c+ab^2+bc^2-abc)$
$=a^2b+ac^2-a^2c+b^2c-ab^2-bc^2$
$=(a^2b-a^2c)+(b^2c-ab^2)+(ac^2-bc^2)$
$=a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b).$

বিভিন্ন প্রকারে সাজাইয়া দক্ষিণ পক্ষের অপর দুইটি রাশিমালাও পাওয়া যায়।

[**দ্রষ্টব্য :** দক্ষিণপক্ষকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিলে বামপক্ষ হয়। এই উৎপাদকে বিশ্লেষণ প্রণালী 66 অনুচ্ছেদে প্রদর্শিত হইবে।]

উদাহরণ 1. সরল কর : $2(a-b-c)^2(b-c)+2(b-c-a)^2(c-a)$
$+2(c-a-b)^2(a-b)+8(a-b)(b-c)(c-a).$

মনে কর, $a-b-c=x$, $b-c-a=y$ এবং $c-a-b=z.$

তাহা হইলে $x-y=a-b-c-b+c+a=2a-2b=2(a-b)$;

অনুরূপে $y-z=2(b-c)$ এবং $z-x=2(c-a).$

$\therefore$ রাশিটি $= x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$
$+(y-z)(z-x)(x-y)$
$= -(y-z)(z-x)(x-y)+(y-z)(z-x)(x-y)=0.$

উদা. 2. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

$$(x+y)^2(y-x)+(y+z)^2(z-y)+(z+x)^2(x-z).$$

মনে কর, $a=x+y$, $b=y+z$ এবং $c=z+x$;

তাহা হইলে $b-c=(y+z)-(z+x)=y-x$. অনুরূপে $c-a=z-y$ এবং $a-b=x-z$ হইল ।

$\therefore$ রাশিটি $= a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$
$= -(b-c)(c-a)(a-b) = -(y-x)(z-y)(x-z).$

প্রশ্নমালা 35

সরল কর : —

1. $(ab-1)(a-b)+(bc-1)(b-c)+(ca-1)(c-a)$ $+(b-c)(c-a)(a-b)$
2. $(a^2-bc)(b-c)+(b^2-ca)(c-a)+(c^2-ab)(a-b)$
3. $(a+2b+3c)^2(a-2b+c)+(b+2c+3a)^2(b-2c+a)$ $+(c+2a+3b)^2(c-2a+b)+(a-2b+c)(b-2c+a)(c-2a+b)$
4. $(y-z)(a+x)^2+(z-x)(a+y)^2+(x-y)(a+z)^2$ $+(y-z)(z-x)(x-y)$
5. $(x+a^2+ab+b^2)(a-b)+(x+b^2+bc+c^2)(b-c)$ $+(x+c^2+a^2+ca)(c-a)$

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :—

6. $(b-c)(x-a)^2+(c-a)(x-b)^2+(a-b)(x-c)^2$
7. $bc(x+a)(b-c)+ca(x+b)(c-a)+ab(x+c)(a-b)$
8. $(b-c)(x-b)(x-c)+(c-a)(x-c)(x-a)$ $+(a-b)(x-a)(x-b)$
9. $(x+a)(2x+b+c)(b-c)+(x+b)(2x+c+a)(c-a)$ $+(x+c)(2x+a+b)(a-b).$

58. সূত্র : $(b+c)(c+a)(a+b)$
$= a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc$

অথবা $= bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+2abc$

অথবা $= a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)+2abc.$

এক্ষণে, $(b+c)(c+a)(a+b)=(bc+ab+c^2+ac)(a+b)$

$$=abc+a^2b+ac^2+a^2c+b^2c+ab^2+bc^2+abc$$
$$=(a^2b+a^2c)+(b^2c+b^2a)+(c^2a+c^2b)+2abc$$
$$=a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc.$$

বিভিন্ন প্রকারে সাজাইয়া দক্ষিণপক্ষের অপর দুইটি রাশি পাওয়া যায়।

[দক্ষিণপক্ষকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিলে বামপক্ষ হইবে ইহা সুস্পষ্ট।

উদাহরণ 1. $(2x+y)$, $(y-2z)$, $2(x-z)$এর গুণফল নির্ণয় কর।

মনে কর, $a=2x$, $b=y$ এবং $c=-2z$, তাহা হইলে $2x+y=a+b$, $y-2z=b+c$, $2(x-z)=-2z+2x=c+a$ হইল।

$\therefore$ রাশিটি $=(a+b)(b+c)(c+a)$

$$=a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc$$
$$=4x^2(y-2z)+2y^2(x-z)+4z^2(2x+y)-4xyz$$
$$=4x^2y-8x^2z+2xy^2-2y^2z+8xz^2+4yz^2-4xyz.$$

উদা. 2. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

$$(b+c)^2(2a+b+c)+(c+a)^2(2b+c+a)+(a+b)^2(2c+a+b)$$
$$+2(b+c)(c+a)(a+b).$$

মনে কর, $x=b+c$, $y=c+a$, $z=a+b$,

তাহা হইলে, $x+y=a+b+2c$, $y+z=2a+b+c$,

এবং $z+x=a+2b+c$.

$\therefore$ রাশিটি $=x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)+2xyz$

$$=(y+z)(z+x)(x+y)$$
$$=(2a+b+c)(a+2b+c)(a+b+2c).$$

প্রশ্নমালা 36

গুণফল নির্ণয় কর :—

1. $(2y+z)(z+x)(x+2y)$ 2. $(a+2b)(2b+3c)(3c+a)$
3. $(y+z)(z-x)(y-x)$

সরল কর :—

4. $a^2(b-c)-b^2(c-a)+c^2(a+b)-2abc-(b-c)(a-c)(a+b)$
5. $a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2-(b+c)(c+a)(a+b)$
6. $x(y+z-x)^2+y(z+x-y)^2+z(x+y-z)^2$
$+(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)$

7. $bc(b+c-a)+ca(c+a-b)+ab(a+b-c)+5abc$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

8. যদি $s=a+b+c$ হয়, তবে দেখাও যে,

$$(s-a)^2(s+a)+(s-b)^2(s+b)+(s-c)^2(s+c)+2(s-a)(s-b)(s-c)=(s+a)(s+b)(s+c).$$

59. **সূত্র :** $(a+b+c)(bc+ca+ab)$

$=a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc$

অথবা $=a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)+3abc$

অথবা $=bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+3abc.$

এক্ষণে, $(a+b+c)(bc+ca+ab)$

$=abc+a^2c+a^2b+b^2c+abc+ab^2+bc^2+c^2a+abc$

$=a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc.$

বিভিন্নরূপে সাজাইয়া প্রমাণ করা যায় যে ইহা

$=a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)+3abc$

এবং $=bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+3abc.$

[**দ্রষ্টব্য :** বিপরীতক্রমে দক্ষিণপক্ষের উৎপাদক হইল বামপক্ষ।]

60. যেহেতু, $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc$

$=(b+c)(c+a)(a+b)$

এবং $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc$

$=(a+b+c)(bc+ca+ab).$

$\therefore$ উভয়ের অন্তর করিলে পাই

$abc=(a+b+c)(bc+ca+ab)-(b+c)(c+a)(a+b)$

$\therefore$ $(a+b+c)(bc+ca+ab)-abc=(b+c)(c+a)(a+b)$;

অথবা, $(b+c)(c+a)(a+b)+abc=(a+b+c)(bc+ca+ab).$

উদাহরণ 1. $(2x+3y+z)(3yz+2zx+6xy)$এর গুণফল নির্ণয় কর।

মনে কর, $a=2x$, $b=3y$, $c=z$; তাহা হইলে

রাশিটি$=(a+b+c)(bc+ca+ab)$

$=a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc$

$=4x^2(3y+z)+9y^2(z+2x)+z^2(2x+3y)+18xyz.$

উদা. 2. প্রমাণ কর যে,

$$(2b+c)(b^2+2bc-1)-2b(b+c+1)(b+c-1)=c(b^2-1).$$

মনে কর, $x=b+1$, $y=b-1$, $z=c$; তাহা হইলে

$$x+y+z=b+1+b-1+c=2b+c,$$

$$yz+zx+xy=c(b-1)+c(b+1)+(b+1)(b-1)$$
$$=bc-c+bc+c+b^2-1=b^2+2bc-1,$$

$$x+y=b+1+b-1=2b,$$
$$y+z=b-1+c=b+c-1,\ z+x=c+b+1.$$

$\therefore$ রাশিটি $=(x+y+z)(yz+zx+xy)-(x+y)(y+z)(z+x)$
$=(x+y)(y+z)(z+x)+xyz-(x+y)(y+z)(z+x)$
$=xyz=(b+1)(b-1)c=c(b^2-1).$

উদা 3. সরল কর : $x(y+z-x)^2+y(z+x-y)^2$
$+z(x+y-z)^2+(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z).$

মনে কর, $a=y+z-x$, $b=z+x-y$, $c=x+y-z$.
তাহা হইলে, $b+c=2x$, $c+a=2y$, $a+b=2z$;
এবং রাশিটি যদি E হয়, তবে

$$2E=a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc$$
$$=(b+c)(c+a)(a+b)=2x.2y.2z=8xyz$$

$\therefore$ E (রাশিটি) $=4xyz.$

প্রশ্নমালা 37

গুণফল নির্ণয় কর :—

1. $(x-y-z)(yz-xy-zx)$
2. $(yz+zx+xy)(x^2yz+y^2zx+z^2xy)$
3. $(p^2+q^2+r^2)(p^2q^2+q^2r^2+r^2p^2)$
4. $(2a-3b-c)(3bc-2ca-6ab)$

সরল কর :—

5. $2c(b+c-a)(c+a-b)+2a(c+a-b)(a+b-c)+$
$2b(a+b-c)(b+c-a)+2(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$
6. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $(b+c)^2(2a+b+c)$
$+(c+a)^2(a+2b+c)+(a+b)^2(a+b+2c)$
$-2(a+b+c)\{(b+c)(c+a)+(c+a)(a+b)+(a+b)(b+c)\}.$

61. সূত্র : $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$
$=a^3+b^3+c^3-3abc.$

দ্রষ্টব্য : (1) বামপক্ষের গুণফলই দক্ষিণপক্ষ হইবে।
(2) দক্ষিণপক্ষের উৎপাদক হইল বামপক্ষ।

অনু. 1. যেহেতু $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc$
$=\frac{1}{2}\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}$
$\therefore$ $\frac{1}{2}(a+b+c)\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}$
$=a^3+b^3+c^3-3abc.$

অনু. 2. $a+b+c=0$ হইলে, $a^3+b^3+c^3=3abc$ হইবে।

উদাহরণ 1. $(2x-3y+z)(4x^2+9y^2+z^2-2xz+3yz+6xy)$এর গুণফল নির্ণয় কর।

এখানে, $a=2x,\ b=-3y,\ c=z.$
$\therefore$ $a^2=4x^2,\ b^2=9y^2,\ c^2=z^2,\ ab=-6xy, bc=-3yz,\ ca=2xz.$
$\therefore$ রাশিটি$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ac-bc-ab)$
$=a^3+b^3+c^3-3abc=(2x)^3+(-3y)^3+z^3-3(2x).(-3y).z$
$=8x^3-27y^3+z^3+18xyz.$

উদা. 2. $x^3-8y^3-1-6xy$কে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর।
এখানে, মনে কর $a=x,\ b=-2y,\ c=-1.$
তাহা হইলে রাশিটি$=(x)^3+(-2y)^3+(-1)^3-3(x)(-2y)(-1)$
$=a^3+b^3+c^3-3abc$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$
$=(x-2y-1)(x^2+4y^2+1-2y+x+2xy).$

উদা. 3. যদি $a=\cdot1743,\ b=\cdot1744$ এবং $c=\cdot1745$ হয়, তবে $a^3+b^3+c^3-3abc$এর মান নির্ণয় কর।

এখানে $b-c=-\cdot0001,\ c-a=\cdot0002,\ a-b=-\cdot0001,$
এবং $a+b+c=\cdot5232.$
$\therefore$ $a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{1}{2}(a+b+c)\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}$
$=\frac{1}{2}\times\cdot5232\times\{\cdot00000001+\cdot00000004+\cdot00000001\}$
$=\frac{1}{2}\times\cdot5232\times\cdot00000006$
$=\cdot2616\times\cdot00000006=\cdot000000015696.$

উদা. 4. যদি $a+b+c=6,\ a^2+b^2+c^2=14,$
এবং $a^3+b^3+c^3=36$ হয়, তবে abcএর মান নির্ণয় কর।
এখানে $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(bc+ca+ab)$
$\therefore$ $36=14+2(bc+ca+ab)$ [প্রদত্ত মান বসাইয়া]
$\therefore$ $2(bc+ca+ab)=36-14=22,$ $\therefore$ $bc+ca+ab=11.$
এখন, $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
$\therefore$ $36-3abc=6\times(14-11)=18,$
$\therefore$ $3abc=36-18=18,$ $\therefore$ $abc=6.$

উদা. 5. দেখাও যে $(b^2-c^2)^3+(c^2-b^2)^3+(a^2-b^2)^3$
$=3(b+c)(c+a)(a+b)(b-c)(c-a)(a-b)$.

মনে কর, $x=b^2-c^2$, $y=c^2-a^2$, $z=a^2-b^2$;

$\therefore \quad x+y+z=(b^2-c^2)+(c^2-a^2)+(a^2-b^2)=0$,

$\therefore \quad x^3+y^3+z^3=3xyz$,

$\therefore \quad (b^2-c^2)^3+(c^2-a^2)^3+(a^2-b^2)^3$
$=3(b^2-c^2)(c^2-a^2)(a^2-b^2)$
$=3(b+c)(c+a)(a+b)(b-c)(c-a)(a-b)$.

উদা. 6. যদি $3s=a+b+c$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,
$(s-a)^3+(s-b)^3+(s-c)^3=3(s-a)(s-b)(s-c)$.

$\because \quad 3s=a+b+c, \quad \therefore \quad (s-a)+(s-b)+(s-c)=0$,

$\therefore \quad (s-a)^3+(s-b)^3+(s-c)^3=3(s-a)(s-b)(s-c)$.

প্রশ্নমালা 38

গুণফল নির্ণয় কর :—

1. $(x-y-z)(x^2+y^2+z^2+xy-yz+zx)$
2. $(2x-3y+1)(4x^2+9y^2+1+6xy-2x+3y)$
3. $(a-2b-c)(a^2+4b^2+c^2+2ab+ac-2bc)$
4. $(2x-3y-2)(4x^2+9y^2+4+6xy+4x-6y)$
5. $(bc+ca+ab)\{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2-abc(a+b+c)\}$
6. $(p^2-q^2+r^2)(p^4+q^4+r^4+p^2q^2-p^2r^2+q^2r^2)$
7. $a+b+c=15$, $a^2+b^2+c^2=89$ এবং $abc=96$ হইলে $a^3+b^3+c^3$এর মান নির্ণয় কর।
8. $a+b+c=3$, $a^2+b^2+c^2=5$ এবং $a^3+b^3+c^3=9$ হইলে abcএর মান নির্ণয় কর।
9. $a=225$, $b=226$, $c=227$ হইলে $a^3+b^3+c^3-3abc$এর মান নির্ণয় কর।
10. $a+b+c=p$, $a^2+b^2+c^2=q^2$, $abc=r^3$ হইলে $a^3+b^3+c^3$ এর মান p, q, r অক্ষরগুলি দ্বারা প্রকাশিত কর।
11. $x+y=z$ হইলে $x^3+y^3-z^3+3xyz$এর মান কত?

সরল কর :—

12. $(a+b-1)^3+(a-b+2)^3-(2a+1)^3$
$+3(a+b-1)(a-b+2)(2a+1)$
13. $(2x-y)^3+(2y-z)^3-(2x+y-z)^3$
$+3(2x-y)(2y-z)(2x+y-z)$

দেখাও যে :—

14. $a^3(b-c)^3+b^3(c-a)^3+c^3(a-b)^3$
$$=3abc(b-c)(c-a)(a-b)$$

15. $(y-z)^3+(z-x)^3+(x-y)^3=3(y-z)(z-x)(x-y)$

গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর :—

16. $x^3+y^3-z^3+3xyz.$ 17. $8a^3-b^3+27c^3+18abc$

18. $27a^3-8b^3-1-18ab$

19. যদি $x=b+c-a$, $y=c+a-b$ এবং $z=a+b-c$ হয়, তবে দেখাও যে $x^3+y^3+z^3-3xyz=4(a^3+b^3+c^3-3abc)$.

20. যদি $2s=a+b+c$ হয়, তবে দেখাও যে,
$$(s-a)^3+(s-b)^3+(s-c)^3-3(s-a)(s-b)(s-c)$$
$$=\tfrac{1}{2}(a^3+b^3+c^3-3abc).$$

62. **সূত্র :** $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(b+c)(c+a)(a+b)$.

$(a+b+c)^3=\{a+(b+c)\}^3$
$$=a^3+3a^2(b+c)+3a(b+c)^2+b^3+c^3+3bc(b+c)$$
$$=a^3+b^3+c^3+3(b+c)(a^2+ab+ac+bc)$$
$$=a^3+b^3+c^3+3(b+c)\{a(a+b)+c(a+b)\}$$
$$=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a).$$

অনু. 1. $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=3(b+c)(c+a)(a+b)$.

উদাহরণ 1. দেখাও যে, $(a+b+c)^3-(b+c-a)^3-(c+a-b)^3$
$$-(a+b-c)^3=24abc.$$

মনে কর, $x=b+c-a$, $y=c+a-b$, এবং $z=a+b-c$; তাহা হইলে, $x+y+z=a+b+c$, $y+z=2a$, $z+x=2b$ এবং $x+y=2c$.

$\therefore$ রাশিটি$=(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$
$$=3(y+z)(z+x)(x+y)=3.2a.2b.2c=24abc.$$

উদা. 2. দেখাও যে, $27(a+b+c)^3-(2a+b)^3-(2b+c)^3-(2c+a)^3$
$$=3(a+2b+3c)(b+2c+3a)(c+2a+3b).$$

মনে কর, $2a+b=x$, $2b+c=y$, এবং $2c+a=z$, তাহা হইলে,
$x+y+z=3(a+b+c)$, $y+z=a+2b+3c$, $z+x=b+2c+3a$
এবং $x+y=c+2a+3b$ হইল।

$\therefore$ বামপক্ষ$=(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3=3(y+z)(z+x)(x+y)$
$$=3(a+2b+3c)(b+2c+3a)(c+2a+3b).$$

উদা. 3. যদি $s=a+b+c$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,
$8s^3=(s-a)^3+(s-b)^3+(s-c)^3+3(s+a)(s+b)(s+c)$.

মনে কর, $s-a=x$, $s-b=y$ এবং $s-c=z$, তাহা হইলে

$$x+y+z=3s-(a+b+c)=3s-s=2s,$$

$$y+z=(s-c)+(s-b)=2s-(b+c)=2s-(s-a)=s+a,$$

অনুরূপে, $z+x=s+b$ এবং $x+y=s+c$ হইল ;

$$\therefore \text{ বামপক্ষ}=(2s)^3=(x+y+z)^3$$

$$=x^3+y^3+z^3+3(y+z)(z+x)(x+y)$$

$$=(s-a)^3+(s-b)^3+(s-c)^3+3(s+a)(s+b)(s+c).$$

প্রশ্নমালা 39

1. দেখাও যে, $(x+y-z)^3=x^3+y^3-z^3+3(y-z)(x-z)(x+y)$.

2. দেখাও যে, $8(a+b+c)^3-(b+c)^3-(c+a)^3-(a+b)^3$
$$=3(b+c+2a)(c+a+2b)(a+b+2c).$$

3. দেখাও যে, $7(x+y)^3=x^3+y^3+3(x+y)(2x+y)(x+2y)$.

4. দেখাও যে, $(x+y+z)^3=(y+z-x)^3+(z+x-y)^3$
$$+(x+y-z)^3+24xyz.$$

5. $(x+y+z)^3-(2x-y)^3-(2y-z)^3-(2z-x)^3$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

6. যদি $2s=a+b+c$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে
$$s^3-(s-a)^3-(s-b)^3-(s-c)^3=3abc.$$

7. যদি $2s=a+b+c$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে
$$s^3+(s-2a)^3+(s-2b)^3+(s-2c)^3=24(s-a)(s-b)(s-c).$$

8. $a^3-(2a-b-c)^3-(2b-c-a)^3+(b-2c)^3$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

9. $b+c=8$, $c+a=10$ এবং $a+b=12$ হইলে $a^3+b^3+c^3$এর মান নির্ণয় কর।

বিস্তৃতি (Expansion)

63. দ্বিপদ রাশির যে কোন ঘাতের বিস্তৃতি (Expansion of any power of a Binomial).

ইতিপূর্বে প্রমাণিত হইয়াছে যে, $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$,

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

গুণ করিয়া, প্রমাণ করা যায় যে,

$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4.$$

এখন এই তিনটি দ্বিপদরাশির ঘাত অনুযায়ী ইহাদের বিস্তৃতি পরীক্ষা করিয়া লক্ষ্য কর—

(1) প্রত্যেক দ্বিপদরাশির ঘাত যত, ইহার বিস্তৃতির পদসংখ্যা তাহা অপেক্ষা 1 বেশী।

(2) প্রত্যেক দ্বিপদরাশির ঘাত যত, ইহার বিস্তৃতির প্রত্যেকটি পদের অক্ষরদ্বয়ের ঘাত-সমষ্টি তত ; অর্থাৎ উভয়েই সমমাত্র রাশি।

(3) বিস্তৃতিগুলিতে a ও b দুইটি অক্ষরের ঘাত এরূপ হয় যে, প্রথম অক্ষর a-র ঘাত 1 করিয়া কমিতে থাকে এবং দ্বিতীয় অক্ষর b-র ঘাত 1 করিয়া বাড়িতে থাকে।

(b) যে কোন পদের সহগ হইবে তাহার পূর্ববর্তী পদের প্রথম অক্ষর (a)-র ঘাত ও তাহার সহগের গুণফলকে প্রথম হইতে ঐ পূর্ববর্তী পদের সংখ্যা দ্বারা ভাগের ভাগফল।

যেমন, $(a+b)^4$এর প্রথম পদ a^4. দ্বিতীয় পদের সহগ হইবে ইহার পূর্ববর্তী পদ a^4এর ঘাত 4 এবং উহার সহগ 1এর গুণফল (অর্থাৎ 4×1) বিভাজিত পদ-সংখ্যা অর্থাৎ $\frac{4\times1}{1}=4$. অনুরূপে তৃতীয় পদের সহগ$=\frac{3\times4}{2}=6$. ইত্যাদিক্রমে নির্ণয় করিতে হইবে।

(5) প্রথম ও শেষ পদ হইতে সমদূরবর্তী পদগুলির সাংখ্য সহগ সমান হইবে।

দ্রষ্টব্য : এই নিয়ম 'হাতগড়া'র মত হইলেও বস্তুতঃ ইহার প্রমাণ আছে। তবে, এই প্রমাণ বর্তমানে অবান্তর।

64. নিম্ন ত্রিভুজটি মনে রাখিলে দ্বিপদরাশির যে কোন ঘাতের সহগ নির্ণয় করা যায়।

ব্যাখ্যা। প্রথম লাইনে $(a+b)^2$এর সহগ, দ্বিতীয় লাইনে $(a+b)^3$এর, তৃতীয় লাইনে $(a+b)^4$ এর, ইত্যাদি ক্রমে সহগগুলি লিখিত। একটি লাইন হইতে পরের লাইনটি কিরূপে গঠিত হইয়াছে তাহা সুস্পষ্ট।

উদাহরণ 1. $(a+b)^5$কে বিস্তৃত কর।

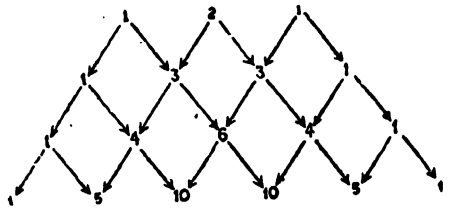
এই বিস্তৃতির 6টি পদ হইবে।

প্রথম পদ$=a^5$, দ্বিতীয় পদ$=\frac{5\times1}{1}a^4b=5a^4b$,

তৃতীয় পদ$=\frac{5\times4}{2}a^3b^2=10a^3b^2$

চতুর্থ পদ$=\frac{10\times3}{3}a^2b^3=10a^2b^3$

পঞ্চম পদ$=\frac{10\times2}{4}ab^4=5ab^4$, এবং ষষ্ঠ পদ$=\frac{5\times1}{5}b^5=b^5$.

$\therefore\quad (a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$.

দ্রষ্টব্য : যেহেতু প্রথম ও শেষ পদ হইতে সমান সমান দূরে অবস্থিত পদদ্বয়ের সহগ সমান, সুতরাং এস্থলে মাত্র প্রথম তিনটি পদের সহগ নির্ণয় করিলেই বাকী তিনটি পদের সহগ নির্ণীত হইবে।

উদা. 2. $(a-b)^7$এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর।

এই বিস্তৃতির পদ সংখ্যা=8.

ইহার প্রথম পদ $=a^7$

দ্বিতীয় পদ $=\frac{7.1}{1}a^6\left(-b\right)=-7a^6b$

তৃতীয় পদ $=\frac{7\,.\,6}{2}a^5\left(-b\right)^2=21a^5b^2$

চতুর্থ পদ $=\frac{21.5}{3}a^4\left(-b\right)^3=-35a^4b^3$

$$\therefore\ (a-b)^7=a^7-7a^6b+21a^5b^2-35a^4b^3+35a^3b^4-21a^2b^5+7ab^6-b^7.$$

প্রশ্নমালা 40

বিস্তৃত কর :—

1. $(a+b)^4$ 2. $(a-b)^5$ 3. $(a+1)^8$ 4. $(a-2b)^6$. 5. $(2x+1)^4$ 6. $(x-2)^7$

সরল কর :—

7. $(a+b)^4+(a-b)^4$ 8. $(a+b)^5-(a-b)^5$.

জটিল রাশিমালার গুণনীয়ক নির্ণয়

(Harder Factors)

65. $a^3+b^3+c^3-3abc$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিতে হইবে।

যেহেতু $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$,

$$\therefore\ a^3+b^3+c^3-3abc$$
$$=(a+b)^3+c^3-3ab(a+b)-3abc$$
$$=\{(a+b)^3+c^3\}-3ab(a+b+c)$$
$$=(a+b+c)\{(a+b)^2-(a+b)c+c^2\}-3ab(a+b+c)$$
$$=(a+b+c)\{(a+b)^2-(a+b)c+c^2-3ab\}$$
$$=(a+b+c)(a^2+2ab+b^2-ac-bc+c^2-3ab)$$
$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc).$$

[**অনুসিদ্ধান্ত।** যদি $a+b+c=0$ হয়, তবে $a^3+b^3+c^3=3abc$ হইবে।]

উদাহরণ 1. $x^3+y^3-1+3xy$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

যেহেতু $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$$\therefore \quad x^3+y^3-1+3xy=(x+y)^3-1-3xy(x+y)+3xy$$
$$=(x+y-1)\{(x+y)^2+(x+y).1+1^2\}-3xy(x+y-1)$$
$$=(x+y-1)(x^2+2xy+y^2+x+y+1-3xy)$$
$$=(x+y-1)(x^2+y^2+1-xy+x+y).$$

অথবা, সূত্রানুযায়ী রাশিটি$=(x)^3+(y)^3+(-1)^3-3(x)(y)(-1)$
$$=(x+y-1)(x^2+y^2+1-xy+x+y).$$

উদা. 2. x^6+4x^3-1কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিতে হইবে।

রাশিটি$=(x^2)^3+(x)^3+(-1)^3-3.x^2.x(-1)$
$$=(x^2+x-1)(x^4+x^2+1-x^3+x^2+x)$$
$$=(x^2+x-1)(x^4-x^3+2x^2+x+1).$$

প্রশ্নমালা 41

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :—

1. $a^3-b^3-c^3-3abc$
2. $8x^3-y^3+1+6xy$
3. $x^3+8y^3-1+6xy$
4. $8a^3-27b^3-1-18ab$
5. a^6+5a^3+8
6. $8a^6+7a^3-1$
7. $(a-b)^3-(b-c)^3+(c-a)^3+3(a-b)(b-c)(c-a)$
8. $1+8x^3+18xy-27y^3$
9. $(y-z)^3+(z-x)^3+(x-y)^3$
10. $(2x-y)^3-(x+y)^3+(2y-x)^3$.

[চক্রক্রম]

66. $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

দ্রষ্টব্য ঃ রাশিটিতে a, b, c এই তিনটি অক্ষর চক্রক্রমে অবস্থিত। এইরূপ রাশিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিতে হইলে, প্রথমতঃ ইহাকে যে কোন একটি অক্ষর (a)এর ঘাত অনুসারে সাজাইতে হইবে ; ইহাতে b ও c যুক্ত একটি রাশি উৎপাদক বাহির হইবে ; দ্বিতীয়তঃ যাহা রহিল তাহাকে bএর ঘাত অনুসারে এবং পরে c-এর ঘাত অনুসারে সাজাইলে রাশিটি সম্পূর্ণভাবে উৎপাদকে বিশ্লিষ্ট হইবে।

$$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=a^2b-a^2c+b^2c-b^2a+c^2a-c^2b$$
$$=a^2(b-c)-a(b^2-c^2)+bc(b-c)$$

[a-এর ঘাত অনুসারে সাজান হইল ; $b-c$ গুণনীয়ক বাহির হইল]

$$=(b-c)\{a^2-a(b+c)+bc\}=(b-c)\{a^2-ab-ac+bc\}$$
$$=(b-c)\{b(c-a)-a(c-a)\}$$

[b-এর ঘাত অনুসারে সাজান হইল ; ইহাতে $c-a$ গুণনীয়ক বাহির হইল]

$$=(b-c)(c-a)(b-a)=-(b-c)(c-a)(a-b)$$

[$\because$ $b-a=-(a-b)$, সুতরাং প্রথমে '−' চিহ্ন দিয়া গুণনীয়ক-গুলিকে চক্রক্রমে রাখা হইল।]

দ্রষ্টব্য : যেহেতু $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

$$=bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)$$
$$=-[a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)]$$

$\therefore$ $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ অথবা, $bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)$ $\Big\}=-(b-c)(c-a)(a-b)$.

এবং $a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)=(b-c)(c-a)(a-b)$.

67. $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিতে হইবে।

রাশিটি$=a^2b+a^2c+b^2c+b^2a+c^2a+c^2b+2abc$

$$=(a^2b+a^2c)+(ab^2+ac^2+2abc)+(b^2c+c^2b)$$
$$=a^2(b+c)+a(b^2+c^2+2bc)+bc(b+c)$$
$$=a^2(b+c)+a(b+c)^2+bc(b+c)=(b+c)\{a^2+ab+ac+bc\}$$
$$=(b+c)\{a(a+b)+c(a+b)\}=(b+c)(c+a)(a+b).$$

দ্রষ্টব্য : যেহেতু, $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc$

$$=bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+2abc$$
$$=a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)+2abc\ ;$$

সুতরাং প্রত্যেকটি$=(b+c)(c+a)(a+b)$.

68. $(ab+bc+ca)(a+b+c)-abc$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

রাশিটি$=a^2b+ab^2+abc+abc+b^2c+bc^2+ca^2+abc+c^2a-abc$

$$=a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc$$
$$=(b+c)(c+a)(a+b).$$ [অনু. 67 অনুসারে]

বিকল্প প্রণালী। মনে কর, $x=a+b+c$, তাহা হইলে

রাশিটি$=(ab+bc+ca)x-abc$

$$=x^3-x^2.x+(ab+bc+ca)x-abc$$
$$=x^3-x^2(a+b+c)+(ab+bc+ca)x-abc$$

$$=(x-a)(x-b)(x-c)$$
$$=(a+b+c-a)(a+b+c-b)(a+b+c-c)$$
$$=(b+c)(c+a)(a+b).$$

অনুসিদ্ধান্ত : যেহেতু $(ab+bc+ca)(a+b+c)-abc$
$$=(b+c)(c+a)(a+b),$$

$\therefore \quad (b+c)(c+a)(a+b)+abc=(ab+bc+ca)(a+b+c).$

69. $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিতে হইবে।

[**দ্রষ্টব্য :** a, b, c চক্রক্রমে অবস্থিত রাশিমালার উৎপাদক নির্ণয়ের সাধারণ প্রণালী যাহা পূর্ববর্তী উদাহরণে উক্ত হইয়াছে, এই রাশিমালা সম্বন্ধে তাহার ব্যতিক্রম ; নিম্নের প্রণালী হইতে ইহা পরিস্ফুট হইবে।]

রাশিটি $=\{a^2(b+c)+abc\}+\{b^2(c+a)+abc\}+\{c^2(a+b)+abc\}$
$$=a\{a(b+c)+bc\}+b\{b(c+a)+ac\}+c\{c(a+b)+ab\}$$
$$=a(ab+bc+ca)+b(ab+bc+ca)+c(ab+bc+ca)$$
$$=(ab+bc+ca)(a+b+c).$$

[**দ্রষ্টব্য :** 68 অনুচ্ছেদে অনুসিদ্ধান্ত হইতে বুঝা গেল
$(b+c)(c+a)(a+b)+abc=a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc$
$=(ab+bc+ca)(a+b+c)$]

উদাহরণ 1. $(a+1)^2(b-c)+(b+1)^2(c-a)+(c+1)^2(a-b)$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিতে হইবে।

রাশিটি $=(a^2+2a+1)(b-c)+(b^2+2b+1)(c-a)$
$$+(c^2+2c+1)(a-b)$$
$$=\{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)\}$$
$$+2\{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)\}$$
$$+\{(b-c)+(c-a)+(a-b)\}$$
$$=a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)+2\times 0+0$$
$$=a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=-(b-c)(c-a)(a-b).$$

উদা. 2. $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিতে হইবে।

রাশিটি $=a^3b-a^3c+b^3c-b^3a+c^3a-c^3b$
$$=(a^3b-a^3c)-(ab^3-ac^3)+(b^3c-bc^3)$$
$$=a^3(b-c)-a(b^3-c^3)+bc(b^2-c^2)$$
$$=a^3(b-c)-a(b-c)(b^2+bc+c^2)+bc(b+c)(b-c)$$
$$=(b-c)\{a^3-a(b^2+bc+c^2)+bc(b+c)\}$$

$$=(b-c)\{a^3-ab^2-abc-ac^2+b^2c+bc^2\}$$
$$=(b-c)\{b^2(c-a)+bc(c-a)-a(c^2-a^2)\}$$
$$=(b-c)(c-a)\{b^2+bc-a(c+a)\}$$
$$=(b-c)(c-a)\{c(b-a)+(b^2-a^2)\}$$
$$=(b-c)(c-a)(b-a)(c+b+a)$$
$$=-(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c).$$

উদা. 3. $bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+a^3+b^3+c^3$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

রাশিটি $=\{bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+3abc\}$
$+(a^3+b^3+c^3-3abc)$

$$=(a+b+c)(bc+ca+ab)$$
$$+(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$
$$=(a+b+c)(bc+ca+ab+a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$
$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2).$$

70. $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

রাশিটি $=\{a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)\}-a^3-b^3-c^3$
$$=3(b+c)(c+a)(a+b).$$

উদাহরণ 1. $(x+y+z)^3-(y+z-x)^3-(z+x-y)^3-(x+y-z)^3$-কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিতে হইবে।

মনে কর, $y+z-x=a$, $z+x-y=b$, $x+y-z=c$; তাহা হইলে
$a+b+c=x+y+z$, $b+c=2x$, $c+a=2y$ এবং $a+b=2z$.

$\therefore$ রাশিটি $=(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=3(b+c)(c+a)(a+b)$
$$=3.2x2y.2z=24xyz.$$

উদা. 2. $(a+b)^3-(b+c)^3+(c+d)^3-(d+a)^3$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিতে হইবে।

মনে কর, $b+c=x$, $-(c+d)=y$ এবং $d+a=z$.

$\therefore$ $x+y+z=b+c-c-d+d+a=a+b$;

এবং $y+z=d+a-c-d=a-c$,

$z+x=a+b+c+d$; এবং $x+y=b-d$;

এখন, প্রদত্ত রাশিটি $=(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$
$$=3(y+z)(z+x)(x+y)$$
$$=3(a-c)(b-d)(a+b+c+d).$$

71. $2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4$কে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর।

রাশিটি $=4b^2c^2-(2b^2c^2-2c^2a^2-2a^2b^2+a^4+b^4+c^4)$

$=(2bc)^2-(a^2-b^2-c^2)^2$

$=(2bc+a^2-b^2-c^2)(2bc-a^2+b^2+c^2)$

$=\{a^2-(b-c)^2\}\{(b+c)^2-a^2\}$

$=(a+b-c)(a-b+c)(b+c+a)(b+c-a)$

$=(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b).$

প্রশ্নমালা 42

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :—

1. $a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2).$
2. $bc(b^3-c^3)+ca(c^3-a^3)+ab(a^3-b^3).$
3. $(x+a)(x+b)(a-b)+(x+b)(x+c)(b-c)$
   $+(x+c)(x+a)(c-a).$
4. $(pa^2+qa+r)(b-c)+(pb^2+qb+r)(c-a)$
   $+(pc^2+qc+r)(a-b).$
5. $b^2c^2(b^2-c^2)+c^2a^2(c^2-a^2)+a^2b^2(a^2-b^2).$
6. $a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3$
7. $a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2-4abc.$
8. $x(y-z)^2+y(z-x)^2+z(x-y)^2+8xyz.$
9. $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+a^3+b^3+c^3.$
10. $a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b).$
11. $a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2).$
12. $a^4(b^2-c^2)+b^4(c^2-a^2)+c^4(a^2-b^2).$
13. $(b-c)(b+c)^3+(c-a)(c+a)^3+(a-b)(a+b)^3$
14. $(b-c)(b+c-a)^2+(c-a)(c+a-b)^2+(a-b)(a+b-c)^2.$
15. $(b+c)(c+a)(a+b)+abc+ab+bc+ca.$
16. $(y+z)(z+x)(x-y)+(z+x)(x+y)(y-z)$
    $+(x+y)(y+z)(z-x).$
17. $(x+y+z)(x^3+y^3+z^3+xyz)-x^4-y^4-z^4.$
18. $(a^2-b^2)(a+b)+(b^2-c^2)(b+c)+(c^2-a^2)(c+a).$
19. $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)+8abc.$

20. $x(1+y^2)(1+z^2)+y(1+z^2)(1+x^2)+z(1+x^2)(1+y^2)+4xyz.$

21. $x^2(b-c)+b^2(c-x)+c^2(x-b).$ [D. B. 1927]

72. দ্বিমাত্রিক রাশির উৎপাদকে বিশ্লেষণ :

ইতিপূর্বে ax^2+bx+c আকারের সহজ সহজ রাশির যে নিয়মে উৎপাদক নির্ণয় করা হইয়াছে, উক্ত আকারের জটিল রাশিগুলিরও সেই নিয়মে উৎপাদক নির্ণয় করা হইবে। নিম্ন উদাহরণগুলিতে ইহা পরিস্ফুট হইবে।

উদাহরণ 1. $12x^2+xy-6y^2-31x-2y+20$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিতে হইবে।

রাশিটি x বা y-এর দ্বিমাত্রিক ; সুতরাং x-এর ঘাত অনুসারে সাজাইলে রাশিটি হয় $12x^2+(y-31)x-(6y^2+2y-20)$

$$=12x^2+(y-31)x-2(3y^2+y-10)$$

এখন, শেষপদের $3y^2+y-10$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিলে

প্রদত্ত রাশিটি$=12x^2+(y-31)x-2(y+2)(3y-5)$ হয়।

এখন, x^2-এর সহগ 12 এবং শেষপদের গুণফল অর্থাৎ $24(y+2)(3y-5)$কে এমন দুইটি গুণনীয়কে পরিণত করিতে হইবে যাহাদের সমষ্টি বা অন্তর x-এর সহগ $(y-31)$ হইবে। স্পষ্টতঃ $24(y+2)(3y-5)$কে উক্ত প্রকারে পরিণত করিলে $3(3y-5)$ এবং $8(y+2)$ হয় এবং ইহাদের অন্তরফল$=(9y-15)-(8y+16)=y-31$ হয়,

সুতরাং রাশিটি$=12x^2+\{3(3y-5)-8(y+2)\}x-2(y+2)(3y-5)$

$$=12x^2+3(3y-5)x-8(y+2)x-2(y+2)(3y-5)$$
$$=3x(4x+3y-5)-2(y+2)(4x+3y-5)$$
$$=(4x+3y-5)(3x-2y-4)$$

বিকল্প প্রণালী। রাশিটির দ্বিমাত্রিক পদ $12x^2+xy-6y^2$এর গুণনীয়ক হইল $(4x+3y)(3x-2y)$, সুতরাং রাশিটির গুণনীয়কের আকার হইবে $(4x+3y+p)(3x-2y+q)$, p ও q এখানে x বা y-নিরপেক্ষ সংখ্যা।

$$\therefore\ (4x+3y+p)(3x-2y+q)\equiv12x^2+xy-6y^2-31x-2y+20$$

অর্থাৎ $12x^2+xy-6y^2+x(3p+4q)+y(3q-2p)+pq$

$$\equiv12x^2+xy-6y^2-31x-2y+20.$$

এখন যেহেতু ইহা অভেদ, ∴ উভয়পক্ষের প্রতি অক্ষরের সহগ সমান হইবে।

$\therefore\ 3p+4q=-31\cdots(1),\ 3q-2p=-2\cdots(2)$ এবং $pq=20\cdots(3).$

(1) ও (2) হইতে পাই $p=-5$ এবং $q=-4$; ইহাদের দ্বারা $pq=20$ সমীকরণটি সিদ্ধ, $\therefore\ p=-5,\ q=-4.$

∴ নির্ণেয় গুণনীয়ক$=(4x+3y-5)(3x-2y-4).$

দ্বিতীয় বিকল্প প্রণালী। ঐ রাশিমালায় $x=0$ ধরিলে

রাশিটি$=-6y^2-2y+20=(-2y-4)(3y-5)\cdots(a)$

$y=0$ ধরিলে রাশিটি$=12x^2-31x+20=(4x-5)(3x-4)\cdots(b)$

(a) ও (b) তুলনা করিলে রাশিটি$=(4x+3y-5)(3x-2y-4)$;

কারণ, ইহা $x=0$ ধরিলে (a) হয় এবং $y=0$ ধরিলে (b) হয়।

উদা. 2. $2x^2+xy-3y^2-xz-4yz-z^2$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিতে হইবে।

[লক্ষ্য কর, ইহা x, y, z-এর দ্বিমাত্রিক সমমাত্র রাশি, অর্থাৎ প্রত্যেক পদের দুই মাত্রা। ইহাকে যে কোন অক্ষরের ঘাত অনুসারে সাজাইতে হইবে।]

রাশিটি$=2x^2+(y-z)x-(3y^2+4yz+z^2)$

$=2x^2+(y-z)x-(3y+z)(y+z)$

$=2x^2+\{(3y+z)-2(y+z)\}x-(3y+z)(y+z)$

$=2x^2+(3y+z)x-2(y+z)x-(3y+z)(y+z)$

$=x(2x+3y+z)-(y+z)(2x+3y+z)$

$=(2x+3y+z)(x-y-z).$

দ্বিতীয় প্রণালী।

$x=0$ ধরিলে রাশিটি$=-3y^2-4yz-z^2=-(3y+z)(y+z)\cdots(1)$

$y=0$ ধরিলে রাশিটি$=2x^2-xz-z^2=(2x+z)(x-z)\qquad\cdots(2)$

$z=0$ ধরিলে রাশিটি$=2x^2+xy-3y^2=(2x+3y)(x-y)\qquad\cdots(3)$

(1), (2) ও (3) তুলনা করিলে রাশিটি$=(2x+3y+z)(x-y-z)$.

প্রশ্নমালা 43

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :—

1. $64x^2+144xy-243y^2$
2. $144x^2-337xy+144y^2$
3. $2a^2+ab-6b^2-4a-b+2$
4. $4a^2-4ab-35b^2-14a+13b+12$
5. $2x^2+xy-6y^2-5x+4y+2$
6. $15x^2-16xy-15y^2-37x+5y+20$
7. $2a^2-ab-6b^2-3a-8b-2$
8. $6a^2+31ab+5b^2-17ac-27bc+10c^2$
9. $x^2+4xy-xz-12yz-6z^2$
10. $p^2-3pq+2q^2-2qr-4r^2$

11. $a^2-4ab+3b^2+ac-3bc$

12, $2x^2+(4b+5a)x+4a(4b-3a)$

13. $2a^2+ab-3b^2-ac-4bc-c^2$

14. $16a^2-50ab-21b^2+7b-2a$

15. $12px^2+23px+32x-9p+72.$

73. পরীক্ষা দ্বারা গুণনীয়ক নির্ণয় (Factorisation by Trial) :

ইতিপূর্বে প্রমাণিত হইয়াছে, কোন x-এর অপেক্ষক $F(x)$এর যদি $x-a$ গুণনীয়ক থাকে, তবে $F(a)=0$ হইবে। ইহাই গুণনীয়ক প্রতিজ্ঞা।

উদাহরণ 1. $4x^3-9x^2+3x+2$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিতে হইবে।

দ্রষ্টব্য : রাশিটি ত্রিমাত্রিক ; সুতরাং ইহার গুণনীয়ক এক মাত্রার তিনটি, অথবা এক মাত্রার একটি এবং দুই মাত্রার একটি হইবে।

এখন $x=1$ ধরিলে রাশিটি $=4-9+3+2=0$; $\therefore$ $x-1$ একটি গুণনীয়ক।

$x=-1$ ধরিলে রাশিটি $=-4-9-3+2=0$ নহে ;

$\therefore$ $x+1$ গুণনীয়ক নহে।

এখন রাশিটিকে $x-1$ দ্বারা ভাগ করিয়া ভাগফলটি আর একটি দ্বিমাত্রিক গুণনীয়ক হইবে। অর্থাৎ রাশিটি $=4x^2(x-1)-5x(x-1)-2(x-1)$
$=(x-1)(4x^2-5x-2).$

উদা. 2. x^3+3x^2+8x+6কে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করিতে হইবে।

6-এর উৎপাদক, 1, 2, 3, 6 এবং -1, -2, -3, -6 ; সুতরাং পরীক্ষা এই কয়টি অঙ্কের মধ্যে সীমাবদ্ধ রাখিলেই চলিবে।

$x=1$ হইলে, রাশিটি $=1+3+8+6=18$, $\therefore$ $x-1$ গুণনীয়ক নহে।

$x=-1$ হইলে, রাশিটি $=-1+3-8+6=0$, $\therefore$ $x+1$ গুণনীয়ক।

আর পরীক্ষার আবশ্যক নাই ; কারণ, রাশিটি ত্রিমাত্রিক ; $x+1$ একটি গুণনীয়ক, আর একটি গুণনীয়ক দ্বিমাত্রিক ; ইহা সহজবোধ্য।

রাশিটি $=x^2(x+1)+2x(x+1)+6(x+1)=(x+1)(x^2+2x+6).$

[**দ্রষ্টব্য :** উদাহরণ 1 ও 2 হইতে বুঝা গেল কোন রাশির সহগগুলির বৈজিক সমষ্টি শূন্য হইলে ইহার গুণনীয়ক হইবে $x-1$, এবং সহগগুলির একান্তর সমষ্টি সমান হইলে ইহার গুণনীয়ক হইবে $x+1$.]

প্রশ্নমালা 44

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :—

1. x^3+x^2+x+1
2. x^3-x^2+x-1
3. x^3+5x^2-2x-4
4. $x^3+7x^2+7x+1.$

5. $x^3+4x^2+11x+8$　　6. $2x^3+x^2-9x-9$

7. x^3-5x+4　　8. $3a^3+2a+5$.

9. $x^4+x^3-2x^2+2x+4$　　10. $2x^4-3x^3-3x-2$

11. $5a^3+11a^2+4a-2$　　12. a^3-6a+5

13. $12+4x-3x^2-x^3$　　14. $4a^4+11a^3-47a^2-9a+5$.

74. বিপরীত রাশিমালার গুণনীয়ক নির্ণয় (Factorisation of Reciprocal Expressions) : যে রাশিমালার প্রথম পদ ও শেষ পদ হইতে সমদূরবর্তী পদগুলির সহগ সমান তাহাকে বিপরীত রাশিমালা বলে। যেমন, $2x^4+3x^3+4x^2+3x+2$. এই প্রকার রাশিমালার গুণনীয়ক নির্ণয়ের প্রণালী প্রদর্শিত হইতেছে।

উদাহরণ 1. $x^4+5x^3+4x^2-5x+1$কে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর।

রাশিটি $=(x^4+1)+(5x^3-5x)+4x^2$

[সমান সমান সহগবিশিষ্ট পদদ্বয় একত্র করিয়া]

$=(x^4+1)+5x(x^2-1)+4x^2$

$=\{(x^2-1)^2+2x^2\}+5x(x^2-1)+4x^2$

$=(x^2-1)^2+5x(x^2-1)+6x^2$

$=a^2+5xa+6x^2$ [$x^2-1=a$ ধরিয়া]

$=a^2+3xa+2xa+6x^2=a(a+3x)+2x(a+3x)$

$=(a+3x)(a+2x)=(x^2+3x-1)(x^2+2x-1)$

[**দ্রষ্টব্য :** চারিমাত্রার বিপরীত রাশিমালাকে দ্বিমাত্রিক রাশিমালায় পরিবর্তিত করিয়া গুণনীয়ক নির্ণয় করা হইয়াছে।]

উদা. 2. $a^4+3a^3-16a^2+3a+1$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

রাশিটি $=(a^4+1)+(3a^3+3a)-16a^2$

$=(a^2+1)^2-2a^2+3a(a^2+1)-16a^2$

$=(a^2+1)^2+3a(a^2+1)-18a^2$

$=x^2+3ax-18a^2$ [$a^2+1=x$ ধরিয়া]

$=(x+6a)(x-3a)=(a^2+6a+1)(a^2-3a+1)$.

প্রশ্নমালা 45

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :—

1. $a^4-4a^3-10a^2-4a+1$　　2. $x^4+5x^3+8x^2+5x+1$

3. $4a^4-7a^3-5a^2+7a+4$　　4. $x^5-x^4+x^3-x^2+x-1$

5. $x^4+4x^3+7x^2+8x+4$　　6. $2x^4-x^3-2x^2-x+2$

7. $x^4-10x^3+26x^2-10x+1$

8. $x^4-5x^3-64x^2-5x+1$

9. $a^4+6a^3+4a^2-15a+6$ [C. U. '48]

10. $x^4+x^3+2x^2+x+1.$ [C. U. '48]

75. রাশিমালার পদগুলির সুবিন্যাস দ্বারা গুণনীয়ক নির্ণয় :

পূর্ব অনুচ্ছেদগুলিতে যে সকল নিয়ম দেওয়া হইয়াছে তাহা সাধারণ নিয়ম হইলেও বিশেষ বিশেষ ক্ষেত্রে উহাদের প্রয়োগ দুঃসাধ্য হয়। এই সব ক্ষেত্রে রাশিমালার পদগুলির সুবিন্যাস দ্বারা গুণনীয়ক নির্ণয় করা যাইতে পারে। নিম্নে এই ধরণের কয়েকটি উদাহরণ দেওয়া যাইতেছে।

উদাহরণ 1. a^4-4a+3কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

রাশিটি$=(a^4-1)-4(a-1)=(a-1)(a+1)(a^2+1)-4(a-1)$

$=(a-1)\{a^3+a^2+a-3\}$

$=(a-1)\{(a^3-1)+(a^2-1)+(a-1)\}$

$=(a-1)(a-1)(a^2+a+1+a+1+1)$

$=(a-1)^2(a^2+2a+3).$

উদা. 2. $(x+1)^4+4(x-1)^4$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

মনে কর, $x+1=a$, এবং $x-1=b$; তাহা হইলে

রাশিটি$=a^4+4b^4=(a^2+2b^2)^2-(2ab)^2$

$=(a^2+2ab+2b^2)(a^2-2ab+2b^2)$

$=\{(a+b)^2+b^2\}\{(a-b)^2+b^2\}$

$=\{(x+1+x-1)^2+(x-1)^2\}\{(x+1-x+1)^2+(x-1)^2\}$

$=(4x^2+x^2-2x+1)(4+x^2-2x+1)$

$=(5x^2-2x+1)(x^2-2x+5).$

উদা. 3. $(x^2+6x+2)(x^2+6x-4)-27$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

মনে কর, $x^2+6x=a$, তাহা হইলে

রাশিটি$=(a+2)(a-4)-27=a^2-2a-35=(a-7)(a+5)$

$=(x^2+6x-7)(x^2+6x+5)=(x+7)(x-1)(x+5)(x+1).$

উদা. 4. $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)-120$কে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর।

রাশিটি$=\{(x-1)(x-4)\}\{(x-2)(x-3)\}-120$

$=(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)-120$

$=(a+4)(a+6)-120$ [$x^2-5x=a$ ধরিয়া]

$=a^2+10a-96=(a-6)(a+16)$

$=(x^2-5x-6)(x^2-5x+16)$

$=(x+1)(x-6)(x^2-5x+16).$

উদা. 5. $(a^2-b^2)(x^2-y^2)+4abxy$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

রাশিটি$=a^2x^2-a^2y^2-b^2x^2+b^2y^2+4abxy$

$=(a^2x^2+2abxy+b^2y^2)-(a^2y^2-2abxy+b^2x^2)$

$=(ax+by)^2-(ay-bx)^2$

$=(ax+by+ay-bx)(ax+by-ay+bx).$

উদা. 6. $4a^4-12a^3+15a^2-9a+2$কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

রাশিটি$=(4a^4-12a^3+9a^2)+(6a^2-9a)+2$

$=(2a^2-3a)^2+3(2a^2-3a)+2$

$=x^2+3x+2$ [$x=2a^2-3a$ ধরিয়া]

$=(x+1)(x+2)=(2a^2-3a+1)(2a^2-3a+2)$

$=(2a-1)(a-1)(2a^2-3a+2).$

প্রশ্নমালা 46

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :—

1. x^3+7x^2-36
2. a^3+4a^2+72
3. $2a^3-3a^2+3a-1$
4. $x^4-13x-42$
5. $x^3+5x^2+10x+8$
6. $3x^4-5x^3-8$
7. $(a+b)^3+(a+b)-2$
8. $(x^2+3x)^2-(x^2+3x)-6$
9. $x(x+3)(x+6)(x+9)+56$
10. $(x+1)(x+3)(x-4)(x-6)+24$
11. $(x^2+7x+4)(x^2+7x+6)-48$
12. $a(a+1)(a+2)(a+3)-15$
13. $(3x^2-2x-10)^2+6(3x^2-2x-10)+8$
14. $(x^2-1)(y^2-1)+4xy$
15. $4(x-a)^3-27a^2x$
16. $(a^2-b^2)(x^2+y^2)+2(a^2+b^2)xy$
17. $x^3+(x+a)^3-9a^3$
18. $ax^3-(a^2+c)x^2+a(b+c)x-bc$
19. $(1+x)^2(1+y^2)-(1+y)^2(1+x^2)$
20. $(xy+1)^4-4xy(xy+1)^2-(x^2-y^2)^2$
21. $x^2+2a^2+2b^2+3x(a-b)-4ab$
22. $x^4-6x^3+15x^2-18x+5$
23. $(a^2-b^2)(b-c)-(b^2-c^2)(a-b)$
24. $x^3(x-4)-x(x-10)+4$
25. $x^2(x^2-5x+14)-4(5x-4)$
26. $a^2-b^2-c^2-2bc+a-b-c$
27. $a^3(2a-5)+a(6a-5)+2.$

সরল সমীকরণ (Simple Equation)

(একটি অজ্ঞাতরাশি-বিশিষ্ট)

79. সমীকরণ সমাধানের যে নিয়ম পূর্বে উল্লিখিত হইয়াছে, এখানে অপেক্ষাকৃত জটিল সমীকরণ সমাধানে সেই নিয়মই ব্যবহৃত হইবে। মোট কথা সমীকরণের উভয় পক্ষকে প্রতিক্ষেত্রেই সরল করিয়া রাখিতে হইবে।

উদাহরণ 1. সমাধান কর : $(x+2)(x-3)+(x+3)(x-4)=x(2x-5)$.

বামপক্ষ$=x^2-x-6+x^2-x-12=2x^2-2x-18$;

দক্ষিণপক্ষ$=2x^2-5x$. $\therefore\ 2x^2-2x-18=2x^2-5x$,

অথবা, $2x^2-2x-2x^2+5x=18$ (পক্ষান্তর করিয়া)

অথবা, $3x=18$, $\therefore\ x=6$.

উদা. 2. সমাধান কর : $\dfrac{x-2}{2}+\dfrac{x-3}{3}+\dfrac{x-4}{4}=\dfrac{x-5}{5}$.

এখানে, হরগুলির ল. সা. গু.$=60$; উভয় পক্ষকে 60 দিয়া গুণ করিলে,

$$\frac{x-2}{2}\times 60+\frac{x-3}{3}\times 60+\frac{x-4}{4}\times 60=\frac{x-5}{5}\times 60$$

অথবা, $30(x-2)+20(x-3)+15(x-4)=12(x-5)$

অথবা, $30x-60+20x-60+15x-60=12x-60$

অথবা, $65x-12x=120$, অথবা, $53x=120$, $\therefore\ x=\frac{120}{53}$.

উদা. 3. সমাধান কর : $\dfrac{a-x}{a}+\dfrac{2a-x}{2a}=\dfrac{3a-x}{3a}$.

উভয় পক্ষকে হরগুলির ল. সা. গু. $6a$ দ্বারা গুণ করিয়া পাই

$6(a-x)+3(2a-x)=2(3a-x)$, বা, $6a-6x+6a-3x=6a-2x$,

বা, $-9x+2x=6a-12a$, বা, $-7x=-6a$, $\therefore\ x=\frac{6}{7}a$.

প্রশ্নমালা 47

সমাধান কর (Solve) :—

1. $(x-1)(x-2)=x^2+5$
2. $(x+a)(x+b)=x^2+ab$
3. $(x+1)^2+(x+2)(x+3)=2x(x+7)$
4. $(x-3)(x-4)+(x-4)(x+5)=2x^2-3$
5. $(x+1)^2+(x-2)^2+(x+3)^2=3x^2-14$
6. $a(x-a)+b(x-b)+c(x-c)=2(ab+ac+bc)$
7. $(x+a+b)^2=2x^2-(x+a-b)^2$

8. $x=\frac{ax-b^2}{c}$ 9. $\frac{a}{bx}+\frac{b}{ax}=a^2+b^2$

10. $\frac{x-1}{4}+\frac{x-2}{3}=\frac{x+1}{2}$ 11. $\frac{x-3}{4}+\left(2x-6\right)=\frac{6x-3}{2}$

12. $\frac{3+x}{4}-\frac{x-2}{3}-\frac{x+1}{2}+2=0$ 13. $\frac{4x-9}{14}-\frac{12x-11}{7}=2$

✓ 14. $\frac{1}{2}(2x+3)-\frac{1}{12}(x-1)=\frac{2}{3}(x-1)$

15. $\frac{x-a}{2}-\frac{4x-a}{3}+\frac{5x-a}{4}=0$

✓ 16. $\frac{1}{3}(x-3)+\frac{1}{4}(x-8)+\frac{1}{5}(x-4)=\frac{37}{15}$

17. $\frac{ax-b}{bc}+\frac{bx-c}{ca}+\frac{cx-a}{ab}=0$

✓ 18. $\frac{5}{6}x-\frac{\frac{2}{3}x-1}{3}=x+\frac{\frac{1}{3}x-4}{2}-1$ 19. $\frac{ax+b}{a+b}=\frac{cx-d}{c-d}$

20. $\frac{ax-1}{a}+\frac{bx-1}{b}=\frac{1-cx}{c}$ 21. $\frac{x-a}{a}+\frac{x-b}{b}+\frac{x-c}{c}=-3$

22. $\frac{x-a}{b}+\frac{x+b}{a}=0$ 23. $\frac{a}{b}\left(1-\frac{a}{x}\right)+\frac{b}{a}\left(1-\frac{b}{x}\right)=1$

24. $a+\frac{bx}{a}=\frac{ax-b^2}{b}$ 25. $\frac{x}{bc}-\frac{3x-1}{ca}-\frac{x+3a}{ab}=0.$

77. দশমিক ভগ্নাংশ সহগ সংযুক্ত সমীকরণের উদাহরণ।

উদাহরণ। সমাধান কর : $\frac{x}{\cdot5}-\frac{1}{\cdot05}+\frac{x}{\cdot005}-\frac{1}{\cdot0005}=0.$ [ক. প্র.]

দশমিকগুলিকে ভগ্নাংশে পরিবর্তিত করিয়া সমীকরণটি হইল

$$\frac{x}{\frac{1}{2}}-\frac{1}{\frac{1}{20}}+\frac{x}{\frac{1}{200}}-\frac{1}{\frac{1}{2000}}=0,$$

বা, $2x-20+200x-2000=0$, বা, $202x=2020$, $\therefore\ x=10.$

প্রশ্নমালা 48

সমাধান কর :—

1. $\cdot19x-\cdot4=\cdot1x-\cdot31x$ 2. $\cdot02x+x+1\cdot32x=1\cdot17$

3. $x-\frac{2x-2\cdot3}{\cdot7}+\frac{x-5}{\cdot35}=0$ 4. $\cdot5x+\frac{\cdot02x+\cdot07}{\cdot03}=9\cdot5+\frac{x+2}{9}$

5. $\dfrac{x}{0\cdot4}-\dfrac{x-4}{0\cdot6}=\dfrac{2-3x}{0\cdot5}+30$

6. $\dfrac{0\cdot3x-0\cdot2}{0\cdot5}-\dfrac{0\cdot5x+0\cdot1}{1\cdot6}=\dfrac{4x-1}{15}$

7. $0\cdot2(x-0\cdot5)-0\cdot35=0\cdot5(0\cdot25x-0\cdot125)$

8. $\dfrac{5\cdot2x}{13}-\dfrac{1\cdot2x}{5}\left(\dfrac{3}{5}-0\cdot1\right)=0\cdot1x+\cdot358+\dfrac{2-5x}{4}$

9. $\dfrac{0\cdot3x+1\cdot8}{0\cdot07}-\dfrac{0\cdot3x}{0\cdot1}=\dfrac{0\cdot9x-0\cdot3}{0\cdot09}$

10. $0\cdot65x+\dfrac{0\cdot585x-0\cdot975}{0\cdot6}=\dfrac{1\cdot56}{0\cdot2}+\dfrac{0\cdot78-0\cdot39x}{0\cdot9}.$

78. সমীকরণের গঠন অনুসারে সাধারণ নিয়ম প্রয়োগ করিবার পূর্বে নানাবিধ কৌশল অবলম্বন করা হয় ; ইহাতে সমীকরণটির সমাধান অপেক্ষাকৃত সহজে হয়।

(ক) **বজ্রগুণন প্রক্রিয়া :** যদি $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ হয়, তবে $ad=bc$ হইবে।

কারণ, উভয়পক্ষকে bd দ্বারা গুণ করিলে $\frac{abd}{b}=\frac{cbd}{d}$, $\therefore \quad ad=bc.$

উদাহরণ 1. $\dfrac{x+5}{2x+3}=\dfrac{x+3}{2x+1}$ কে সমাধান করিতে হইবে।

বজ্রগুণন করিয়া, $(x+5)(2x+1)=(2x+3)(x+3)$

বা, $2x^2+11x+5=2x^2+9x+9$

বা, $2x^2+11x-2x^2-9x=9-5$

বা, $2x=4, \quad \therefore \quad x=2.$

(খ) **সুবিধামত পক্ষান্তর প্রক্রিয়া :**

উদা. 2. সমাধান কর : $\dfrac{12x+1}{4}=\dfrac{15x-1}{5}+\dfrac{2x-5}{3x-1}.$

এস্থলে, লক্ষ্য কর দক্ষিণপক্ষের প্রথম পদটিকে বামদিকে আনিয়া বামপক্ষকে সরল করাই সুবিধা। এইরূপে সমীকরণটি হইল

$$\frac{12x+1}{4}-\frac{15x-1}{5}=\frac{2x-5}{3x-1},$$

বা, $\dfrac{60x+5-60x+4}{20}=\dfrac{2x-5}{3x-1}$, বা, $\dfrac{9}{20}=\dfrac{2x-5}{3x-1}$,

বা, $9(3x-1)=20(2x-5)$ (বজ্রগুণন দ্বারা)

বা, $27x-9=40x-100$, অথবা, $27x-40x=9-100$

বা, $-13x=-91, \quad \therefore \quad x=7.$

(গ) **সুবিধামত পদগুলিকে বিচ্ছিন্নকরণ :**

উদা. 3. সমাধান কর : $\frac{5}{x+2}+\frac{6}{x-4}=\frac{11}{x-3}$.

এখানে, $\because \frac{11}{x-3}=\frac{5}{x-3}+\frac{6}{x-3}$, $\therefore \frac{5}{x+2}+\frac{6}{x-4}=\frac{5}{x-3}+\frac{6}{x-3}$

অথবা, $\frac{5}{x+2}-\frac{5}{x-3}=\frac{6}{x-3}-\frac{6}{x-4}$

অথবা, $\frac{5x-15-5x-10}{(x+2)(x-3)}=\frac{6x-24-6x+18}{(x-3)(x-4)}$

অথবা, $\frac{-25}{(x+2)(x-3)}=\frac{-6}{(x-3)(x-4)}$

অথবা, $\frac{25}{x+2}=\frac{6}{x-4}$

অথবা, $25x-100=6x+12$, বা, $19x=112$, $\therefore x=\frac{112}{19}$.

(ঘ) **ভাগ প্রক্রিয়া :**

উদা. 4. সমাধান কর : $\frac{2x-6}{x-4}+\frac{6x-12}{2x-5}=\frac{10x-28}{2x-7}$.

প্রত্যেক ভগ্নাংশের লবকে হর দ্বারা ভাগ করিয়া সম্পূর্ণ ভাগফল বসাইলে সমীকরণটি হয়, $2+\frac{2}{x-4}+3+\frac{3}{2x-5}=5+\frac{7}{2x-7}$,

বা, $\frac{2}{x-4}+\frac{3}{2x-5}=\frac{7}{2x-7}$,

বা, $\frac{2}{x-4}+\frac{3}{2x-5}=\frac{4}{2x-7}+\frac{3}{2x-7}$

বা, $\frac{2}{x-4}-\frac{4}{2x-7}=\frac{3}{2x-7}-\frac{3}{2x-5}$ [পক্ষান্তর করিয়া]

বা, $\frac{4x-14-4x+16}{(x-4)(2x-7)}=\frac{6x-15-6x+21}{(2x-7)(2x-5)}$

বা, $\frac{2}{(x-4)(2x-7)}=\frac{6}{(2x-7)(2x-5)}$, বা, $\frac{2}{x-4}=\frac{6}{2x-5}$

বা, $4x-10=6x-24$, বা, $2x=14$, $\therefore x=7$.

(ঙ) **বিয়োগ প্রক্রিয়া :** ভাগ প্রক্রিয়ার পরিবর্তে সুবিধামত সংখ্যা বিয়োগ করিলেও সমাধান সহজ হয়।

উদা. 5. সমাধান কর : $\frac{3x-8}{x-3}+\frac{4x-25}{x-6}=\frac{5x-9}{x-2}+\frac{2x-11}{x-5}$

$$\frac{3x-8}{x-3}-3+\frac{4x-25}{x-6}-4=\frac{5x-9}{x-2}-5+\frac{2x-11}{x-5}-2$$

বা, $\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-6}=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-5}$

বা, $\frac{x-6-x+3}{x^2-9x+18}=\frac{x-5-x+2}{x^2-7x+10}$

বা, $\frac{-3}{x^2-9x+18}=\frac{-3}{x^2-7x+10}$

$\therefore \quad x^2-7x+10=x^2-9x+18, \quad \therefore \quad 2x=8, \quad \therefore \; x=4.$

(চ) **বিবিধ কৌশল :**

উদা. 6. সমাধান কর : $\frac{6x^2+17x+7}{9x^2-3x-20}=\frac{3x+7}{3x-5}.$

দ্রষ্টব্য : যদি $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ হয়, তবে $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ হইবে।

কারণ, $\frac{a}{b}\times\frac{b}{c}=\frac{c}{d}\times\frac{b}{c}, \quad \therefore \quad \frac{a}{c}=\frac{b}{d}.$

এই প্রণালী অবলম্বন করিলে, সমীকরণটি হয়

$$\frac{6x^2+17x+7}{3x+7}=\frac{9x^2-3x-20}{3x-5}$$

বা, $\frac{(3x+7)(2x+1)}{3x+7}=\frac{(3x-5)(3x+4)}{3x-5}$

বা, $2x+1=3x+4, \quad \therefore \quad x=-3.$

উদা. 7. সমাধান কর : $\frac{x-a}{b+c}+\frac{x-b}{c+a}+\frac{x-c}{a+b}=3.$

প্রতি ভগ্নাংশ হইতে 1 বিয়োগ করিলে

$$\frac{x-a}{b+c}-1+\frac{x-b}{c+a}-1+\frac{x-c}{a+b}-1=3-3$$

অথবা, $\frac{x-a-b-c}{b+c}+\frac{x-b-c-a}{c+a}+\frac{x-c-a-b}{a+b}=0$

অথবা, $\left(x-a-b-c\right)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)=0.$

এখন বামপক্ষটি দুইটি রাশির গুণফল হইল ; ইহার মান শূন্য হইতে হইলে যে কোন একটি রাশিকে শূন্য হইতে হইবে। এখানে স্পষ্টতঃ দ্বিতীয় গুণনীয়কটি শূন্য হইতে পারে না, কারণ a, b, c-র মান সম্বন্ধে কিছু জানা নাই।

$\therefore\ x-a-b-c=0,\quad \therefore\ x=a+b+c.$

উদা. 8. সমাধান কর : $\dfrac{1}{x-a}-\dfrac{1}{x-a+c}=\dfrac{1}{x-b-c}-\dfrac{1}{x-b}.$

পক্ষান্তর করিয়া, $\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x-b}=\dfrac{1}{x-b-c}+\dfrac{1}{x-a+c}$

অথবা, $\dfrac{x-b+x-a}{(x-a)(x-b)}=\dfrac{x-a+c+x-b-c}{(x-b-c)(x-a+c)}$

অথবা, $\dfrac{2x-a-b}{(x-a)(x-b)}-\dfrac{2x-a-b}{(x-b-c)(x-a+c)}=0$

অথবা, $\left(2x-a-b\right)\left\{\dfrac{1}{(x-a)(x-b)}-\dfrac{1}{(x-b-c)(x-a+c)}\right\}=0$

এখানে প্রথম গুণনীয়ক $2x-a-b=0$ হইলে $x=\frac{1}{2}(a+b)$ হয় ;
এবং দ্বিতীয় গুণনীয়কটি $=0$ হইলে

$(x-a)(x-b)=(x-b-c)(x-a+c)$ হয়

অর্থাৎ $x^2-(a+b)x+ab=x^2-(a+b)x+(b+c)(a-c)$

অর্থাৎ $ab=ab+ac-bc-c^2$

অর্থাৎ $a-b-c=0$, অর্থাৎ $a=b+c$ হয় ;

কিন্তু ইহা হইতে পারে না, কারণ $a=b+c$ হইলে সমীকরণটি অভেদে পরিণত হয়। $\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x=\frac{1}{2}(a+b)$.

প্রশ্নমালা 49

সমাধান কর :—

1. $\dfrac{4}{x+2}=\dfrac{3}{x+5}$ 2. $\dfrac{x+2}{x-1}=1-\dfrac{1}{x-3}$ 3. $\dfrac{x-a}{x-b}=\dfrac{x+a}{x+b}$

4. $\dfrac{ax+b}{cx+a}=\dfrac{ax+c}{cx+b}$ 5. $\dfrac{2(x-3)}{2x+5}-\dfrac{x+6}{x-3}=0$ 6. $\dfrac{1}{x}-\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}=0$

7. $\dfrac{x+a}{x+b}=\dfrac{x+3a}{x+a+b}$ 8. $\dfrac{7x^2-4}{56x-47}+\dfrac{7x-11}{6}=\dfrac{31x-41}{24}$

9. $\dfrac{13x-16}{15x-9}+\dfrac{98x-73}{21}=\dfrac{14x-9}{3}$ 10. $\dfrac{2x}{2x-1}+\dfrac{2x+1}{2x}=2$

11. $\dfrac{1}{x-8}+\dfrac{1}{x-4}=\dfrac{1}{x-5}+\dfrac{1}{x-7}$

12. $\frac{1}{x-5}-\frac{1}{x-6}=\frac{1}{x-8}-\frac{1}{x-9}$

13. $\frac{3}{x-2}+\frac{4}{x-3}=\frac{7}{x-4}$

14. $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{2x+3}=\frac{6}{3x+5}$

15. $\frac{15}{3x+11}-\frac{7}{3x+5}=\frac{8}{3x+14}$

16. $\frac{9}{3x-4}-\frac{8}{x+7}+\frac{20}{4x+1}=0$

17. $\frac{1}{x-6a}+\frac{2}{x+3a}+\frac{3}{x-2a}=\frac{6}{x-a}$

18. $\frac{x+1}{x-1}+\frac{x+2}{x-2}=\frac{22x+30}{11x-18}$

19. $\frac{2x+3}{x+1}-\frac{4x+5}{4x+4}=\frac{3x+3}{3x+1}$

20. $\frac{3x+2}{x-1}+\frac{2(x-2)}{x+2}=5$ [C. U. '20 ; D. B. '29]

21. $\frac{x-1}{x-2}-\frac{x-2}{x-3}=\frac{x-5}{x-6}-\frac{x-6}{x-7}$

22. $\frac{2x+1}{2x-1}+\frac{3x+1}{3x-2}=\frac{3x+2}{3x-1}+\frac{6x+1}{6x-5}$

23. $\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+b}=\frac{1}{x+a+c}+\frac{1}{x+b-c}$ [C. U. '40]

24. $\frac{a}{x-a}+\frac{b}{x-b}=\frac{a+b}{x-a-b}$ [C. U. '48]

25. $\frac{x-a}{b}+\frac{x-b}{a}+\frac{x-3a-3b}{a+b}=0$ [C. U. '11]

26. $\frac{x-bc}{b+c}+\frac{x-ca}{c+a}+\frac{x-ab}{a+b}=a+b+c$

27. $\frac{x-b-c}{1+bc}+\frac{x-c-a}{1+ca}+\frac{x-a-b}{1+ab}=a+b+c$

28. $\frac{bc(ax-1)}{b+c}+\frac{ca(bx-1)}{c+a}+\frac{ab(cx-1)}{a+b}=a+b+c$

29. $\frac{ax+a^2}{b+c}+\frac{bx+b^2}{c+a}+\frac{cx+c^2}{a+b}+a+b+c=0$ [C. U. '42]

30. $\frac{x-a^2}{b+c}+\frac{x-b^2}{c+a}+\frac{x-c^2}{a+b}=4(a+b+c)$

31. $\frac{x-a^3}{b^2-bc+c^2}+\frac{x-b^3}{c^2-ca+a^2}+\frac{x-c^3}{a^2-ab+b^2}=2(a+b+c)$

32. $\dfrac{x-a}{b+c+2a}+\dfrac{x-b}{c+a+2b}+\dfrac{x-c}{a+b+2c}=-3$

33. $\dfrac{x+a^2+2c^2}{b+c}+\dfrac{x+b^2+2a^2}{c+a}+\dfrac{x+c^2+2b^2}{a+b}=0$

34. $\dfrac{x-a^3}{b+c}+\dfrac{x-b^3}{c+a}+\dfrac{x-c^3}{a+b}=2a^2+2b^2+2c^2-ab-bc-ca$

35. $\dfrac{(x+2)(x+3)}{(x+1)(x+7)}=\dfrac{x+5}{x+8}$ [C. U. '44]

36. $\dfrac{(x+1)(x+9)}{(x+2)(x+4)}=\dfrac{(x+6)(x+10)}{(x+5)(x+7)}$

37. $\left(\dfrac{2x-10}{2x-5}\right)^2=\dfrac{x-10}{x-5}$ [C U. '41]

38. $\left(\dfrac{x-6}{x+7}\right)^2=\dfrac{(x-7)(x-5)}{(x+6)(x+8)}$ 39. $\left(\dfrac{x+3}{x+2}\right)^2=\dfrac{(x+5)(x+1)}{x(x+4)}$

40. $\left(\dfrac{x-5}{x-6}\right)^3=\dfrac{x-4}{x-7}$ 41. $\left(\dfrac{3x-28}{3x-26}\right)^3=\dfrac{x-10}{x-8}$

42. $16\left(\dfrac{a-x}{a+x}\right)^3=\dfrac{a+x}{a-x}$ 43. $\left(\dfrac{x+a}{x+b}\right)^3=\dfrac{x+2a-b}{x-a+2b}$

44. $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{1}{(x+2)(x+3)}+\dfrac{1}{(x+3)(x+4)}$
$$=\dfrac{1}{(x+1)(x+6)}$$

45. $\dfrac{1}{a(b-x)}+\dfrac{1}{b(c-x)}=\dfrac{1}{a(c-x)}$. [P. U. '21]

সমীকরণ-সাধ্য প্রশ্নাবলী (Equational Problems)

79. কোন প্রশ্নের প্রতীক সমীকরণ গঠন প্রণালী ও সমাধান পূর্বে বর্ণিত হইয়াছে। এখন সমীকরণ সাহায্যে অপেক্ষাকৃত জটিল প্রশ্নাবলীর সমাধান প্রদর্শিত হইতেছে।

উদাহরণ 1. এক ব্যক্তি যত মূল্যে একখানি ছবি কিনিলেন, তাহা বাঁধাইতে তাঁহার তত খরচ হইল। যদি বাঁধাইবার খরচ 1 পাউণ্ড কম এবং ছবির মূল্য 15 শিলিং বেশী হইত, তবে ছবির মূল্য বাঁধাই খরচের দ্বিগুণ হইত। ছবির মূল্য কত ?

মনে কর, ছবির মূল্য x শিলিং, তাহা হইলে বাঁধাই খরচও x শিলিং।

এখন ছবির মূল্য 15 শিলিং বেশী হইলে মূল্য হইত $(x+15)$ শিলিং এবং বাঁধাই খরচ 1 পাউণ্ড কম হইলে খরচ হইত $(x-20)$ শিলিং।

$\therefore$ প্রশ্নানুসারে সমীকরণ হইল, $x+15=2(x-20)$, বা, $x=15+40=55$.

$\therefore$ ছবির মূল্য $=55$ শি. $=2$ পা. 15 শিলিং।

উদা. 2. একটি ভগ্নাংশের হর লব অপেক্ষা 5 বেশী; যদি উভয়ের সহিত 3 যোগ করা যায়, তবে ভগ্নাংশটির মান $\frac{3}{4}$ হয়; ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর।

মনে কর, ভগ্নাংশটির লব x, সুতরাং হর $=x+5$, $\therefore$ ভগ্নাংশটি হইল $\frac{x}{x+5}$.

এখন প্রশ্নানুসারে, $\frac{x+3}{x+5+3}=\frac{3}{4}$, বা, $4x+12=3x+24$, $\therefore$ $x=12$.

$\therefore$ নির্ণেয় ভগ্নাংশ $=\frac{12}{12+5}=\frac{12}{17}$. [পরীক্ষা : $\frac{12+3}{17+3}=\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$]

উদা. 3. একদল যাত্রী এক হোটেলে রাত্রি যাপন করিতে উঠিল। হোটেলে যতগুলি ঘর আছে তাহাতে প্রত্যেকের জন্য পৃথক্ পৃথক্ ঘরের সংকুলান হয় না। এক এক ঘরে দুইজন করিয়া থাকিলে দুইটি ঘর খালি থাকে এবং প্রত্যেক ঘরে চারিজন করিয়া থাকিলে সাতটি ঘর খালি থাকে। ঘরের মোট সংখ্যা কত?

মনে কর, ঘরের সংখ্যা x, সুতরাং যাত্রীর সংখ্যা $=2(x-2)$.

এখন প্রত্যেক ঘরে চারিজন থাকিলে ঘর লাগে $\frac{2(x-2)}{4}$;

সুতরাং ঘর খালি থাকে $x-\frac{2(x-2)}{4}=x-\frac{x-2}{2}=\frac{x+2}{2}=\frac{1}{2}x+1$,

$\therefore$ $\frac{1}{2}x+1=7$, বা, $\frac{1}{2}x=6$, $\therefore$ $x=12$, $\therefore$ ঘরের সংখ্যা $=12$.

উদা. 4. আমার বর্তমান বয়সের দ্বিগুণ হইতে 6 বৎসর পূর্বেকার বয়সের তিনগুণ বিয়োগ করিলে আমার বর্তমান বয়সের সমান হয়। আমার বর্তমান বয়স কত?

আমার বর্তমান বয়স x বৎসর হইলে, 6 বৎসর পূর্বে বয়স ছিল $(x-6)$ বৎসর; সুতরাং প্রশ্নানুসারে, $2x-3(x-6)=x$, বা, $-x+18=x$, বা $2x=18$, $\therefore$ $x=9$. $\therefore$ আমার বর্তমান বয়স 9 বৎসর।

উদা. 5. দুইটি সংখ্যার সমষ্টি 52, এবং উহাদের অন্তর 2; সংখ্যা দুইটি কত?

মনে কর, বড় সংখ্যাটি x, $\therefore$ ছোটটি $=52-x$;

$\therefore$ প্রশ্নানুসারে, $x-(52-x)=2$, বা; $2x=54$, $\therefore$ $x=27$.

$\therefore$ বড় সংখ্যাটি $=27$, এবং ছোটটি $=52-27=25$.

উদা. 6. 286কে এমন চারিটি অংশে বিভক্ত করিতে হইবে যে প্রথম অংশে 1 যোগ করিলে, দ্বিতীয় অংশ হইতে 2 বিয়োগ করিলে, তৃতীয় অংশকে 3 গুণ করিলে এবং চতুর্থ অংশকে 4 দ্বারা ভাগ করিলে প্রত্যেক ক্ষেত্রেই সমান সমান সংখ্যা হয়।

মনে কর, প্রতিক্ষেত্রে যে সংখ্যা হয় তাহা $=x$.

$\therefore$ প্রথম অংশ $=x-1$, দ্বিতীয় অংশ $=x+2$, তৃতীয় অংশ $=\frac{1}{3}x$ এবং চতুর্থ অংশ $=4x$; এবং অংশগুলির সমষ্টি $=286$;

সুতরাং $(x-1)+(x+2)+\frac{1}{3}x+4x=286$,

বা, $6x+\frac{1}{3}x=285$, বা, $\frac{19}{3}x=286$, $\therefore$ $x=\frac{285\times3}{19}=45$.

$\therefore$ অংশগুলি যথাক্রমে 44, 47, 15, 180.

উদা. 7. দুই অঙ্কবিশিষ্ট কোন সংখ্যার দশক স্থানীয় অঙ্কটি একক-স্থানীয় অঙ্কটি অপেক্ষা 5 বেশী ; সংখ্যাটি হইতে অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টির পাঁচগুণ বিয়োগ করিলে ঐ সংখ্যাটির অঙ্কদ্বয়ের পরস্পর স্থান বিনিময় হয়। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

মনে কর, একক স্থানীয় অঙ্কটি x ; সুতরাং দশক-স্থানীয় অঙ্কটি $=x+5$;

$\therefore$ সংখ্যাটি $=10(x+5)+x$.

এখন, প্রশ্নানুসারে, $10(x+5)+x-5(x+5+x)=10x+(x+5)$

বা, $x+25=11x+5$, বা, $10x=20$, $\therefore$ $x=2$.

$\therefore$ সংখ্যাটির একক স্থানীয় অঙ্কটি হইল 2, এবং দশক-স্থানীয় অঙ্কটি হইল 7. $\therefore$ সংখ্যাটি $=7\times10+2=72$.

প্রশ্নমালা 50

1. একটি আয়তক্ষেত্রের কর্ণ 50 সেন্টিমিটার এবং ইহার একটি বাহু 48 সেন্টিমিটার ; ক্ষেত্রটির কালি নির্ণয় করিতে হইবে।

2. এমন দুইটি ক্রমিক সংখ্যা নির্ণয় কর যে ছোটটির $\frac{1}{4}$ এবং $\frac{1}{11}$ অংশ একত্রে বড়টির $\frac{1}{3}$ ও $\frac{1}{9}$ অংশের সমষ্টি অপেক্ষা 1 বেশী হয়।

3. একটি সংখ্যাকে সমান সমান 4 ভাগে বিভক্ত করিয়া ভাগগুলি পরস্পর গুণ করিলে যাহা হয়, উক্ত সংখ্যাকে সমান সমান 5 ভাগে বিভক্ত করিয়া ভাগগুলি পরস্পর গুণ করিলে তাহাই হয়। সংখ্যাটি কত?

4. কোন ভগ্নাংশের লবটি হরের অর্ধেক। লবের সহিত 7 যোগ করিলে এবং হর হইতে 19 বিয়োগ করিলে যে ভগ্নাংশ হয় তাহার মান 2 ; ভগ্নাংশটি কত?

5. কোন ভগ্নাংশের লব হর অপেক্ষা 4 কম ; লব হইতে 10 বিয়োগ করিলে যে ভগ্নাংশটি হয়, হরের সহিত 30 যোগ করিলেও সেই ভগ্নাংশটি হয়। প্রদত্ত ভগ্নাংশটি নির্ণয় করিতে হইবে।

6. একদল যাত্রীর পুরুষের সংখ্যা ঐ দলের $\frac{1}{8}$ অংশ অপেক্ষা 2 জন বেশী, স্ত্রীলোকের সংখ্যা দলের $\frac{1}{4}$ অংশ অপেক্ষা 3 জন কম, এবং বালকের সংখ্যা দলের $\frac{1}{2}$ অংশ অপেক্ষা 7 জন বেশী। ঐ দলে মোট কতজন আছে ?

7. টাকা এবং 50 পয়সা মুদ্রায় একটি থলিয়াতে মোট 365 টাকা আছে। 50 পয়সা মুদ্রাগুলির মোট মূল্য টাকাগুলির মোট মূল্য অপেক্ষা 13 টাকা কম হইলে, মুদ্রাগুলির সংখ্যা নির্ণয় কর।

8. একটি লোককে 40 দিনের জন্য এই শর্তে নিযুক্ত করা হইল যে, সে যেদিন কাজ করিবে না সেদিন তাহাকে 6 পেন্স জরিমানা দিতে হইবে। সে 10 দিন কাজ করিল না, এবং মোট 3 পাউণ্ড 10 শিলিং পাইল। তাহার দৈনিক মজুরী কত ?

9. একটি ঘোড়া 840 টাকায় বিক্রয় করিলে যত ক্ষতি হয়, 1050 টাকায় বিক্রয় করিলে তাহার $\frac{3}{4}$ অংশ লাভ হয়। ঘোড়াটির ক্রয়মূল্য কত ?

10. এক ব্যক্তি 25 টাকায় 270টি কমলালেবু ক্রয় করিল। উহার কতকগুলি টাকায় 10টি দরে এবং বাকীগুলি টাকায় 12টি দরে কিনিয়া থাকিলে কোন্ প্রকারের কতগুলি লেবু কিনিয়াছিল ?

11. একটি ভগ্নাংশের লব অপেক্ষা হর 3 বেশী এবং লবের সহিত 7 যোগ করিলে ভগ্নাংশটি 1 বৃদ্ধি পায়। ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর। [C. U. '33]

12. $\frac{5}{12}$ ভগ্নাংশটির লব ও হরের সহিত কত যোগ করিলে ভগ্নাংশটি $\frac{5}{7}$ হইবে ?

13. $\frac{3}{4}$ ভগ্নাংশটির লব ও হরের সহিত একটি সংখ্যা যোগ করিলে যাহা হয়, $\frac{5}{6}$এর লব ও হর হইতে সেই সংখ্যাটি বিয়োগ করিলে তাহাই হয়। ঐ সংখ্যাটি কত ?

14. 320কে এমন চারিটি অংশে বিভক্ত কর যেন প্রথম অংশের সহিত 2 যোগ করিলে, দ্বিতীয় অংশ হইতে 3 বিয়োগ করিলে, তৃতীয় অংশের 4 গুণ করিলে এবং চতুর্থ অংশকে 5 ভাগ করিলে একই ফল হয়।

15. 621 টাকা A, B, C, Dএর মধ্যে ভাগ করিয়া দেওয়া হইল। A যদি 7 টাকা বেশী পাইত, B যদি 8 টাকা কম পাইত, C যদি তাহার টাকার 11 গুণ পাইত এবং D যদি তাহার টাকার $\frac{1}{12}$ অংশ পাইত, তবে সকলেই সমান সমান টাকা পাইত। কে কত টাকা পাইয়াছিল ?

*16. দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার অঙ্কগুলির সমষ্টি 10 ; সংখ্যাটি হইতে 18 বিয়োগ করিলে বিয়োগফলের অঙ্কদ্বয় সমান হয়। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

17. দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার অঙ্ক দুইটির সমষ্টি 7 ; অঙ্ক দুইটি পরস্পর স্থান পরিবর্তন করিলে যে সংখ্যাটি হয় তাহা হইতে 2 বিয়োগ করিলে বিয়োগফল প্রথম সংখ্যাটির দ্বিগুণ হয় ; সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

18. কোন নির্দিষ্ট টাকা হইতে কতকগুলি বালকের প্রত্যেককে 48 পয়সা করিয়া দিলে 2 টাকা অবশিষ্ট থাকে, এবং প্রত্যেককে 61 পয়সা করিয়া দিলে 60 পয়সা কম পড়ে। কতগুলি বালক আছে নির্ণয় কর।

19. একজন মজুরকে 30 দিনের জন্য এই শর্তে নিযুক্ত করা হইল যে, সে কাজ করিলে প্রত্যহ 2 টা. 50 প. করিয়া পাইবে ; কিন্তু অনুপস্থিত থাকিলে প্রতিদিনের জন্য তাহাকে 1 টাকা জরিমানা দিতে হইবে। সে মোট 47 টাকা পাইল। সে কতদিন কাজ করিয়াছিল ?

20. 10 বৎসর পূর্বে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের 5 গুণ ছিল ; 20 বৎসর পরে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের দ্বিগুণ হইবে ; পিতার বর্তমান বয়স কত ?

21. বর্তমানে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের দ্বিগুণ। 8 বৎসর পরে তাহাদের বয়সের অনুপাত 7 : 4 হইবে। পুত্রের বর্তমান বয়স কত ? [C. U. '32]

22. এক ব্যক্তি 30 বৎসর বয়সে রাজা হইয়া তাঁহার জীবনের $\frac{5}{11}$ অংশ কাল রাজত্ব করিলেন। তিনি কত বৎসর রাজত্ব করিয়াছিলেন ? [C. U. '30]

23. এক ব্যক্তি তাহার দেনার এক-তৃতীয়াংশ অপেক্ষা 200 টাকা বেশী পরিশোধ করিল এবং তখনও সে যাহা শোধ করিয়াছে তাহা অপেক্ষা 210 টাকা বেশী দেনা থাকিল। প্রথমে তাহার কত টাকা দেনা ছিল ? [C. U. '13]

24. কোন পিতার বয়স বড় ছেলের বয়সের 4 গুণ এবং ছোট ছেলের বয়সের 5 গুণ। বড় ছেলের বয়স যখন তাহার বর্তমান বয়সের 3 গুণ হইবে, তখন পিতার বয়স ছোট ছেলের বয়সের দ্বিগুণ অপেক্ষা 4 বৎসর বেশী হইবে। তাহাদের বর্তমান বয়স কত ? [W. B. S. F. '53]

25. এক ব্যক্তি এক পেনিতে দুইটি দরে এবং এক পেনিতে তিনটি দরে সমান সংখ্যক ডিম কিনিয়া সবগুলি 2 পেনিতে 5টি দরে বিক্রয় করিল। ইহাতে যদি তাহার 4 পেন্স ক্ষতি হইয়া থাকে, তবে সে কতগুলি ডিম কিনিয়াছিল ? [D. B. '27]

80. ঘড়ি সম্বন্ধীয় সমাধান :—ঘড়ির dial-টিকে ছোট ছোট 60 ভাগে বিভক্ত করা আছে। এক একটি ভাগকে মিনিট-ঘর বা minute space বা minute division বলে।

(2) মিনিটের কাঁটা (minute-hand) যতক্ষণে 60 মিনিট-ঘর ঘুরে, ঘণ্টার কাঁটা (hand-hour) ততক্ষণে 5 মিনিট-ঘর ঘুরে অর্থাৎ একই সময়ে ঘণ্টার কাঁটা মিনিটের কাঁটার $\frac{1}{12}$ অংশ যায়।

(3) দুইটি কাঁটা (ক) পরস্পর মিলিত হইয়াছে (coincide) বলিলে বুঝিতে হইবে উভয়ের মধ্যে কোন মিনিট-ঘর ব্যবধান নাই ; (খ) উহারা

পরস্পর বিপরীত দিকে অবস্থিত (opposite to each other) বলিলে বুঝিবে উভয়ের মধ্যে 30 মিনিট-ঘর ব্যবধান আছে ; (গ) উহারা একই সরল রেখায় অবস্থিত (in the same straight line) বলিলে বুঝিবে (i) হয় উভয়ে মিলিত হইয়াছে, না হয় (ii) একটি অন্যটির বিপরীত দিকে একই রেখায় আছে ; (ঘ) উহারা পরস্পর সমকোণে নত (at right angles to each other) বলিলে বুঝিবে উভয়ের মধ্যে 15 মিনিট-ঘর ব্যবধান আছে।

উদা. 1. 7টা ও 8টার মধ্যে কখন ঘড়ির কাঁটা দুইটি মিলিত হইবে ?
[C. U. '33]

মনে কর, 7টা বাজিয়া x মিনিটের সময় কাঁটা দুইটি পরস্পর মিলিত বা সমাপতিত হইবে। 7টার সময় মিনিটের কাটা ঘণ্টার কাঁটার 35 মিনিট-ঘর পিছনে ছিল, সুতরাং পিছন হইতে আসিয়া ঘণ্টার কাঁটার সহিত মিলিতে হইলে ঘণ্টার কাঁটা অপেক্ষা মিনিটের কাঁটাকে 35 মিনিট-ঘর বেশী যাইতে হইবে।

এখন x মিনিটে মিনিটের কাঁটা x মিনিট-ঘর ও ঘণ্টার কাঁটা $\frac{x}{12}$ মিনিট-ঘর যায়। $\therefore\ x-\frac{x}{12}=35$, বা, $\frac{11x}{12}=35$, বা, $x=\frac{12}{11}\times 35=\frac{420}{11}=38\frac{2}{11}$.

অতএব, 7টা $38\frac{2}{11}$ মিনিটের সময় কাঁটা দুইটি মিলিত হইবে।

উদা. 2. 4টা ও 5টার মধ্যে কখন ঘড়ির কাঁটা দুইটি পরস্পর বিপরীতমুখী হইবে ?

মনে কর, 4টা বাজিয়া x মিনিটের সময় কাঁটা দুইটি পরস্পর ঠিক বিপরীত দিকে থাকিবে। 4টার সময় মিনিটের কাঁটা ঘণ্টার কাঁটার 20 মিনিট-ঘর পিছনে ছিল। ঘণ্টার কাঁটা অপেক্ষা এই 20 মিনিট-ঘর বেশী গেলে মিনিটের কাঁটা ঘণ্টার কাঁটার সহিত মিলিবে এবং তারপর আরও 30 মিনিট-ঘর বেশী গেলে অর্থাৎ মোট 50 মিনিট-ঘর বেশী গেলে তবে কাঁটা দুইটি পরস্পর বিপরীত দিকে থাকিবে।

$$\therefore\ x-\frac{x}{12}=50,\ \text{বা},\ \frac{11x}{12}=50,\ \text{বা},\ 11x=600,$$

$\therefore\ x=54\frac{6}{11}$. $\therefore$ নির্ণেয় সময়=4টা $54\frac{6}{11}$ মিনিট।

উদা. 3. 3টা ও 4টার মধ্যে কখন ঘড়ির ঘণ্টার কাঁটা ও মিনিটের কাঁটা এক সরলরেখায় থাকিবে ?
[C. U. 1934]

মনে কর, 3টা বাজিয়া x মিনিটের সময় কাঁটা দুইটি একই সরলরেখায় থাকিবে। (1) একটি কাঁটা অন্যটির উপর সমাপতিত হইলে কিংবা (2) কাঁটা দুইটি পরস্পর ঠিক বিপরীত দিকে থাকিলে এক সরলরেখায় থাকা হয়।

প্রথম পক্ষে, ∵ 3টার সময় মিনিটের কাঁটা ঘণ্টার কাঁটার 15 মিনিট-ঘর পিছনে ছিল,

∴ উহা ঘণ্টার কাঁটা অপেক্ষা 15 মি. ঘর বেশী গেলে উভয়ে মিলিত হইবে।

$\therefore \quad x-\frac{x}{12}=15$, বা, $\frac{11x}{12}=15$, বা, $x=\frac{180}{11}=16\frac{4}{11}$.

দ্বিতীয় পক্ষে, $x-\frac{x}{12}=15+30$ [কারণ, মিনিটের কাঁটা 15 মিনিট-ঘর বেশী গেলে ঘণ্টার কাঁটার সহিত মিলিত হইবে, তারপর আরও 30 মিনিট-ঘর বেশী গেলে উহারা পরস্পর বিপরীত দিকে থাকিবে।

$$\therefore \quad \frac{11x}{12}=45, \quad \therefore \quad x=49\frac{1}{11}.$$

অতএব, 3টা বাজিয়া $16\frac{4}{11}$ মিনিটে এবং 3টা বাজিয়া $49\frac{1}{11}$ মিনিটে কাঁটা দুইটি এক সরলরেখায় থাকিবে।

উদা. 4. 4টা ও 5টার মধ্যে ঘড়ির কাঁটা দুইটি কখন পরস্পর সমকোণে নত থাকিবে? [C. U. 1935, '45]

মনে কর, 4টা বাজিয়া x মিনিটের সময় কাঁটা দুইটি সমকোণে নত থাকিবে। কাঁটা দুইটির মধ্যে 15 মিনিট-ঘর ব্যবধান থাকিলে পরস্পর সমকোণে থাকা হয়। 4টার সময় মিনিটের কাঁটা ঘণ্টার কাঁটার 20 মিনিট-ঘর পিছনে আছে, সুতরাং (i) মিনিটের কাঁটা যদি ঘণ্টার কাঁটা অপেক্ষা 5 মিনিট-ঘর বেশী যায়, তবে উভয়ের মধ্যে 15 মিনিট-ঘর ব্যবধান থাকে। (ii) আবার, মিনিটের কাঁটা 20 মিনিট-ঘর বেশী গেলে উভয়ে মিলিত হইবে, তারপর আরও 15 মিনিট-ঘর অর্থাৎ মোট 35 মিনিট-ঘর বেশী গেলে মিনিটের কাঁটা আগাইয়া গিয়া ঘণ্টার কাঁটা হইতে 15 মিনিট-ঘর অন্তর থাকিবে।

$$\therefore \quad x-\frac{x}{12}=5\cdots\text{(i)} \text{ এবং } x-\frac{x}{12}=35\cdots\text{(ii)}$$

(i) হইতে $11x=60$, $\therefore x=5\frac{5}{11}$. (ii) হইতে $11x=420$, $\therefore x=38\frac{2}{11}$.

অতএব, 4টা বাজিয়া $5\frac{5}{11}$ মিনিটে এবং 4টা বাজিয়া $38\frac{2}{11}$ মিনিটে কাঁটা দুইটি পরস্পর সমকোণ নত থাকিবে।

উদা. 5. এক ব্যক্তি গৃহ হইতে 4টা ও 5টার মধ্যে বাহির হইয়া 5টা ও 6টার মধ্যে ফিরিয়া আসিয়া দেখিল তাহার ঘড়ির কাঁটা দুইটি পরস্পর স্থান বিনিময় করিয়াছে। সে কখন বাহির হইয়াছিল? [C. U. '33 Addl. '51]

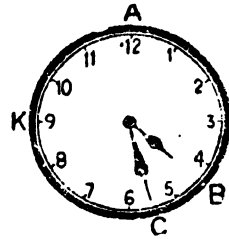
মনে কর, লোকটি 4টা x মিনিটের সময় বাহিরে গিয়াছিল, এবং ঐ সময় ঘণ্টার কাঁটা 4টা ও 5টার মধ্যে B বিন্দুতে এবং মিনিটের কাঁটা 5টা ও 6টার

মধ্যে C বিন্দুতে ছিল। এখন 4টা x মিনিটের সময় মিনিটের কাঁটা 12টার ঘর হইতে x. মিনিট-ঘর এবং ঘণ্টার কাঁটা 4টার ঘর হইতে $\frac{1}{12}x$ মিনিট-ঘর আগাইয়া ছিল। এখন চিত্রে দেখ—

চাপ $AC = x$ মিনিট-ঘর,

চাপ $AB = 20 + \frac{x}{12}$ মিনিট-ঘর,

চাপ $CKA = 60 - x$ মিনিট-ঘর,

চাপ $BC = x - \left(20 + \frac{x}{12}\right)$ মিনিট-ঘর।

লোকটি যতক্ষণ বাহিরে ছিল ততক্ষণ মিনিটের কাঁটা CKAB চাপ অর্থাৎ $\left(60 - x + 20 + \frac{x}{12}\right)$মিনিট-ঘর গিয়াছে এবং ঘণ্টার কাঁটা BC চাপ অর্থাৎ $x - \left(20 + \frac{x}{12}\right)$ মিনিট-ঘর গিয়াছে। একই সময়ে মিনিটের কাঁটা ঘণ্টার কাঁটার 12 গুণ যায়।

$$\therefore \quad 60 - x + 20 + \frac{x}{12} = 12\left\{x - \left(20 + \frac{x}{12}\right)\right\}$$

বা, $80 - \frac{11x}{12} = 11x - 240$, বা $\frac{143}{12}x = 320$, $\therefore$ $x = \frac{3840}{143} = 26\frac{122}{143}$.

অতএব, সে ব্যক্তি 4টা $26\frac{122}{143}$ মিনিটের সময় বাহির হইয়াছিল।

81. Hollow Square :—ঘন বর্গাকারে (solid square) লোক সাজাইলে যদি সম্মুখের সারিতে x জন লোক থাকে, তবে মোট লোকসংখ্যা হইবে x^2. আর যদি শূন্যগর্ভ বর্গাকারে (hollow square) লোক সাজান হয়, তবে কত গভীর করিয়া সাজান আছে তাহা বলা থাকে। মনে কর, 2 গভীর (2 deep) করিয়া সাজান আছে। এখানে বুঝিতে হইবে, যে-কোন দিক হইতে ভিতরে প্রবেশ করিলে দেখা যাইবে 2 জনের পর স্থান খালি আছে। যদি সম্মুখের সারিতে 8 জন থাকে, তবে মোট লোকসংখ্যা হইবে $8^2 - (8 - 2 \times 2)^2$.

চিত্রে ঘনব্যূহ হইতে রেখাবেষ্টিত লোক সরাইয়া দিলে 2 গভীর করিয়া সাজান শূন্যগর্ভ ব্যূহ থাকিবে।

সাধারণ সূত্র এই হইবে—যদি সম্মুখের সারিতে x সংখ্যক লোক থাকে এবং y গভীর করিয়া সাজান হয়, তবে মোট লোকসংখ্যা $=x^2-(x-2y)^2$.

উদাহরণ। কোন সেনাপতি তাঁহার সৈন্যগণকে 3-গভীর করিয়া শূন্যগর্ভ বর্গাকারে সাজাইতে পারেন। আরও 800 সৈন্য থাকিলে তিনি সম্মুখ সারিতে পূর্বের সমান লোক রাখিয়া সকলকে 4-গভীর করিয়া সাজাইতে পারিতেন। তাঁহার কত সৈন্য ছিল? [C. U. '42]

মনে কর, উভয় গঠনেই সামনের সারিতে x সৈন্য ছিল।

$\therefore$ প্রথম ক্ষেত্রে মোট সৈন্যসংখ্যা $=x^2-(x-3\times 2)^2=x^2-(x-6)^2 \cdots (1)$

এবং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে মোট সৈন্যসংখ্যা $=x^2-(x-4\times 2)^2=x^2-(x-8)^2 \cdots (2)$

কিন্তু দ্বিতীয় ক্ষেত্রে সৈন্যসংখ্যা পূর্বের সংখ্যা অপেক্ষা 800 বেশী বলা আছে।

$\therefore \quad x^2-(x-6)^2=x^2-(x-8)^2-800,$

বা, $x^2-x^2+12x-36=x^2-x^2+16x-64-800,$

বা, $4x=828, \quad \therefore \quad x=207.$

$\therefore$ (1) হইতে নির্ণেয় সৈন্যসংখ্যা $=207^2-(207-6)^2$

$=207^2-201^2=(207+201)(207-201)=408\times 6=2448.$

প্রশ্নমালা 51

1. 2টা ও 3টার মধ্যে ঘড়ির কাঁটা দুইটি কখন সমাপতিত হইবে?

2. 5টা ও 6টার মধ্যে ঘড়ির কাঁটা দুইটি কখন সমকোণে থাকিবে?

3. 2টা ও 3টার মধ্যে ঘড়ির কাঁটা দুইটি কখন (1) পরস্পর বিপরীতমুখী, (2) পরস্পর সমকোণে নত, এবং (3) 12 মিনিট-ঘর ব্যবধানে থাকিবে?

4. 5টা ও 6টার মধ্যে কখন ঘড়ির কাঁটা দুইটি 10 মিনিট-ঘর ব্যবধানে থাকিবে?

5. 1টা ও 2টার মধ্যে কখন ঘড়ির কাঁটা দুইটি সমকোণে থাকিবে? [C. U. '48]

6. এক ব্যক্তি 5টা ও 6টার মধ্যে ভ্রমণে বাহির হন এবং 6টা ও 7টার মধ্যে ফিরিয়া আসিয়া দেখেন তাঁহার ঘড়ির কাঁটা দুইটি পরস্পর স্থান বিনিময় করিয়াছে। তিনি কখন বাহির হইয়াছিলেন? [C. U. '44]

7. কোন সেনাপতি তাঁহার সৈন্যদিগকে 5-গভীর করিয়া শূন্যগর্ভ বর্গাকারে সাজাইলেন। যদি মোট সৈন্যসংখ্যা 1900 হয়, তবে সম্মুখ সারিতে কত সৈন্য ছিল? [C. U. '38]

8. 40 জন লোককে 2-গভীর করিয়া শূন্যগর্ভ বর্গাকারে সাজাইলে সম্মুখ সারিতে কয়জন থাকিবে? [B. C. S. '50]

9. একদল লোককে 10-গভীর শূন্যগর্ভ বর্গাকারে সাজান যায়। লোকসংখ্যা 1600 বেশী হইলে সকলকে 10-গভীর করিয়া সাজান যায়; কিন্তু তখন সম্মুখ সারির লোকসংখ্যা পূর্বের দ্বিগুণ হয়। প্রথমে কত লোক ছিল? [C. U. 1905]

10. কোন সৈন্যাধ্যক্ষ দেখিলেন সম্মুখ সারিতে সমান লোক রাখিয়া তাঁহার সৈন্যগণকে 4-গভীর করিয়া শূন্যগর্ভ বর্গাকারে সাজাইলে 50 জন সৈন্য উদ্বৃত্ত থাকে এবং 5-গভীর করিয়া সাজাইলে আরও 50 জন সৈন্য দরকার হয়। তাঁহার কত সৈন্য ছিল? [C. U. 1903]

11. একদল সৈন্য সমানভাবে সারিবদ্ধ হইয়া যাইতেছিল। তাহাদের সারির সংখ্যা অপেক্ষা সম্মুখ সারিতে 5 জন সৈন্য কম ছিল। শত্রুপক্ষ দৃষ্টি-গোচর হইলে সম্মুখ সারিতে সৈন্যসংখ্যা 405 বেশী করিয়া সাজান হইল এবং ইহার জন্য সারি মোট 5টি হইল। ঐ দলে কত সৈন্য ছিল? [C. U. '37]

12. কোন সৈন্যাধ্যক্ষ তাঁহার সৈন্যগণকে 5 ও 6 গভীর করিয়া শূন্যগর্ভ বর্গাকারে সাজাইতে পারেন, কিন্তু প্রথম গঠনের সম্মুখ সারির লোকসংখ্যা অপেক্ষা দ্বিতীয় গঠনে ঐ লোকসংখ্যা 4 জন কম হয়। সৈন্য সংখ্যা কত? [G. U. '48; C. U. 1887]

13. 40 কিলোমিটার দূরবর্তী দুই ব্যক্তি পরস্পরের অভিমুখে চলিয়া $6\frac{2}{3}$ ঘণ্টায় মিলিত হইল, কিন্তু উহাদের একজন যদি গতিবেগ দ্বিগুণ করিত, তবে ঐ সময়ের $\frac{3}{4}$ সময়ে তাহারা মিলিত হইত। তাহাদের গতিবেগ নির্ণয় কর।

14. এক ব্যক্তি মোটরে 6 ঘণ্টায় 80 মাইল ভ্রমণ করিল। সে উহার প্রথমাংশ ঘণ্টায় 10 মাইল বেগে এবং শেষাংশ ঘণ্টায় 18 মাইল বেগে গেল। সে কোন্ বেগে কত মাইল গিয়াছিল? [C. U. '18, '29]

15. দুইটি সংখ্যার গুণফল 18225 এবং বৃহত্তর সংখ্যাটিকে ক্ষুদ্রতর সংখ্যাটি দ্বারা ভাগ করিলে 81 ভাগফল হয়। সংখ্যা দুইটি কত? [C. U. '45]

দুইটি অজ্ঞাত রাশিবিশিষ্ট সমীকরণ

[Simple Equation of Two unknowns]

82. কোন প্রশ্নে দুইটি অজ্ঞাত রাশি নির্ণয় করিতে হইলে প্রশ্নে দুইটি পরস্পর নিরপেক্ষ সর্ত থাকা চাই। যেমন—যদি বলা হয় দুইটি সংখ্যার যোগফল 7, সংখ্যা দুইটি নির্ণয় করিতে হইবে, তবে এ প্রশ্নে সংখ্যা দুইটি 1 ও 6, 2 ও 5, 3 ও 4 ইত্যাদি হইতে পারে; সংখ্যা দুইটির নির্দিষ্ট কোন মান হয় না। আবার, দুইটি সর্ত যদি এরূপ হয় যে (1) সংখ্যা দুইটির যোগফল 7 এবং (2) উহাদের দ্বিগুণের সমষ্টি 14; তাহা হইলে দুইটি সর্ত পরস্পর নিরপেক্ষ

হইল না ; প্রথম সর্তটি দ্বিগুণ করিয়াই দ্বিতীয় সর্ত হইল ; কার্যতঃ উহারা একটি মাত্র সর্ত হইল। কিন্তু দ্বিতীয় সর্ত যদি এইরূপ হয় যে, সংখ্যা দুইটির অন্তরফল 3, তাহা হইলে সংখ্যা দুইটির মান স্পষ্টতঃ 5 ও 2 হয়। সুতরাং দুইটি অজ্ঞাত রাশিযুক্ত সমীকরণ সাধ্য হইতে হইলে দুইটি পরস্পর নিরপেক্ষ সমীকরণ চাই। নিম্নে উক্ত প্রকার সমীকরণ সমাধানের বিভিন্ন প্রণালী প্রদত্ত হইল।

83. তুলনামূলক পদ্ধতি (Method of Comparison)

উদাহরণ 1. সমাধান কর : $\left.\begin{array}{l} 2x+3y=8\cdots(1) \\ 7x+4y=15\cdots(2) \end{array}\right\}$

(1) হইতে $y=\dfrac{8-2x}{3}\cdots(3)$ এবং (2) হইতে $y=\dfrac{15-7x}{4}\cdots(4)$

(3) ও (4) তুলনা করিলে দেখা যায় যে সমীকরণ দুইটির বামপক্ষ সমান ; সুতরাং দক্ষিণপক্ষও পরস্পর সমান হইবে। সুতরাং $\dfrac{8-2x}{3}=\dfrac{15-7x}{4}$.

অথবা, $4(8-2x)=3(15-7x)$, অথবা, $32-8x=45-21x$

অথবা, $21x-8x=45-32$, অথবা, $13x=13$, $\therefore$ $x=1$.

এখন (3)-এ $x=1$ বসাইলে $y=\dfrac{8-2\times1}{3}=\dfrac{8-2}{3}=\dfrac{6}{3}=2$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান হইল $x=1$ এবং $y=2$

[পরীক্ষা : (1)-সমীকরণে $x=1$, $y=3$ বসাইলে বামপক্ষ $=2+6=8$ এবং (2)-সমীকরণে বামপক্ষ $=7+8=15$ হইল।]

উদা. 2. সমাধান কর : $\left.\begin{array}{l} \dfrac{3}{2x}+\dfrac{2}{3y}=5\cdots(1) \\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}=13\quad\cdots(2) \end{array}\right\}$

এখানে মনে কর, $\dfrac{1}{x}=u$ এবং $\dfrac{1}{y}=v$. তাহা হইলে সমীকরণ দুইটি এইরূপ হয়, যথা— $\frac{3}{2}u+\frac{2}{3}v=5\cdots(3)$ এবং $2u+3v=13\cdots(4)$

(3)-কে 6 দিয়া গুণ করিলে, $9u+4v=30$, $\therefore$ $v=\dfrac{30-9u}{4}\cdots(5)$

(4) হইতে $v=\dfrac{13-2u}{3}\cdots(6)$ (5) ও 6 হইতে $\dfrac{30-9u}{4}=\dfrac{13-2u}{3}$

বা, $90-27u=52-8u$, বা, $8u-27u=52-90$,

বা, $-19u=-38$, $\therefore$ $u=2$.

এখন, (5)-এ $u=2$ বসাইয়া পাই $v=\dfrac{30-18}{4}=3$;

$\therefore$ $u=2$ এবং $v=3$ হইল।

এখন, $\because$ $u=\dfrac{1}{x}$ $\therefore$ $\dfrac{1}{x}=2$, $\therefore$ $x=\dfrac{1}{2}$.

এবং $\because$ $v=\dfrac{1}{y}$, $\therefore$ $\dfrac{1}{y}=3$, $\therefore$ $y=\dfrac{1}{3}$. $\therefore$ $x=\dfrac{1}{2}$, $y=\dfrac{1}{3}$.

প্রশ্নমালা 52

সমাধান কর (Solve) ;

1. $\left.\begin{array}{l} x+y=5 \\ x-y=3 \end{array}\right\}$ 2. $\left.\begin{array}{l} 2x+3y=7 \\ 5x-2y=8 \end{array}\right\}$ 3. $\left.\begin{array}{l} 2x-5y=-1 \\ 3x+y=7 \end{array}\right\}$

4. $\left.\begin{array}{l} 11x+13y=-2 \\ 13x+11y=50 \end{array}\right\}$ 5. $\left.\begin{array}{l} 8y=1-5x \\ 12x+26=-5y \end{array}\right\}$

6. $\left.\begin{array}{l} 2x-3y-17=0 \\ 5x+6y-2=0 \end{array}\right\}$ 7. $\left.\begin{array}{l} 7x-3y=31 \\ 9x-5y=41 \end{array}\right\}$ [D. B '34]

8. $x+2y=3=4x-y$ [C.U. '17] 9. $x-3y=0=20+y-2x$

10. $\left.\begin{array}{l} \dfrac{7x}{11}+\dfrac{3y}{8}=8 \\ \dfrac{5x}{11}-\dfrac{3y}{4}=22 \end{array}\right\}$ 11. $2-2(3x-y)=10(4-y)-5x$ $=4(y-x)$

12. $x+5y=36$, $\dfrac{x+y}{x-y}=\dfrac{5}{3}$. [C. U. '12]

13. $\left.\begin{array}{l} \dfrac{x+3}{x-8}=\dfrac{y+1}{y-4} \\ 10x-13y=4 \end{array}\right\}$ 14. $\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=5 \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=1 \end{array}\right\}$ 15. $\left.\begin{array}{l} \dfrac{8}{x}-\dfrac{5}{y}=1 \\ \dfrac{7}{x}-\dfrac{3}{y}=5 \end{array}\right\}$

16. $\left.\begin{array}{l} \dfrac{54}{x}=38+5y \\ \dfrac{12}{x}+7y+24=0 \end{array}\right\}$ 17. $\left.\begin{array}{l} \dfrac{x+y}{5}+\dfrac{x-y}{4}=6 \\ \dfrac{x+y}{4}+\dfrac{x-y}{5}=6\frac{3}{20} \end{array}\right\}$

84. পরিবর্ত পদ্ধতি (Methcd of Substitution)

উদাহরণ 1. সমাধান কর $\left.\begin{array}{l} 5x+3y=11 \\ 2x-7y=-12 \end{array}\right\}$

প্রথম সমীকরণ হইতে $y=\dfrac{11-5x}{3}$ ......(1)

দ্বিতীয় সমীকরণে yএর পরিবর্তে $\frac{11-5x}{3}$ বসাইয়া পাই

$$2x-\frac{7(11-5x)}{3}=-12$$

বা, $6x-77+35x=-36$, বা, $41x=41$, $\therefore \quad x=1.$

এখন (1)-এ $x=1$ বসাইয়া $y=\frac{11-5}{3}=\frac{6}{3}=2.$ $\therefore \quad x=1, y=2.$

উদা. 2. সমাধান কর : $xy=(x+3)(y-1)=(x-2)(y+1).$

সমীকরণ দুইটি হইল $xy=(x+3)(y-1)\cdots\cdots(1)$

এবং $xy=(x-2)(y+1)\cdots\cdots(2)$

(1) হইতে, $xy=xy+3y-x-3$, বা, $x=3y-3\cdots(3)$

(2) হইতে $xy=xy-2y+x-2$, বা, $x-2y=2\cdots(4)$

(4)-এ $x=3y-3$ বসাইয়া পাই $3y-3-2y=2$, বা, $y=5$,

$\therefore \quad y=5.$

(3)-এ $y=5$ বসাইয়া পাই, $x=15-3=12.$ $\therefore \quad x=12, y=5.$

প্রশ্নমালা 53

সমাধান কর :—

1. $\left.\begin{array}{l}5x+6y=28\\4x+11y=41\end{array}\right\}$ 2. $\left.\begin{array}{l}3x+7y=26\\5y+4x=13\end{array}\right\}$ 3. $\left.\begin{array}{l}9x-11y=15\\7x-13y=25\end{array}\right\}$

4. $\left.\begin{array}{l}15x-4y-6=0\\9x-2y-5=0\end{array}\right\}$ 5. $\left.\begin{array}{l}44x+3y-62=0\\20x-9y-4=0\end{array}\right\}$

6. $\left.\begin{array}{l}22x+39y-24=0\\15y+14x-24=0\end{array}\right\}$ 7. $\frac{x}{6}-\frac{y}{3}=\frac{x}{12}-\frac{2y}{3}=4$

8. $\frac{x}{5}+\frac{y}{3}=\frac{x}{4}-\frac{y}{3}-\frac{3}{20}=0$ 9. $\frac{2x-y}{21}=\frac{x-11}{8}=\frac{y+5}{4}$

10. $\frac{6x+20y}{7}=\frac{36x+16y}{16}=1.$

11. $\frac{2x+2y-3}{5}=\frac{3x-7y+4}{6}=\frac{8y-x+2}{7}.$ [C. U. '12]

12. $\frac{x+y}{2}+\frac{3x-5y}{4}=2,\ \frac{x}{14}+\frac{y}{18}=1.$ [C. U.]

85. অপনয়ন পদ্ধতি (Method of Elimination)

প্রথম সমীকরণের একটি অক্ষরের সহগ দ্বারা দ্বিতীয় সমীকরণকে গুণ করিয়া এবং দ্বিতীয় সমীকরণের সেই অক্ষরের সহগ দ্বারা প্রথম সমীকরণকে গুণ করিয়া যে দুইটি সমীকরণ পাওয়া যাইবে তাহাদিগকে যোগ বা বিয়োগ করিলে সেই অক্ষরটি বিলুপ্ত হইয়া অপর অক্ষরের একটি সমীকরণ পাওয়া যাইবে ; ইহাকে সমাধান করিয়া বিলুপ্ত অক্ষরটিরও সমাধান করা যাইবে। নিম্নে এই পদ্ধতির উদাহরণ প্রদত্ত হইল।

উদাহরণ 1. সমাধান কর : $\left.\begin{array}{r}3x+4y=5\cdots(1)\\5x+12y=3\cdots(2)\end{array}\right\}$

(1)-কে (2)-সমীকরণের x-এর সহগ 5 দ্বারা গুণ করিলে পাই

$$15x+20y=25\cdots(3)$$

(2 -কে (1)-সমীকরণের x-এর সহগ 3 দ্বারা গুণ করিলে পাই

$$15x+36y=9\cdots(4)$$

এখন, (4) হইতে (3) বিয়োগ করিলে পাই $16y=-16$, $\therefore\ y=-1$.

এখন, (1)-এ $y=-1$ বসাইয়া পাই $3x-4=5$, বা, $3x=9$, $\therefore\ x=3$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান হইল $x=3$, $y=-1$.

উদা. 2. সমাধান কর : $2x-\frac{3}{y}=3\cdots(1)$, $8x+\frac{15}{y}=-6\cdots(2)$,

[লক্ষ্য কর, এখানে (1)-কে 4 দিয়া গুণ করিলেই (2)এর xএর সহগ 8 হয়, সুতরাং এখানে x অক্ষরকে অপনয়ন করাই যুক্তিসঙ্গত। অবশ্য (1)-কে 5 দিয়া গুণ করিলেও y অপনীত হইতে পারে।]

(1)-কে 4 দ্বারা গুণ করিয়া পাই $8x-\frac{12}{y}=12\cdots(3)$

(2) হইতে (3) বিয়োগ করিয়া পাই $\frac{27}{y}=-18$, $\therefore\ y=\frac{27}{-18}=-\frac{3}{2}$.

এখন, (1)-এ $y=-\frac{3}{2}$ বসাইয়া পাই $2x-3\times-\frac{2}{3}=3$, বা, $2x+2=3$.

বা, $2x=1$, $\therefore\ x=\frac{1}{2}$, $\therefore\ x=\frac{1}{2}$, $y=-\frac{3}{2}$.

প্রশ্নমালা 54

সমাধান কর :—

1. $\left.\begin{array}{r}x+4y=10\\3x+5y=23\end{array}\right\}$

2. $\left.\begin{array}{r}4x+3y=20\\6x-y=8\end{array}\right\}$

3. $\left.\begin{array}{r}7x-3y=31\\9x-5y=41\end{array}\right\}$ [D. B. '34]

4. $\left.\begin{array}{r}6x-5y-7=0\\9x+4y-22=0\end{array}\right\}$

5. $\left.\begin{array}{l}4x-3y-6=0\\7x+3y-27=0\end{array}\right\}$ 6. $\left.\begin{array}{l}6x+20y-7=0\\3x-8y-8=0\end{array}\right\}$

7. $\left.\begin{array}{l}\frac{5}{x}+3y=8\\\frac{4}{x}-10y=56\end{array}\right\}$ [D. B. '39] 8. $\left.\begin{array}{l}\frac{x}{3}-\frac{2}{y}=1\\\frac{x}{4}+\frac{3}{y}=3\end{array}\right\}$ [A. U. '23]

9. $\left.\begin{array}{l}\frac{x+2}{7}+\frac{y-x}{4}=2x-8\\\frac{2y-3x}{3}+2y=3x+4\end{array}\right\}$ [P. U. 1892]

10. $25x+63y=\frac{15x+84y}{16}=1$ 11. $\frac{21x+22y}{41}=\frac{24x+66y}{149}=1$

12. $30x+8y-9=0=140x-36y-97$

✓ 13. $\frac{2}{x}+\frac{3}{y}-\frac{5}{6}=0=\frac{4}{x}+\frac{9}{y}-2$

✓ 14. $\frac{3x}{4}+\frac{5y}{8}-10=0=\frac{3x}{5}+\frac{7y}{4}-\left(3x-17\right).$

86. বজ্রগুণন প্রণালী (Method of Cross Multiplication)

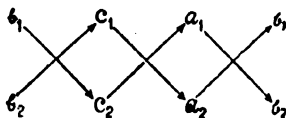
এই প্রণালীটি একটি উপপাদ্যের উপর প্রতিষ্ঠিত। সেই উপপাদ্যটি নিম্নে দেওয়া হইল।

উপপাদ্য। যদি $a_1x+b_1y+c_1=0 \cdots\cdots(1)$

$a_2x+b_2y+c_2=0 \cdots\cdots (2)$ হয়,

এবং যদি $a_1b_2-a_2b_1$এর মান শূন্য না হয়, তবে

$$\frac{x}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{y}{c_1a_2-c_2a_1}=\frac{1}{a_1b_2-a_2b_1}$$ হইবে।

উপরের সিদ্ধান্তটি সহজে মনে রাখিবার জন্য সমীকরণদ্বয়ের সহগগুলিকে নিম্নের আকারে লিখিবে। তারপর তীরচিহ্নক্রমে গুণ করিবে এবং নিম্নগামী গুণফল হইতে উর্ধ্বগামী গুণফল বিয়োগ করিবে।

দ্রষ্টব্য: প্রদত্ত সমীকরণে যদি 3টি অজ্ঞাত রাশি থাকে অর্থাৎ c_1 ও c_2 স্থানে c_1z ও c_2z থাকে, তবে উপপাদ্যটিতে লব 1-এর স্থানে z লিখিবে।

উদাহরণ 1. সমাধান কর : $\left.\begin{array}{r} 2x-3y=8 \\ 5x+7y=-9 \end{array}\right\}$

পক্ষান্তর করিয়া পাই $2x-3y-8=0$

এবং $5x+7y+9=0$

এক্ষণে বজ্রগুণন প্রণালীতে পাই

$$\frac{x}{(-3\times9)-(7\times-8)}=\frac{y}{(-8\times5)-(9\times2)}=\frac{1}{(2\times7)-(5\times-3)}$$

বা, $\frac{x}{-27+56}=\frac{y}{-40-18}=\frac{1}{14+15}$, বা, $\frac{x}{29}=\frac{y}{-58}=\frac{1}{29}$

$\therefore\ x=\frac{29}{29}=1,\ y=\frac{-58}{29}=-2.\ \therefore\ x=1, y=-2.$

87. আক্ষরিক সহগযুক্ত সমীকরণ।

আক্ষরিক সহগযুক্ত সমীকরণে x, y, z অজ্ঞাতরাশি ধরিতে হইবে, এবং a, b, c, l, m, n, ইত্যাদি অক্ষরগুলিকে জ্ঞাতরাশি ধরিতে হইবে। উপরে যে তিনটি নিয়মের উদাহরণ দেওয়া হইয়াছে, তাহার যে কোন একটির সাহায্যেই এই প্রকারের সমীকরণগুলির সমাধান হইবে।

উদাহরণ 1. সমাধান কর : $\left.\begin{array}{l} ax+by=a-b\cdots(1) \\ bx-ay=a+b\cdots(2) \end{array}\right\}$

$(1)\times a$ করিয়া পাই $a^2x+aby=a^2-ab\cdots(3)$

$(2)\times b$ করিয়া পাই $b^2x-aby=ab+b^2\cdots(4)$

(3) ও (4) যোগ করিয়া $(a^2+b^2)x=a^2+b^2$, $\therefore\ x=\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}=1.$

(1)-এ $x=1$ বসাইয়া পাই $a+by=a-b$, বা, $by=-b$,

$\therefore\ y=-1.\ \therefore\ x=1, y=-1.$

উদা. 2. সমাধান কর : $\left.\begin{array}{l} \frac{x+ab}{a}=\frac{y+ab}{b}\cdots(1) \\ ax+by=a^3+b^3\cdots(2) \end{array}\right\}$

মনে কর, $\frac{x+ab}{a}=\frac{y+ab}{b}=k$ (ধর)

$\therefore\ x+ab=ak,\ \therefore\ x=ak-ab\cdots(3)$

এবং $y+ab=bk,\ \therefore\ y=bk-ab\cdots(4)$

x ও y-এর মান (2)-এ বসাইয়া পাই,

$a(ak-ab)+b(bk-ab)=a^3+b^3$

বা, $a^2k-a^2b+b^2k-ab^2=a^3+b^3$,

বা, $(a^2+b^2)k=a^3+a^2b+ab^2+b^3=a^2(a+b)+b^2(a+b)$
$$=(a+b)(a^2+b^2), \quad \therefore \quad k=a+b.$$

$\therefore$ (3) ও (4) হইতে $\left.\begin{array}{l} x=a(a+b)-ab=a^2 \\ y=b(a+b)-ab=b^2 \end{array}\right\}$.

প্রশ্নমালা 55

সমাধান কর :—

1. $\left.\begin{array}{l} 6x-7y-16=0 \\ 9x-5y-35=0 \end{array}\right\}$

2. $\left.\begin{array}{l} 3x+4y=11 \\ 5x-2y=1 \end{array}\right\}$ [W. B. S. F. '53]

3. $\left.\begin{array}{l} 6x-7y-2=0 \\ 7x-9y+1=0 \end{array}\right\}$

4. $\left.\begin{array}{l} x+y=a+b \\ ax-by=a^2-b^2 \end{array}\right\}$

5. $a(x+y)=b(x-y)=2ab$ [C. U. '30]

6. $\left.\begin{array}{l} ax+by=c^2 \\ a^2x+b^2y=c^2 \end{array}\right\}$

7. $\left.\begin{array}{l} a(x+y)+b(x-y)=a^2-ab+b^2 \\ a(x+y)-b(x-y)=a^2+ab+b^2 \end{array}\right\}$

8. $\frac{a}{x}-\frac{b}{y}=0, \ \frac{ab^2}{x}+\frac{a^2b}{y}=a^2+b^2$

9. $\left.\begin{array}{l} \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2 \\ ax-by=a^2-b^2 \end{array}\right\}$

10. $\left.\begin{array}{l} \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=a+b \\ \frac{x}{a^2}+\frac{y}{b^2}=2 \end{array}\right\}$

11. $\left.\begin{array}{l} \frac{b}{ax}+\frac{ay}{b}=a+b \\ \frac{a}{x}+by=a^2+b^2 \end{array}\right\}$

12. $\left.\begin{array}{l} \frac{x}{a}=\frac{y}{b} \\ ax+by=a^2+b^2 \end{array}\right\}$

13. $\frac{x+y}{xy}=5, \quad \frac{x-y}{xy}=9.$ [C. U. '32]

14. $\left.\begin{array}{l} \frac{x+y}{xy}=2 \\ \frac{x-y}{xy}=1 \end{array}\right\}$ [D. B. '31]

15. $\left.\begin{array}{l} \frac{a-b}{x}+\frac{a+b}{y}=\frac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2} \\ \frac{a+b}{x}+\frac{a-b}{y}=2 \end{array}\right\}$

16. $\left.\begin{array}{l} \frac{x+a}{2a+b}=\frac{y+2b}{a+b} \\ bx+ay=a^2+b^2 \end{array}\right\}$

17. $\left.\begin{array}{l} 23x+17y=63 \\ 17x+23y=57 \end{array}\right\}$

18. $ax+by=1,\ bx+ay=\dfrac{(a+b)^2}{a^2+b^2}-1$ [D. B. '51]

19. $\left.\begin{array}{l} ax+by=c \\ bx+ay=1+c \end{array}\right\}$ [E. B. S. B. '52]

20. $\left.\begin{array}{l} (a-b)x+(a+b)y=a^2-2ab-b^2 \\ (a+b)(x+y)=a^2+b^2 \end{array}\right\}$

সমীকরণ-সাধ্য সহজ প্রশ্নাবলী

88. [ভগ্নাংশ সম্বন্ধীয়]

উদাহরণ 1. কোন একটি ভগ্নাংশের লবের সহিত 1 যোগ এবং হর হইতে 1 বিয়োগ করিলে উহা 1 হয়; কিন্তু, লবের সহিত হর যোগ এবং হর হইতে লব বিয়োগ করিলে ভগ্নাংশটি 6 হয়। ভগ্নাংশটি নির্ণয় করিতে হইবে।

মনে কর, ভগ্নাংশটি $=\dfrac{x}{y}$. এখন প্রথম সর্তানুসারে, $\dfrac{x+1}{y-1}=1\cdots(1)$

এবং দ্বিতীয় সর্তানুসারে, $\dfrac{x+y}{y-x}=6\cdots(2)$

(1) হইতে পাই $x+1=y-1$, $\therefore\ x-y=-2\cdots(3)$

(2) হইতে পাই $x+y=6y-6x$, $\therefore\ 7x=5y$, $\therefore\ x=\frac{5}{7}y\cdots(4)$

(3)-এ $x=\frac{5}{7}y$ বসাইয়া পাই, $\frac{5}{7}y-y=-2$, বা, $-\frac{2}{7}y=-2$,

$\therefore\ y=7$; $\therefore\ x=\frac{5}{7}\times7=5$. $\therefore$ নির্ণেয় ভগ্নাংশ $=\frac{5}{7}$.

89. [অঙ্ক (digits) সম্বন্ধীয়]

যদি এককের অঙ্ক x ও দশকের অঙ্ক y হয়, তবে সংখ্যাটি হইবে $10y+x$. যদি শতকের স্থানে z থাকিত, তবে সংখ্যাটি হইত $100z+10y+x$.

বালকেরা প্রায়ই সংখ্যা ও অঙ্ক গোলমাল করিয়া ফেলে।

উদা. 2. 100 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর কোন সংখ্যার অঙ্কগুলির সমষ্টি 6 এবং ঐ অঙ্কগুলি উল্টাইয়া লিখিলে যে সংখ্যা হয় তাহা পূর্বের সংখ্যা অপেক্ষা 18 কম হইবে। সংখ্যাটি কত? [C. U. '25]

সংখ্যাটি 100 অপেক্ষা কম বলিয়া উহা দুই অঙ্কের।

মনে কর, এককের অঙ্ক x এবং দশকের অঙ্ক y, সুতরাং সংখ্যাটি $10y+x$.

প্রদত্ত সর্তদ্বয় হইতে পাই $x+y=6\cdots(1)$

এবং $10x+y=10y+x-18\cdots(2)$.

(2) হইতে পাই $9x-9y=-18$, বা, $x-y=-2\cdots(3)$.

এখন (1) ও (3) সমাধান করিলে পাই $x=2$, এবং $y=4$.

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাটি $=10\times4+2=42$.

উদা. 3. তিন অঙ্কবিশিষ্ট এমন একটি সংখ্যা নির্ণয় করিতে হইবে যাহার অঙ্কগুলি বিপরীতক্রমে বসাইলে সংখ্যাটি একই থাকে, এবং যাহার অঙ্কগুলির যোগফল 16 এবং অন্তরফল 2.

এখানে স্পষ্টতঃ দশকের অঙ্ক স্থির এবং শতক ও এককের অঙ্ক দুইটি সমান। মনে কর, শতক ও এককের অঙ্ক x এবং দশকের অঙ্ক y ; তাহা হইলে সংখ্যাটি হইল $100x+10y+x$.

এখন প্রশ্নানুসারে পাই $2x+y=16$, এবং $x-y=2$.

ঐ সমীকরণ দুইটি সমাধান করিলে পাই $x=6$, $y=4$. $\therefore$ সংখ্যাটি$=646$.

90. [বয়স সম্বন্ধীয়]

উদা. 4. পিতা ও পুত্রের বয়সের সমষ্টি 50 বৎসর ; যখন পুত্রের বয়স পিতার বর্তমান বয়সের সমান হইবে তখন তাহাদের বয়সের সমষ্টি 102 বৎসর হইবে। পিতা ও পুত্রের বর্তমান বয়স নির্ণয় করিতে হইবে।

মনে কর, পিতার বর্তমান বয়স x বৎসর এবং পুত্রের বর্তমান বয়স y বৎসর, সুতরাং প্রথম সর্তানুসারে, $x+y=50\cdots(1)$

পিতা ও পুত্রের বয়সের অন্তর হইল $x-y$ বৎসর ; সুতরাং $x-y$ বৎসর পরে পুত্রের বয়স হইবে x বৎসর এবং পিতার বয়স হইবে $2x-y$ বৎসর ;

$\therefore$ দ্বিতীয় সর্তানুসারে সমীকরণ হইল

$x+(2x-y)=102$, অর্থাৎ $3x-y=102\cdots\cdots(2)$.

(1) ও (2) যোগ করিলে পাই $4x=152$, $\therefore$ $x=38$,

সুতরাং $y=50-x=50-38=12$.

অতএব, পিতার বয়স 38 বৎসর এবং পুত্রের বয়স 12 বৎসর।

91. [নৌকা ও স্রোতের বেগ]

স্থির জলে অর্থাৎ নদীতে স্রোত না থাকিলে নৌকার গতিবেগ যত, এক ঘণ্টায় নৌকা ততদূর যায়। যদি স্রোত থাকে তবে (1) স্রোতের অনুকূলে (with the stream or current, down-stream, down the river) যাইবার সময় নৌকার গতি ও স্রোতের গতির সমষ্টি যত, এক ঘণ্টায় নৌকা ততদূর যায়, কিন্তু (2) স্রোতের প্রতিকূলে বা বিপরীত দিকে (against the current, up-stream or up the river) যাইবার সময় নৌকার গতি ও স্রোতের গতির অন্তর যত, নৌকা এক ঘণ্টায় ততদূর যায়।

উদা. 5. এক ব্যক্তি স্থির জলে ঘণ্টায় 5 মাইল নৌকা বাহিয়া যায়। স্রোতের অনুকূলে 40 মাইল যাইতে তাহার যে সময় লাগে স্রোতের

প্রতিকূলে 40 মাইল যাইতে তাহার 3 গুণ সময় লাগে। স্রোতের গতিবেগ নির্ণয় কর। [C. U. '35]

মনে কর, স্রোতের গতি ঘণ্টায় x মাইল, সুতরাং নৌকাটি স্রোতের প্রতিকূলে ঘণ্টায় $5-x$ মাইল, এবং স্রোতের অনুকূলে ঘণ্টায় $5+x$ মাইল যায়। $\therefore$ 40 মাইল স্রোতের প্রতিকূলে ও অনুকূলে যাইতে যথাক্রমে $\frac{40}{5-x}$ ও $\frac{40}{5+x}$ ঘণ্টা লাগে।

এখন প্রদত্ত সর্ত হইতে পাই $\frac{40}{5-x}=3\times\frac{40}{5+x}$, বা, $\frac{1}{5-x}=\frac{3}{5+x}$,

বা, $5+x=15-3x$, বা $4x=10$, $\therefore$ $x=2\frac{1}{2}$.

$\therefore$ নির্ণেয় স্রোতের গতি ঘণ্টায় $2\frac{1}{2}$ মাইল।

[বিবিধ]

উদা. 6. 9টি ঘোড়া এবং 7টি গরুর মূল্য 3000 টাকা, এবং একই দরে 6টি ঘোড়া এবং 13টি গরুর মূল্য একত্রে 3000 টাকা। 5টি ঘোড়া এবং 3টি গরুর মূল্য একত্রে কত টাকা হইবে?

মনে কর, একটি ঘোড়ার মূল্য x টাকা, এবং একটি গরুর মূল্য y টাকা,

সুতরাং প্রশ্নানুসারে, $9x+7y=3000\cdots(1)$

এবং $6x+13y=3000\cdots(2)$

$(1)\times 2$ করিয়া পাই $18x+14y=6000\cdots(3)$

$(2)\times 3$ করিয়া পাই $18x+39y=9000\cdots(4)$

(4) হইতে (3) বিয়োগ করিয়া পাই $25y=3000$, $\therefore$ $y=120$.

(1)এ $y=120$ বসাইয়া $9x+840=3000$, বা, $9x=2160$, $\therefore$ $x=240$.

$\therefore$ একটি ঘোড়ার মূল্য $=240$ টা. এবং একটি গরুর মূল্য $=120$ টা.।

$\therefore$ 5টি ঘোড়া এবং 3টি গরুর মূল্য একত্রে

$=240$ টা. $\times 5+120$ টা. $\times 3=(1200+360)$ টা. $=1560$ টাকা।

উদা. 7. কোন আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 3 মিটার বাড়াইলে এবং প্রস্থ 3 মিটার কমাইলে ক্ষেত্রফল 18 বর্গ মিটার কমিয়া যায়। আবার, দৈর্ঘ্য 3 মিটার বাড়াইলে এবং প্রস্থ 3 মিটার বাড়াইলে ক্ষেত্রফল 60 বর্গ মিটার বাড়ে। ক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

মনে কর, ক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য x মিটার এবং প্রস্থ y মিটার,

$\therefore$ ক্ষেত্রফল $=xy$ বর্গ মিটার।

প্রথম সর্তানুযায়ী $(x+3)(y-3)=xy-18 \cdots (1)$

দ্বিতীয় সর্তানুযায়ী $(x+3)(y+3)=xy+60 \cdots (2)$

(1) হইতে $3y-3x-9=-18$ অর্থাৎ $3y-3x=-9 \cdots (3)$

(2) হইতে $3y+3x=51 \cdots (4)$. (3)+(4) করিয়া $6y=42$, $\therefore \ y=7$.

(3)-এ $y=7$ বসাইয়া $21-3x=-9$, বা, $-3x=-30$. $\therefore \ x=10$.

$\therefore$ নির্ণেয় দৈর্ঘ্য 10 মিটার এবং প্রস্থ 7 মিটার।

প্রশ্নমালা 56

1. দুইটি সংখ্যার সমষ্টি 52 এবং অন্তরফল 4 ; সংখ্যা দুইটি কত ?

2. দুইটি সংখ্যা এমন যে ছোটটির 3 গুণ বড়টির দ্বিগুণ অপেক্ষা 18 বেশী ; এবং ছোটটির $\frac{1}{3}$ অংশ ও বড়টির $\frac{1}{5}$ অংশ একত্রে 21 হয়। সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

3. দুইটি সংখ্যার সমষ্টি 80 ; উহাদের অন্তরফলের 3 গুণ বড় সংখ্যাটি অপেক্ষা 20 অধিক। সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

4. দুইটি সংখ্যা এমন যে বড়টির $\frac{1}{4}$ অংশ ছোটটির $\frac{1}{6}$ অংশ অপেক্ষা 5 অধিক ; এবং বড়টির $\frac{1}{6}$ অংশ ও ছোটটির $\frac{1}{4}$ অংশ একত্রে 12 হয়। সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

5. দুইটি সংখ্যার বড়টির $\frac{1}{5}$ অংশ ছোটটির $\frac{1}{3}$ অংশের সমান। উভয়ের সমষ্টি 16 হইলে, সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

6. কোন ভগ্নাংশের লব হইতে 2 বিয়োগ করিলে এবং হরের সহিত 3 যোগ করিলে ভগ্নাংশটি $\frac{1}{4}$ হয় ; আবার, লবের সহিত 6 যোগ করিলে এবং হরকে 3 গুণ করিলে উহা $\frac{2}{3}$ হয় ; ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর।

7. কোন ভগ্নাংশের লব ও হরে 1 যোগ করিলে উহা $\frac{4}{5}$ হয়, এবং লব ও হর হইতে 5 বিয়োগ করিলে উহা $\frac{1}{2}$ হয়। ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর। [C. U. '16]

8. কোন ভগ্নাংশের লব হইতে 1 বিয়োগ ও হরে 2 যোগ করিলে উহা $\frac{1}{2}$ হয় ; এবং লব হইতে 7 ও হর হইতে 2 বিয়োগ করিলে উহা $\frac{1}{3}$ হয়। ভগ্নাংশটি নির্ণয় করিতে হইবে। [C. U. '28]

9. কোন ভগ্নাংশের লব ও হর হইতে 1 বিয়োগ করিলে উহা $\frac{2}{3}$ হয় ; আবার লবের সহিত 2 যোগ এবং হর হইতে 2 বিয়োগ করিলে উহা 1 হয়। ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর।

10. দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার অঙ্ক দুইটির সমষ্টি 9 ; অঙ্কগুলি স্থান বিনিময় করিলে যে সংখ্যা হয় তাহা পূর্বের সংখ্যা অপেক্ষা 27 বেশী হয়। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

11. দুই অঙ্কবিশিষ্ট কোন সংখ্যা উহার অঙ্কসমষ্টির তিনগুণ ; অঙ্কগুলি বিপরীতক্রমে বসাইলে যে সংখ্যা হয় তাহা পূর্ব সংখ্যার তিনগুণ অপেক্ষা 9 কম। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

12. কোন সংখ্যার অঙ্কগুলি উন্টাইয়া লিখিলে সংখ্যাটির $\frac{5}{6}$এর সমান হইবে এবং অঙ্কদ্বয়ের অন্তর 1 ; সংখ্যাটি নির্ণয় কর। [C. U. '49]

13. দুই অঙ্কবিশিষ্ট কোন সংখ্যা এবং ঐ অঙ্কদ্বয় উন্টাইয়া দিলে যে সংখ্যা হয় তাহাদের সমষ্টি 110 এবং উভয় অঙ্কের অন্তর 6 ; সংখ্যাটি কত ?

[A. U. '28]

14. ABC ত্রিভুজের $\angle B = 4x$ ডিগ্রি, $\angle C = x$ ডিগ্রি, $\angle A = y$ ডিগ্রি এবং $3\angle A - 5\angle B = 15^\circ$; x ও yএর মান নির্ণয় কর।

15. ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের $\angle A = (2x + 13)$ ডিগ্রি, $\angle B = (2y - 18)$ ডিগ্রি, $\angle C = (y + 31)$ ডিগ্রি, $\angle D = (3x - 29)$ ডিগ্রি। x ও yএর মান নির্ণয় কর।

16. A হইতে B সাত বৎসরের বড় ; 15 বৎসর পূর্বে Aর বয়স Bর বয়সের $\frac{3}{4}$ ছিল। উভয়ের বর্তমান বয়স নির্ণয় কর।

17. পিতা ও তাহার দুই পুত্রের বয়সের সমষ্টি 57 বৎসর, একটি পুত্র অপরটি অপেক্ষা 2 বৎসরের বড়। জ্যেষ্ঠ পুত্রের বয়স যখন পিতার বর্তমান বয়সের সমান হইবে, তখন যদি তিনজনই বাঁচিয়া থাকে, তবে তাহাদের বয়সের সমষ্টি 162 বৎসর হইবে। প্রত্যেকের বর্তমান বয়স কত ?

18. 20 বৎসর পূর্বে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের 4 গুণ ছিল ; 4 বৎসর পরে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের দ্বিগুণ হইবে। উহাদের বর্তমান বয়স কত ?

[C. U. '40]

19. তিন বৎসর পূর্বে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের 5 গুণ ছিল। 4 বৎসর পরে পিতার বয়স 4 বৎসর পূর্বে পুত্রের যত বয়স ছিল তাহার 7 গুণ হইবে। উভয়ের বর্তমান বয়স নির্ণয় কর।

20. 5টি টেবিল ও 9খানি চেয়ারের মূল্য একত্রে 90 টাকা ; আবার 4টি টেবিল ও 5খানি চেয়ারের মূল্য একত্রে 61 টাকা। তিনটি টেবিল ও 6খানি চেয়ারের একত্রে মূল্য কত হইবে ? [P. U. '30]

21. 5টি ঘোড়া ও 7টি গরুর মূল্য একত্রে 2650 টাকা ; আবার 3টি ঘোড়া ও 4টি গরুর মূল্য একত্রে 1560 টাকা। একটি ঘোড়া ও একটি গরুর মূল্য একত্রে কত হইবে ?

22. এক ব্যক্তি 7টি ঘোড়া বিক্রয় করিয়া 9টি গরু কিনিলে তাহার তহবিল 176 টাকা বাড়ে, কিন্তু ঐ দরে 9টি ঘোড়া কিনিয়া 13টি গরু বিক্রয় করিলে তাহার তহবিল 182 টাকা কমিত। একটি গরুর মূল্য কত ?

23. দুই জন পুরুষ এবং ছয় জন বালক একটি কাজ 5 দিনে করিতে পারে, ঐ কাজ 8 জন পুরুষ এবং 3 জন বালক 3 দিনে করিতে পারে। একজন পুরুষ ও 3 জন বালক ঐ কাজ কতদিনে করিবে?

24. দুই ব্যক্তি পরস্পর $8\frac{1}{4}$ কিলোমিটার দূর হইতে একই সময়ে যাত্রা করিল। যদি তাহারা একই দিকে যায়, তবে তাহারা 11 ঘণ্টায় মিলিত হয়; কিন্তু যদি পরস্পরের দিকে যায়, তবে 1 ঘণ্টায় মিলিত হয়। উভয়ের গতিবেগ নির্ণয় কর।

25. একখানি নৌকা 10 ঘণ্টায় স্রোতের অনুকূলে 44 কি. মি. ও প্রতিকূলে 30 কি. মি. যায়; আবার, 13 ঘণ্টায় স্রোতের অনুকূলে 55 কি. মি. ও প্রতিকূলে 40 কি. মিটার যায়। স্রোতের বেগ ও নৌকার নিজস্ব বেগ নির্ণয় কর।

26. এক ব্যক্তি স্রোতের সঙ্গে 10 ঘণ্টায় 70 মাইল নৌকা বাহিয়া গিয়া 70 ঘণ্টায় ফিরিয়া আসিল। ঘণ্টায় স্রোতের বেগ কত? [C. U. '41]

27. কোন ছাত্রকে কোন সংখ্যার সহিত 3 যোগ করিয়া যোগফলকে 2 দ্বারা ভাগ করিতে বলায়, সে সংখ্যাটি হইতে 2 বিয়োগ করিয়া বিয়োগফলকে 3 দ্বারা গুণ করিল। ইহাতে তাহার উত্তরটি কিন্তু ঠিকই হইল। সংখ্যাটি এবং উত্তরটি কত?

28. একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 5 ইঞ্চি কম ও প্রস্থ 3 ইঞ্চি অধিক হইলে ক্ষেত্রফল 9 বর্গ ইঞ্চি কম হয়। আবার, দৈর্ঘ্য 3 ইঞ্চি ও প্রস্থ 2 ইঞ্চি বেশী হইলে ক্ষেত্রফল 67 বর্গ ইঞ্চি বেশী হয়। ক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

29. 55 মাইল দূরবর্তী দুইটি স্থান হইতে A ও B একই সময়ে যাত্রা করিয়া 5 ঘ. 30 মি. পরে মিলিত হইল। A তাহার গতিবেগ অর্ধেক এবং B দ্বিগুণ করিলে উভয়ে 5 ঘণ্টায় মিলিত হইত। প্রত্যেকের গতিবেগ নির্ণয় কর।

30. ফুটবল খেলা দেখিতে আমি 16 টাকা খরচ করিতে পারি। যদি প্রতিবার ট্যাক্সি ভাড়া ও প্রবেশ মূল্য দিই, তবে আমি আটটি খেলা দেখিতে পারি; যদি প্রতি তিনবারে একবার হাঁটিয়া যাই, তবে 9টি খেলা দেখিতে পারি। খেলা দেখার প্রবেশমূল্য কত?

31. কোন আয়তাকার প্রাঙ্গণের পরিসীমা 60 ফুট। উহার দৈর্ঘ্য 3 ফুট অধিক এবং প্রস্থ 3 ফুট কম হইলে উহার ক্ষেত্রফল 21 বর্গফুট কম হয়। উহার দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর। [C. U. '27]

32. এক ব্যক্তি ঘণ্টায় 4 কি. মি. বেগে নৌকা চালাইয়া স্রোতের অনুকূলে যতক্ষণে 30 কি. মিটার যায়, স্রোতের প্রতিকূলে উহার 3 গুণ সময়ে ঐ পথ যায়। স্রোতের বেগ নির্ণয় কর।

33. যদি দুই অঙ্কবিশিষ্ট কোন সংখ্যা অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টির 4 গুণ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, অঙ্ক দুইটি উল্টাইয়া লিখিলে উৎপন্ন সংখ্যাটি অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টির 7 গুণ হইবে। [W. B. S. F. '56]

34. B-কে A বলিল, "তোমার বর্তমান বয়সের সমান যখন আমার বয়স ছিল, তখন তোমার যে বয়স ছিল আমার বর্তমান বয়স তাহার দ্বিগুণ।" উভয়ের বর্তমান বয়স মোট 63 বৎসর হইলে তাহাদের বয়স কত ?

[A. U. '31]

35. এক ব্যক্তি অপরাহ্ণ 3টা ও 4টার মধ্যে গৃহ হইতে বাহির হইয়া 4টা ও 5টার মধ্যে ফিরিয়া আসিয়া দেখিলেন তাঁহার ঘড়ির কাঁটা দুইটি পরস্পর স্থান বিনিময় করিয়াছে। তিনি কখন বাহির হইয়াছিলেন এবং কখন ফিরিয়া আসেন ?

36. দুইটি পাত্রে দুধ ও জল যথাক্রমে 2 : 3 এবং 5 : 4 অনুপাতে মিশান আছে। ঐ দুই মিশ্রিত দ্রব্য কি অনুপাতে লইয়া একত্রে মিশাইলে নূতন মিশ্রণে দুধ ও জলের পরিমাণ সমান হইবে ?

37. $ax^2+bx+4=0$ সমীকরণটি $x=\frac{1}{2}$ ও $x=4$ দ্বারা সিদ্ধ হইলে a ও bর মান কত হইবে ?

38. প্রমাণ কর যে x ও yএর এমন কোন মান নাই যাহা দ্বারা $7y-3x=2$, $5x-8y=4$ এবং $3x=17-2y$ এই তিনটি সমীকরণই যুগপৎ সিদ্ধ হইবে।

সরল সমীকরণের লেখচিত্র

(Graphs of Simple Equation)

92. লেখ অঙ্কনে অক্ষরেখা, মূলবিন্দু, ছক কাগজ প্রভৃতি সম্বন্ধে তোমরা পূর্বেই জ্ঞানলাভ করিয়াছ।

অক্ষরেখা (Axes)। ছক কাগজে XOX' ও YOY' দুইটি সরলরেখা O বিন্দুতে পরস্পর সমকোণে ছেদ করিলে XOX' রেখাকে x-অক্ষ (x-axis) এবং YOY'কে y-অক্ষ (y-axis) বলে। XOX' অনুভূমিক (horizontal) রেখা এবং YOY' রেখাটি উল্লম্ব (vertical)। O বিন্দুকে **মূলবিন্দু** (origin) ধরা হয়। দূরত্ব গণনা মূলবিন্দু হইতে আরম্ভ হয়। কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক (co-ordinates) কাহাকে বলে এবং কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক হইতে বিন্দুটিকে ছক কাগজে কিরূপে স্থাপন করিতে হয় অথবা বিন্দুটি ছক কাগজে স্থাপিত

থাকিলে তাহার স্থানাঙ্ক কিরূপে নির্ণয় করিতে হয় তাহা তোমরা পূর্বেই শিখিয়াছ। নিম্নের নিয়মগুলি মনে রাখিবে :—

(1) O বিন্দু হইতে ডানদিকে OX বরাবর যত গণনা হইবে তাহার অঙ্কগুলি হইবে ধনাত্মক (positive) এবং বামদিকে OX' বরাবর যত গণনা হইবে তাহার অঙ্কগুলি হইবে ঋণাত্মক (negative)।

(2) আবার, O বিন্দু হইতে উপর দিকে OY বরাবর গণনায় অঙ্কগুলি হইবে ধনাত্মক এবং নীচের দিকে OY' বরাবর গণনায় অঙ্কগুলি হইবে ঋণাত্মক।

(3) সাধারণতঃ ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহু $\frac{1}{10}$ ইঞ্চি বা ·1 ইঞ্চি হইয়া থাকে। বিন্দু স্থাপনের সময় ঐরূপ এক বা একাধিক বাহুর সমান দৈর্ঘ্য একক ধরিয়া দূরত্ব মাপা হয়।

[**দ্রষ্টব্য : ছক কাগজ :** সাধারণত ছক কাগজে ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের বাহু $\frac{1}{10}$ ইঞ্চি বা ·1 ইঞ্চি হইয়া থাকে। মিলিমিটার, সেন্টিমিটার মাপেও ছক কাগজ প্রস্তুত হইতে পারে। ছক কাগজ যেরূপই হউক না কেন, উহার ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রগুলির এক বা একাধিক বাহুর সমান দৈর্ঘ্য একক ধরিয়া দূরত্ব মাপা হয়। একটি বাহু যদি দৈর্ঘ্য একক হয়, তবে কোন ক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের মাপ দুইটি গুণ করিয়া যত হয়, তত বর্গ একক উহার ক্ষেত্রফল হইবে।

প্রশ্ন সমাধানে কোন দূরত্বের মাপকে দৈর্ঘ্য এককে এবং ক্ষেত্রফলের পরিমাণকে বর্গ এককে প্রকাশ করা হয়। আর, যদি একটি ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য ·1 ইঞ্চি অথবা ·1 সেন্টিমিটার জানা থাকে, তবে কোন দূরত্বকে ইঞ্চিতে বা সেন্টিমিটারে এবং কোন ক্ষেত্রফলকে বর্গ ইঞ্চিতে বা বর্গ সেন্টিমিটারে প্রকাশ করা যায়।]

বিন্দু স্থাপন : এখন XOX' হইতে 3" এবং YOY' হইতে 2" দূরে অবস্থিত বিন্দুটিকে স্থাপন করিবার নিয়ম হইল এই—O হইতে OX বরাবর 2" যাইয়া সেখান হইতে উপর দিকে OY এর সমান্তরালভাবে 3" যাইলে যে বিন্দুটি পাওয়া যাইবে সেইটি হইল উক্ত বিন্দুটির অবস্থান। ঐ বিন্দুটির অবস্থান লিখিতে হইলে উহাকে (2, 3) লিখিতে হইবে। প্রথম অঙ্ক 2এর অর্থ OX বরাবর 2 একক গণিতে হইবে এবং দ্বিতীয় অঙ্ক 3এর অর্থ হইল OX বরাবর গণনা শেষ করিয়া সেখান হইতে উপর দিকে OYএর সমান্তরাল রেখা বরাবর 3 একক গণনা করিতে হইবে। (2, 3) অঙ্ক দুইটিকে উক্ত বিন্দুর স্থানাঙ্ক (co-ordinates) বলে। স্থানাঙ্কের প্রথম অঙ্কটিকে বলে **ভুজ** (abscissa) এবং দ্বিতীয় অঙ্কটিকে বলে **কোটি** (ordinate)। ভুজ ও কোটি একত্রে ঐ বিন্দুর স্থানাঙ্ক হইয়া থাকে।

O বা মূলবিন্দুটির স্থানাঙ্ক (0, 0)।

93. লেখ অঙ্কনে নিম্ন বিষয়গুলি সম্বন্ধে অবহিত হইবে :—

(1) XOX' ও YOY' অক্ষরেখা দুইটি ছক কাগজে স্পষ্টভাবে অঙ্কিত করিতে হইবে।

(2) সংস্থাপিত বিন্দুটিকে (·) চিহ্ন অথবা ক্ষুদ্র (×) চিহ্ন দ্বারা সূচিত করিয়া উহার পাশে উহার স্থানাঙ্ক লিখিতে হইবে।

(3) স্কেল অর্থাৎ ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের যতগুলি বাহুর সমান **দৈর্ঘ্য একক** ধরা হইয়াছে তাহা লিখিতে হইবে।

(4) সর্বোপরি চিত্রটি পরিচ্ছন্ন হওয়া চাই।

এক্ষণে সরল একমাত্রিক সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কনের প্রণালী দেখান হইতেছে।

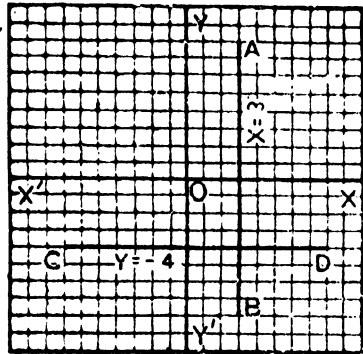
উদাহরণ 1. (1) $x=0$ এবং (2) $y=0$ এই দুইটি সমীকরণের লেখ-চিত্র আঁকিতে হইবে।

(1) $x=0$ সমীকরণের অর্থ এই যে, একটি চলবিন্দুর সর্বাবস্থানে ইহার ভুজ 0 হইলে ইহার সঞ্চারপথ কি হইবে। স্পষ্টতঃ y-অক্ষরেখার যে কোন বিন্দুর ভুজ $=0$; $\therefore$ y-অক্ষরেখাই ইহার সঞ্চারপথ এবং YOY' বা y-অক্ষ-রেখাই হইবে $x=0$ সমীকরণের লেখচিত্র।

(2) অনুরূপে $y=0$ সমীকরণের লেখচিত্র হইবে x-অক্ষরেখা বা XOX' রেখা।

উদা. 2. (1) $x=3$ এবং (2) $y=-4$এর লেখচিত্র আঁকিতে হইবে।

(1) $x=3$এর অর্থ এই যে, কোন বিন্দুর সর্বাবস্থানে ইহার ভুজ 3 একক হইবে।

ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গের একটি বাহুকে দৈর্ঘ্য একক ধরিয়া O হইতে OX বরাবর 3 দৈর্ঘ্য একক দূরে YOY' এর সমান্তরাল সরলরেখা AB আঁক। এই সরলরেখাস্থ যে কোন বিন্দুর ভুজ 3 একক। সুতরাং ইহাই $x=3$এর লেখচিত্র।

চিত্র নং 1

[**দ্রষ্টব্য :** যদি $x=-3$ হইত, তবে x-অক্ষের negative দিকে অর্থাৎ বামদিকে 3 একক দূরে y-অক্ষের সমান্তরাল রেখাটি লেখ হইত।]

(2) অনুরূপে $y = -4$এর লেখচিত্র হইবে CD সরলরেখা [চিত্র 1 দেখ।]

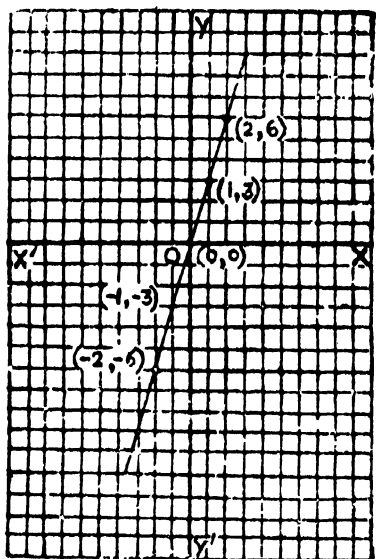
$y = -4$; এখানে $(1, -4)$, $(2, -4)$, $(5, -4)$ প্রভৃতি বিন্দুগুলি লেখটির উপর থাকিবে। এখানে CD লেখ y-অক্ষের negative দিকে 4 একক দূরে x-অক্ষের সমান্তরাল।

উদা. 3. $y = 3x$এর লেখচিত্র অঙ্কিত করিতে হইবে।

প্রথমে xএর বিভিন্ন মান অনুসারে yএর মানের তালিকা নিম্ন আদর্শ অনুযায়ী প্রস্তুত করিতে হইবে। সমীকরণটি হইতে পাই

x	0	1	2	-1	-2	…
y	0	3	6	-3	-6	…

চিত্র নং 2

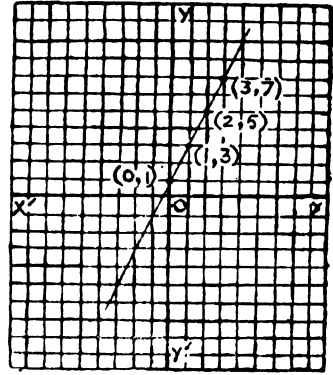
ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুকে দৈর্ঘ্য একক ধরিয়া (0,0), (1, 3), (2, 6), $(-1, -3)$, $(-2, -6)$ প্রভৃতি বিন্দুগুলি স্থাপন কর। ইহাদের যে কোন দুইটি বিন্দু সরলরেখা দ্বারা যোগ করিয়া তাহাকে উভয়দিকে বর্ধিত কর। দেখা যাইবে, অপর বিন্দুগুলিও এই সরলরেখার উপর অবস্থিত হইবে। আবার, এই সরলরেখার উপর যে কোন বিন্দুর ভুজ-কোটি (স্থানাঙ্ক) লইয়া পরীক্ষা করিয়া দেখ যে উহাদের দ্বারা $y = 3x$ সমীকরণটি সিদ্ধ হয়। সুতরাং $y = 3x$এর লেখচিত্র হইল একটি সরলরেখা [চিত্র 2]।

উদা. 4. $y = 2x + 1$এর লেখচিত্র অঙ্কিত কর।

[এই প্রশ্নটিকে $F(x) = 2x + 1$ অথবা $2x + 1$ এই অপেক্ষকের লেখচিত্র অঙ্কিত করিতে হইবে—এইভাবেও বলা যাইতে পারে।]

প্রথমে xএর বিভিন্ন মান অনুসারে yএর মানের তালিকা প্রস্তুত করা হইল। সমীকরণটি হইতে পাই

x	0	1	2	3	…
y	1	3	5	7	…

চিত্র নং 3

ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গ-ক্ষেত্রের একটি বাহুর সমান দৈর্ঘ্য একক ধরিয়া (0,1), (1,3), (2, 5), (3,7) বিন্দুগুলি স্থাপন কর। ইহাদের যে কোন দুইটি বিন্দু সরলরেখা দ্বারা যুক্ত করিয়া উহাকে উভয়দিকে বর্ধিত করিলে দেখা যাইবে যে অপর বিন্দুগুলি এই সরলরেখার উপর অবস্থিত। আবার, এই সরলরেখার উপর যে কোন বিন্দুর ভুজ-কোটি সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে। সুতরাং উক্ত সরলরেখাই উক্ত সমীকরণ বা অপেক্ষকের লেখচিত্র হইল। [চিত্র 3 দেখ।]

উদা. 5. $3x+4y=25$ এবং $4x-3y=0$, ইহাদের লেখ অঙ্কিত কর এবং ইহাদের ছেদ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [C. U. '14]

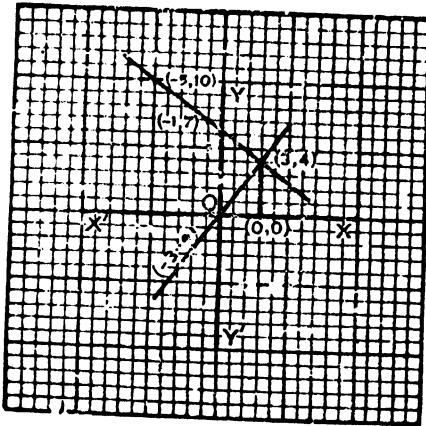
চিত্র নং 4

$$3x+4y=25\cdots\text{(i)}$$

বা, $4y=25-3x$,

$\therefore\quad y=\dfrac{25-3x}{4}$, ইহা হইতে

x	3	−1	−5
y	4	7	10

;

(3, 4), (−1, 7), (−5, 10) বিন্দুগুলি দিয়া যে সরলরেখা গিয়াছে উহাই সমীকরণ-(i)এর লেখ। [চিত্র 4 দেখ]

$4x-3y=0\cdots\text{(ii)}$, বা, $-3y=-4x$, বা, $3y=4x$,

$\therefore \quad y=\frac{4x}{3}$, ইহা হইতে

পাই

x	0	3	-3	...
y	0	4	-4	...

(0, 0), (3, 4), (-3, -4) বিন্দুগুলি দিয়া যে সরলরেখা গিয়াছে উহাই সমীকরণ (ii)-এর লেখ।

উভয়ক্ষেত্রে দৈর্ঘ্য একক = '1",

লেখ দুইটি যে বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে তাহার স্থানাঙ্ক (3, 4).

[**দ্রষ্টব্য :** ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করিতে বলিলে দুইটি লেখই একই অক্ষদ্বয় লইয়া আঁকিতে হইবে।]

উদা. 6. $3x-2y=6$ ও $2x+3y=0$ ইহাদের লেখ আঁকিয়া ছেদবিন্দুতে কোণের পরিমাণ নির্ণয় কর। [C. U. 1932]

$3x-2y=6 \cdots$(i)

বা, $-2y=6-3x$,

বা, $2y=-6+3x$,

$\therefore \quad y=\frac{-6+3x}{2}$, ইহা

হইতে

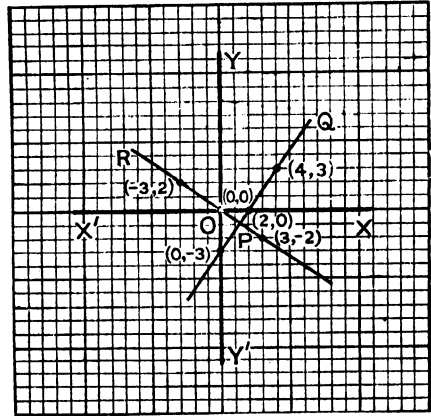
x	0	2	4
y	-3	0	3

আবার, $2x+3y=0 \cdots$(ii)

বা, $3y=-2x$,

$\therefore \quad y=\frac{-2x}{3}$, ইহা

হইতে

x	0	3	-3
y	0	-2	2

চিত্র নং 5

ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুকে দৈর্ঘ্য একক ধরিয়া লেখ দুইটি আঁকা হইল। [চিত্র 5 দেখ।]

লেখ দুইটি P বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিয়াছে। P বিন্দুতে লেখ দুইটির মধ্যে যে কোণ উৎপন্ন হইয়াছে, তাহার পরিমাণ নির্ণয় করিতে হইবে।

(2) চাঁদার (Protractor) সাহায্যে মাপিয়া দেখা যায় যে কোণটির মাপ 90° বা এক সমকোণ। অথবা, (2) PR হইতে 3 দৈর্ঘ্য এককের সমান PA এবং PQ হইতে 4 দৈর্ঘ্য এককের সমান PB অংশ কাটিয়া লও। এখন মাপিয়া দেখা গেল, AB = 5 দৈর্ঘ্য একক ; সুতরাং $AB^2=25$.

আবার, $PA^2+PB^2=3^2+4^2=25$.

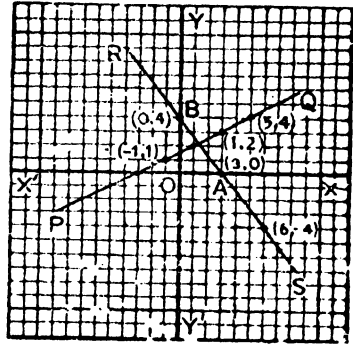
$\therefore \quad AB^2=PA^2+PB^2, \quad \therefore \quad \angle P$ সমকোণ।

উদা. 7. $\frac{x+3}{2}$ অপেক্ষকটির লেখ অঙ্কিত কর এবং $x=3$ হইলে ঐ অপেক্ষকের মান কত হইবে তাহা লেখ হইতে নির্ণয় কর। [D. B. '34]
x-এর মান কত হইলে ঐ অপেক্ষকটির মান শূন্য হইবে ?

$\frac{x+3}{2}$এর লেখ এবং $y=\frac{x+3}{2}$এর লেখ একই হইবে। সমীকরণটি হইতে পাই

x	1	−1	5
y	2	1	4

এখন লেখ কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুকে দৈর্ঘ্য একক ধরিয়া PQ লেখটি আঁকা হইল। [চিত্র 6 দেখ]

এখন, লেখ হইতে দেখা যাইতেছে যে, $x=3$ হইলে $y=3$ হইবে; এবং প্রদত্ত অপেক্ষকটি বা $y=0$ হইবে যখন $x=-3$.

চিত্র নং 6

[চিত্রে RS রেখাটি 157 পৃষ্ঠার উদা. 3 এর লেখ।]

প্রশ্নমালা 57

1. ছক কাগজে নিম্ন স্থানাঙ্কবিশিষ্ট বিন্দুগুলি স্থাপন কর :—
(0, 3), (0, −4), (5, 0), (−5, 0), (0, 0).

2. ছক কাগজের ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র দশ বাহুকে একক লইয়া নিম্নের বিন্দুগুলি স্থাপন কর :—
(−1·2, 1·6), (−·5, −1·4), (2·9, −3·1)।

3. (0, 6), (8, 0) ও (0, −15) বিন্দু তিনটি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের পরিসীমা নির্ণয় কর।

4. (0, −5), (·5, −4·5), (1·5, −3·5), (−1·5, 6·5) এই চারিটি বিন্দু একই সরলরেখায় অবস্থিত। সরলরেখাটির উপর যে বিন্দুর ভুজ 3·5 তাহার কোটি নির্ণয় কর।

প্রশ্নমালা 58

1. নিম্ন অপেক্ষকগুলির লেখচিত্র অঙ্কিত কর :—

(a) $2x$ (b) $2x-1$ (c) $\frac{1}{2}x$ (d) $\frac{x-1}{2}$.

লেখ অঙ্কিত কর :—

2. $3x-7y=0$ 3. $\frac{x}{4}+\frac{y}{5}=1$. [C. U. '12]

4. (i) $y=x-2$ [C. U. '13] (ii) $y=\frac{3-x}{4}$ [D. B. '32]

5. (i) $y=4x$; (ii) $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=2$ [C. U. '35]

6. (i) $2y-3x=6$; (ii) $x=5y$; (iii) $5x+3y=8$ [C. U. '40]

7. (i) $x=\frac{2y+6}{3}$; (ii) $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$;

(iii) $6x-7y=12$ [C. U. '41] (iv) $\frac{x}{2}-\frac{y}{3}=1$. [C. U. '11]

8. $\frac{2x-3}{2}$. 9. (i) $x=-5$; (ii) $2x=7$; (iii) $2y=5$;

10. (i) $\frac{x}{5}+\frac{y}{6}=1$; (ii) $2x+3y=6$;

(iii) $x=7(y+1)$ [C. U. '42]

11. (i) $y=2x$; (ii) $y=7$; (iii) $\frac{x}{5}+\frac{y}{7}=1$. [C. U. '44]

12. $7x-3y=21$. [C. U. '45]

13. $2y-3x=7$এর লেখ অঙ্কিত কর। $x=2\frac{1}{3}$ হইলে yএর মান কত এবং $y=3\frac{1}{2}$ হইলে xএর মান কত হইবে তাহা ঐ লেখ হইতে নির্ণয় কর।

[W. B. S. F. '53]

14. $\frac{2x+7}{3}$ এই অপেক্ষকটির লেখ অঙ্কিত কর। $x=4$ হইলে ঐ অপেক্ষকের মান কত হইবে এবং xএর মান কত হইলে অপেক্ষকটির মান 0 হয় তাহা ঐ লেখ দেখিয়া নির্ণয় কর। [D. B. '28]

নিম্নের লেখগুলি অঙ্কিত কর এবং ছেদবিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর :—

15. $x+y=2$ এবং $x-y=0$ [C. U. '28]

16. $3x+4y=25$ এবং $4x-3y=0$ [C. U. '14]

17. $y=2x$ এবং $3x-2y+2=0$ [C. U. '34]

18. $y=5$ এবং $5x+6y=30$ [C. U. '43]

19. $3x-5y=16$ এবং $2x-9y=5$. [P. U. '20]

বীজগণিত

দশম শ্রেণীর পাঠ্য

অনুপাত ও সমানুপাত (Ratio and Proportion)

1. এক জাতীয় দুইটি রাশির তুলনা করিয়া একটি রাশি অপরটির কত অংশ বা কত গুণ, তাহা যাহা দ্বারা প্রকাশ করা হয়, তাহাকে রাশি দুইটির **অনুপাত** (Ratio) বলে।

ইহা হইতে বুঝা যায় যে, দুইটি সমজাতীয় রাশির অনুপাত নির্ণয় করিতে হইলে, প্রথমটিকে দ্বিতীয়টি দ্বারা ভাগ করিতে হয় অর্থাৎ প্রথমটি হইবে লব এবং দ্বিতীয়টি হইবে হর। যথা—

(1) 4 টাকা ও 5 টাকার অনুপাত = 4 টাকা ÷ 5 টাকা = $\frac{4}{5}$.

(2) 3 গজ ও 4 ফুটের অনুপাত = 3 গজ ÷ 4 ফুট = 9 ফু. ÷ 4 ফু. = $\frac{9}{4}$.

(3) x ও yএর অনুপাত $= \frac{x}{y}$.

লিখিবার ও পড়িবার নিয়ম : ভাগ চিহ্নের (÷) সংক্ষিপ্ত আকার ':' চিহ্ন দ্বারা অনুপাত প্রকাশ করা হয়। যথা, 3 : 5, ইহাকে পড়িবার সময় 3 অনুপাত 5 পড়িতে হয় ; $a : b$কে a অনুপাত b পড়া হয়।

2. যে দুইটি রাশির মধ্যে অনুপাত নির্ণয় করা হয়, তাহাদের প্রথমটিকে **পূর্বরাশি** (Antecedent) এবং দ্বিতীয়টিকে **উত্তররাশি** (Consequent) বলা হয়। ঐ রাশি দুইটিকে অনুপাতের দুইটি **পদ** (Terms) বলে।

3. **গুরু অনুপাত ও লঘু অনুপাত :** অনুপাতের রাশি দুইটি সমান হইলে তাহাকে **সাম্যানুপাত** (Ratio of equality) বলে ; তখন উহা 1এর সমান হয় ; আর ঐ রাশি দুইটি অসমান হইলে অনুপাতটিকে **বৈষম্যানুপাত** (Ratio of inequality) বলে।

যে অনুপাতের পূর্বরাশিটি উত্তররাশি অপেক্ষা বৃহত্তর তাহাকে **গুরু অনুপাত** (Ratio of greater inequality) বলে। আর অনুপাতের পূর্ব রাশিটি উত্তররাশি অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইলে, তাহাকে **লঘু অনুপাত** (Ratio of less inequality) বলে।

4. **ব্যস্ত অনুপাত :** দুইটি অনুপাতের মধ্যে যদি একটির পূর্বরাশি ও উত্তররাশি যথাক্রমে অন্যটির উত্তররাশি ও পূর্বরাশি হয়, তবে অনুপাত দুইটির যে কোনটিকে অপরটির **ব্যস্ত** বা **বিপরীত অনুপাত** (Inverse ratio) বা **অন্যোন্যক** (reciprocal) বলা হয়। 3 : 4এর ব্যস্ত অনুপাত 4 : 3 ; $a : b$এর ব্যস্ত অনুপাত $b : a$. দুইটি ব্যস্ত অনুপাতের গুণফল 1 হয়।

5. সরল ও মিশ্র অনুপাত : সরল ও মিশ্র ভেদে অনুপাত দুই প্রকার। 4 টাকা : 5 টাকা, $c : d$, $x : y$ ইহাদিগকে **সরল অনুপাত** (Simple ratio) বলে।

আর, দুই বা ততোধিক অনুপাতের পূর্ব রাশিগুলির ক্রমিক গুণফলকে **পূর্বরাশি** এবং উত্তররাশিগুলির ক্রমিক গুণফলকে উত্তররাশি করিয়া লিখিলে যে অনুপাত হয়, তাহাকে ঐ অনুপাতগুলির **মিশ্র** বা **যৌগিক অনুপাত** (Compound ratio) বলে। যথা, $a : b$ ও $c : d$ অনুপাত দুইটির মিশ্র অনুপাত হইবে $ac : bd$.

দুইটি অনুপাত সমান হইলে তাহাদের মিশ্র অনুপাতকে তাহাদের যে কোনটির **দ্বিগুণানুপাত** (Duplicate ratio) বলে। যথা, $x : y$এর দ্বিগুণানুপাত হইল $x^2 : y^2$.

ঐরূপ তিনটি সমান অনুপাতের মিশ্র অনুপাতকে তাহাদের যে কোনটির **ত্রিগুণানুপাত** (Triplicate ratio) বলে। যথা, $a : b$এর ত্রিগুণানুপাত হইল $a^3 : b^3$. এইরূপ যে কোন গুণানুপাত হইতে পারে।

কোন অনুপাতের রাশিদ্বয়ের বর্গমূল লইয়া যে অনুপাত হয় তাহাকে ঐ অনুপাতের **দ্বিভাজিত অনুপাত** (Sub-duplicate ratio) বলে। যথা, $x : y$এর দ্বিভাজিত অনুপাত হইল $\sqrt{x} : \sqrt{y}$.

অনুরূপে $\sqrt[3]{x} : \sqrt[3]{y}$ হইল $x : y$এর **ত্রিভাজিত অনুপাত** (Sub-triplicate ratio) ; ইত্যাদি।

উদাহরণ 1. যদি $x : y = 3 : 4$ হয়, তবে $3y - x : 2x + y$ কত হইবে? [P. U. '20]

$$\because \frac{x}{y} = \frac{3}{4} \quad \therefore \quad x = \frac{3}{4}y.$$

এক্ষণে, $\dfrac{3y - x}{2x + y} = \dfrac{3y - \frac{3}{4}y}{2 \times \frac{3}{4}y + y} = \dfrac{\frac{9}{4}y}{\frac{5}{2}y} = \dfrac{9}{4} \times \dfrac{2}{5} = \dfrac{9}{10} = 9 : 10.$

[অন্য প্রণালী] $\because \dfrac{x}{y} = \dfrac{3}{4}, \quad \therefore \quad \dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{4} = k$ (মনে কর)

অতএব, $x = 3k$, $y = 4k$.

এক্ষণে, $\dfrac{3y - x}{2x + y} = \dfrac{12k - 3k}{6k + 4k} = \dfrac{9k}{10k} = \dfrac{9}{10} = 9 : 10.$

উদা. 2. যদি $3(x+y) = 11(x-y)$ হয়, তবে $x : y$ কত হইবে?

$$3(x+y) = 11(x-y), \quad \text{বা}, \quad 3x + 3y = 11x - 11y,$$

বা, $-8x = -14y$, বা, $4x = 7y$, $\therefore \dfrac{x}{y} = \dfrac{7}{4}$, *i.e.*, $x : y = 7 : 4$.

উদা. 3. 2 : 5 অনুপাতের পদ দুইটির সহিত কোন্ সংখ্যা যোগ করিলে অনুপাতটি 6 : 11 হইবে ?

মনে কর, নির্ণেয় সংখ্যা $= x$.

অতএব, প্রদত্ত সর্তানুসারে, $\frac{2+x}{5+x}=\frac{6}{11}$, বা, $11x+22=6x+30$,

বা, $5x=8$, $\therefore$ $x=\frac{8}{5}$, $\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাটি $=\frac{8}{5}=1\frac{3}{5}$.

উদা. 4 দুইটি সংখ্যার অনুপাত 2 : 3 এবং সংখ্যা দুইটির সহিত 10 যোগ করিলে নূতন অনুপাত হয় 9 : 11 ; সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

$\because$ সংখ্যাদ্বয়ের অনুপাত 2 : 3,

$\therefore$ মনে কর, প্রথম সংখ্যাটি $2x$ ও দ্বিতীয়টি $3x$.

অতএব, সর্তানুসারে $\frac{2x+10}{3x+10}=\frac{9}{11}$, বা, $27x+90=22x+110$,

বা, $5x=20$, $\therefore$ $x=4$.

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাদ্বয় $=2\times4$ ও $3\times4=8$ ও 12.

উদা. 5. xএর মান কত হইলে $\frac{x+a}{x+b}$এর দ্বিগুণানুপাত $\frac{a}{b}$ হয় ?

$\frac{x+a}{x+b}$ এর দ্বিগুণানুপাত $=\frac{(x+a)^2}{(x+b)^2}=\frac{x^2+2ax+a^2}{x^2+2bx+b^2}$.

$\therefore$ এখানে $\frac{x^2+2ax+a^2}{x^2+2bx+b^2}=\frac{a}{b}$,

বা, $ax^2+2abx+ab^2=bx^2+2abx+a^2b$,

বা, $ax^2-bx^2=a^2b-ab^2$, বা, $(a-b)x^2=ab(a-b)$,

বা, $x^2=ab$, $\therefore$ $x=\pm\sqrt{ab}$.

প্রশ্নমালা 59

নিম্নের অনুপাতগুলির মিশ্র অনুপাত নির্ণয় কর :—

1. 2 : 3, 3 : 4, 5 : 6
2. 2 : 5, 4 : 11, 22 : 35.
3. $xz : y^2$, $x^2 : yz$
4. $a : 2b$, $2b : 3c$, $c : a$.
5. $x : y=3 : 4$ হইলে, $2x+y : 9x-2y$এর মান কত ?
6. $x : y=8 : 7$ হইলে, $7x-3y : 11x-9y$এর মান কত ?
7. $9x-3y : 3x+4y=21 : 32$ হইলে, $x : y$এর মান কত ?
8. $3x+7y : 5x-3y=5 : 3$ হইলে, $x : y=$ কত ?
9. $4x+3y : 6x-5y=11 : 7$ হইলে, $3x-2y : 2x+7y=$ কত ?

10. $2x-3y : 2x+3y=5 : 23$ হইলে $3x+y : 3x-2y$এর মান কত ?

11. 3 : 4 অনুপাতের উভয় পদের সহিত কোন্ সংখ্যা যোগ করিলে 9 : 11 অনুপাত হইবে ?

12. $2a : 3b$ অনুপাতের প্রত্যেক পদের সহিত কত যোগ করিলে সমষ্টি-দ্বয়ের অনুপাত $c : d$ হইবে ?

13. 7 : 9 অনুপাতটির উভয় পদ হইতে কোন্ সংখ্যা বিয়োগ করিলে অন্তরদ্বয়ের অনুপাত 2 : 3 হইবে ?

14. $c : d$ অনুপাতের পদদ্বয় হইতে কত বিয়োগ করিলে বিয়োগফল দুইটির অনুপাত $a : b$ হইবে ?

15. দুইটি সংখ্যার অনুপাত 11 : 13 এবং উভয় সংখ্যা হইতে 3 বিয়োগ করিলে বিয়োগফল দুইটির অনুপাত 5 : 6 হয়। সংখ্যা দুইটি কত ?

16. দুইটি সংখ্যার অনুপাত 3 : 5 এবং উভয় সংখ্যার সহিত 16 যোগ করিলে সমষ্টিদ্বয়ের অনুপাত 7 : 9 হয়। সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

17. কোন্ অনুপাতের পদদ্বয় হইতে 1 বিয়োগ করিলে 3 : 5 এবং উভয় পদে 3 যোগ করিলে 5 : 7 হয় ?

18. কোন অনুপাতের উভয় পদের সহিত 1 যোগ করিলে 2 : 3 হয় এবং উভয়পদ হইতে 4 বিয়োগ করিলে 1 : 2 হয়। অনুপাতটি নির্ণয় কর।

19. $x-a : x-b$এর দ্বিগুণ অনুপাত $a : b$ হইলে xএর মান কত ?

20. যদি $x+a : x+b$এর ত্রিগুণানুপাত $a : b$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $x^3-3abx-ab(a+b)=0$ হইবে।

সমানুপাত

6. চারিটি রাশির যদি প্রথম ও দ্বিতীয় রাশির অনুপাত তৃতীয় ও চতুর্থ রাশিদ্বয়ের অনুপাতের সমান হয়, তবে ঐ রাশি চারিটি একটি **সমানুপাত** (Proportion) উৎপন্ন করে। ঐ রাশি চারিটিকে **সমানুপাতী** (Proportional) বলে।

অতএব, দুইটি অনুপাত সমান হইলে তাহারা একটি সমানুপাত গঠন করে। যথা, 2, 3, 4, 6 এই চারিটি রাশি সমানুপাতী। আবার, 4 টাকা, 6 টাকা 8 সের ও 12 সের সমানুপাতী ; কারণ, 4 টাকা : 6 টাকা = 2 : 3; এবং 8 সের : 12 সের = 2 : 3, $a : b=c : d$ হইলে উহা একটি সমানুপাত হইবে।

লিখিবার নিয়ম : $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ বা, $a : b=c : d$, অথবা, $a : b :: c : d$ এইরূপ কোন এক প্রকারে সমানুপাত লেখা যায়।

7. সমানুপাতের পদ চারিটির মধ্যে প্রথম ও চতুর্থ বা শেষ পদকে অন্ত্যরাশি বা **প্রান্তীয় রাশি** (Extremes) এবং দ্বিতীয় ও তৃতীয় পদ দুইটিকে **মধ্যক** (Means) বলা হয়।

চতুর্থ পদটিকে আবার তিনটি পদের **চতুর্থ সমানুপাতী** (Fourth proportional) বলে।

8. **ক্রমিক সমানুপাতী :** যদি তিনটি রাশির প্রথম ও দ্বিতীয় রাশির অনুপাতটি দ্বিতীয় ও তৃতীয় রাশির অনুপাতের সমান হয়, তবে রাশি তিনটি ক্রমিক সমানুপাতী হয়। যথা, $a : b = b : c$ হইলে, a, b, c ক্রমিক সমানুপাতী (In continued proportion) হয় এবং এই সমানুপাত হইল ক্রমিক সমানুপাত।

তিনটি রাশি ক্রমিক সমানুপাতী হইলে মধ্যরাশিটিকে অপর দুইটির **মধ্যসমানুপাতী** (Mean proportional) বলে এবং তৃতীয়টিকে অপর দুইটির **তৃতীয় সমানুপাতী** (Third proportional) বলে।

যদি $a : b = b : c = c : d$ হয়, তবে a, b, c, d ক্রমিক সমানুপাতী।

9. **সমানুপাত সম্বন্ধীয় কয়েকটি সিদ্ধান্ত :**

(1) a, b, c, d সমানুপাতী হইলে, $ad = bc$ অর্থাৎ প্রান্তীয় রাশিদ্বয়ের গুণফল মধ্যরাশিদ্বয়ের গুণফলের সমান হয়।

প্রমাণ : $\because$ a, b, c, d সমানুপাতী, $\therefore \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$,

$\therefore \frac{a}{b} \times bd = \frac{c}{d} \times bd$ [bd দ্বারা গুণ করিয়া], $\therefore ad = bc.$

[**দ্রষ্টব্য :** এই সিদ্ধান্তের সাহায্যে সমানুপাতের যে কোন তিনটি পদ জানা থাকিলে অবশিষ্ট পদটি নির্ণয় করা যায়।]

(2) যদি $ad = bc$ হয়, তবে a, b, c, d সমানুপাতী হয়।

প্রমাণ : $\because ad = bc$, $\therefore ad \times \frac{1}{bd} = bc \times \frac{1}{bd}$,

$\therefore \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, $\therefore a, b, c, d$ সমানুপাতী।

(3) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ হইলে, $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ হইবে।

প্রমাণ : $\because \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, $\therefore \frac{a}{b} \times \frac{b}{c} = \frac{c}{d} \times \frac{b}{c}$ $\left[\frac{b}{c} \right.$ দ্বারা গুণ করিয়া $\left. \right]$

$\therefore \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

এই প্রক্রিয়াকে **একান্তর ক্রিয়া** (Alternendo) বলে। অতএব, চারিটি সমানুপাতীকে একান্তরভাবে লইলেও সমানুপাতী হয়।

(4) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ হইলে, $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ হইবে।

প্রমাণ : $\because \frac{a}{b}=\frac{c}{d}, \quad \therefore 1\div\frac{a}{b}=1\div\frac{c}{d}, \quad \therefore \frac{b}{a}=\frac{d}{c}.$

এই প্রক্রিয়াকে **বিপরীত ক্রিয়া** (Invertendo) বলে।

(5) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ হইলে, $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ হইবে।

প্রমাণ : $\because \frac{a}{b}=\frac{c}{d}, \quad \therefore \frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1, \quad \therefore \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}.$

এই প্রক্রিয়াকে **যোগ ক্রিয়া** (Componendo) বলে।

(6) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ হইলে, $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ হইবে।

প্রমাণ : $\because \frac{a}{b}=\frac{c}{d}, \quad \therefore \frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1, \quad \therefore \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}.$

এই প্রক্রিয়াকে **ভাগ ক্রিয়া** (Dividendo) বলে।

(7) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ হইলে, $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$ হইবে।

প্রমাণ : $\because \frac{a}{b}=\frac{c}{d}, \quad \therefore \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ [যোগ ক্রিয়া]···(1)

এবং $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ [ভাগ ক্রিয়া]···(2)

এক্ষণে (1)কে (2) দ্বারা ভাগ করিয়া পাই $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}.$

এই প্রক্রিয়াকে **যোগ ও ভাগ ক্রিয়া** (Componendo and Dividendo) বলে।

(8) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ হইলে, প্রত্যেক অনুপাত $\frac{a+c}{b+d}$ হইবে।

প্রমাণ : $\because \frac{a}{b}=\frac{c}{d}, \quad \therefore \frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ (একান্তর ক্রিয়া)

$\therefore \frac{a+c}{c}=\frac{b+d}{d}$ (যোগ ক্রিয়া)

$\therefore \quad \frac{a+c}{b+d}=\frac{c}{d}$ (একান্তর ক্রিয়া). অতএব, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$.

অনুরূপে, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ হইলে, প্রত্যেক অনুপাত $=\frac{a-c}{b-d}$ হয় ;

এবং $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots$ হইলে, প্রত্যেক অনুপাত $=\frac{a+c+e+\cdots}{b+d+f+\cdots}$ হইবে।

ইহাকে **সংযোজন প্রক্রিয়া** (Addendo) বলে।

উদাহরণমালা

উদা. 1. 4, 6, 10এর চতুর্থ সমানুপাতী নির্ণয় কর।

মনে কর, চতুর্থ সমানুপাতী x ; সুতরাং 4, 6, 10 ও x সমানুপাতী।

$\frac{4}{6}=\frac{10}{x}$, বা, $4x=6\times10=60$, $\therefore \quad x=\frac{60}{4}=15$.

$\therefore$ নির্ণেয় চতুর্থ সমানুপাতী $=15$.

উদা. 2. x^2y ও yz^2এর মধ্যসমানুপাতী নির্ণয় কর।

মনে কর, m নির্ণেয় মধ্যসমানুপাতী। $\therefore \quad \frac{x^2y}{m}=\frac{m}{yz^2}$,

বা, $m^2=x^2y^2z^2$, $\therefore \quad m=\pm\sqrt{x^2y^2z^2}=\pm xyz$.

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যসমানুপাতী $=\pm xyz$.

উদা. 3. 3 ও 15এর তৃতীয় সমানুপাতী নির্ণয় কর।

মনে কর, নির্ণেয় তৃতীয় সমানুপাতী x,

সুতরাং 3, 15 ও x ক্রমিক সমানুপাতী,

$\therefore \quad \frac{3}{15}=\frac{15}{x}$, বা, $3x=15\times15$, $\therefore \quad x=75$.

$\therefore$ নির্ণেয় তৃতীয় সমানুপাতী $=75$.

উদা. 4. 6, 7, 15 ও 17এর সহিত কোন্ সংখ্যা যোগ করিলে পরপর যোগফলগুলি সমানুপাতী হইবে ?

মনে কর, নির্ণেয় সংখ্যা $=x$,

সুতরাং $6+x$, $7+x$, $15+x$ ও $17+x$ সমানুপাতী।

$\therefore \quad \frac{6+x}{7+x}=\frac{15+x}{17+x}$, বা, $(6+x)(17+x)=(7+x)(15+x)$,

বা, $x^2+23x+102=x^2+22x+105$,

বা, $23x-22x=105-102$, $\therefore \quad x=3$, $\therefore$ নির্ণেয় রাশি $=3$.

উদা. 5. যদি $a : b = c : d$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে

$$a^2+b^2 : a^2-b^2 = ac+bd : ac-bd.$$

$\because \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, $\therefore \frac{a}{b}\times\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\times\frac{a}{b}$, বা, $\frac{a^2}{b^2}=\frac{ac}{bd}$,

$\therefore \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}=\frac{ac+bd}{ac-bd}$ [যোগ ও ভাগ ক্রিয়া দ্বারা]

অন্য প্রণালী : (এই প্রণালী ছাত্রগণের পক্ষে সহজ)

এখানে $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ (মনে কর), সুতরাং $a=bk$, $c=dk$.

একণে, $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}=\frac{b^2k^2+b^2}{b^2k^2-b^2}=\frac{b^2(k^2+1)}{b^2(k^2-1)}=\frac{k^2+1}{k^2-1}$,

এবং $\frac{ac+bd}{ac-bd}=\frac{bk.dk+bd}{bk.dk-bd}=\frac{bdk^2+bd}{bdk^2-bd}=\frac{bd(k^2+1)}{bd(k^2-1)}=\frac{k^2+1}{k^2-1}$;

$\therefore \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}=\frac{ac+bd}{ac-bd}$ $\left(\because \text{ প্রত্যেকটি}=\frac{k^2+1}{k^2-1}\right)$

উদা. 6. যদি $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$ হয়, তবে $(x^2+y^2)(a^2+b^2)=(ax+by)^2$ হইবে।

[C. U. 1910 ; 1928]

$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=k$ (মনে কর), $\therefore x=ak, y=bk.$

একণে, $(x^2+y^2)(a^2+b^2)=(a^2k^2+b^2k^2)(a^2+b^2)$

$=k^2(a^2+b^2)(a^2+b^2)=k^2(a^2+b^2)^2$

এবং $(ax+by)^2=(a^2k+b^2k)^2=\{k(a^2+b^2)\}^2=k^2(a^2+b^2)^2$

$\therefore (x^2+y^2)(a^2+b^2)=(ax+by)^2.$

উদা. 7. a, b, c ক্রমিক সমানুপাতী হইলে, প্রমাণ কর যে,

$(a+b+c)(a-b+c)=a^2+b^2+c^2.$ [C. U. 1912 ; D. B. '34, '37]

এখানে $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=k$ (মনে কর), সুতরাং $a=bk=ck^2$, $b=ck$.

একণে, বামপক্ষ $=(ck^2+ck+c)(ck^2-ck+c)$

$=c(k^2+k+1)c(k^2-k+1)=c^2(k^4+k^2+1).$

ডানপক্ষ $=c^2k^4+c^2k^2+c^2=c^2(k^4+k^2+1).$

$\therefore (a+b+c)(a-b+c)=a^2+b^2+c^2.$

অন্য প্রণালী : $\because \frac{a}{b}=\frac{b}{c}, \quad \therefore \quad b^2=ac.$

এক্ষণে, $(a+b+c)(a-b+c)=\{(a+c)+b\}\{(a+c)-b\}$

$$=(a+c)^2-b^2=a^2+2ac+c^2-b^2$$

$$=a^2+2b^2+c^2-b^2 \quad [\because \ ac=b^2]$$

$=a^2+b^2+c^2$ (প্রমাণিত হইল)।

উদা. 8. যদি $a:b=c:d$ হয়, তবে $a+c:b+d$
$=\sqrt{a^2-c^2}:\sqrt{b^2-d^2}$ হইবে।

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ (মনে কর), $\therefore \quad a=bk, \ c=dk.$

এক্ষণে, বামপক্ষ $\frac{a+c}{b+d}=\frac{bk+dk}{b+d}=\frac{k(b+d)}{b+d}=k,$

এবং ডানপক্ষ $\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{\sqrt{b^2-d^2}}=\frac{(b^2k^2-d^2k^2)^{\frac{1}{2}}}{(b^2-d^2)^{\frac{1}{2}}}$

$$=\frac{\{k^2(b^2-d^2)\}^{\frac{1}{2}}}{(b^2-d^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{k(b^2-d^2)^{\frac{1}{2}}}{(b^2-d^2)^{\frac{1}{2}}}=k.$$

$\therefore$ উভয় পক্ষই সমান [এখানে পক্ষ দুইটি লেখাই ভাল।]

উদা. 9. যদি $(a+b+c+d)(a-b-c+d)=(a+b-c-d)\times$ $(a-b+c-d)$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $a:b=c:d.$ [C. U. 1928]

$\because \quad (a+b+c+d)(a-b-c+d)=(a+b-c-d)(a-b+c-d),$

$\therefore \quad \{(a+d)+(b+c)\}\{(a+d)-(b+c)\}$

$$=\{(a-d)+(b-c)\}\{(a-d)-(b-c)\}$$

বা, $(a+d)^2-(b+c)^2=(a-d)^2-(b-c)^2$

বা, $(a+d)^2-(a-d)^2=(b+c)^2-(b-c)^2$

বা, $4ad=4bc$, বা, $ad=bc$, $\therefore \quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ (প্রমাণিত হইল)।

[এখানে প্রদত্ত প্রত্যেক পক্ষকে গুণ করিলেও প্রমাণিত হইত।]

অন্য প্রণালী : প্রদত্ত সর্ত হইতে পাই $\frac{a+b+c+d}{a+b-c-d}=\frac{a-b+c-d}{a-b-c+d}$

$\therefore \quad \frac{2(a+b)}{2(c+d)}=\frac{2(a-b)}{2(c-d)}$ [যোগ-ভাগ প্রক্রিয়া দ্বারা),

বা, $\frac{a+b}{c+d}=\frac{a-b}{c-d}$, $\therefore$ $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$ [একান্তর প্রক্রিয়া দ্বারা]

$\therefore$ $\frac{2a}{2b}=\frac{2c}{2d}$ [যোগ-ভাগ প্রক্রিয়া দ্বারা], $\therefore$ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

উদা. 10. $\frac{x}{y}=\frac{y}{z}$ হইলে, $\frac{xyz(x+y+z)^3}{(xy+yz+zx)^3}$ এর সরলতম মান নির্ণয় কর।

[D. B. '28]

$\because$ $\frac{x}{y}=\frac{y}{z}$, $\therefore$ $y^2=xz$. এক্ষণে, প্রদত্ত ভগ্নাংশ $=\frac{y.xz(x+y+z)^3}{(xy+yz+zx)^3}$

$=\frac{y^3(x+y+z)^3}{(xy+yz+y^2)^3}$ [xz-এর স্থানে y^2 বসাইয়া] $=\frac{y^3(x+y+z)^3}{y^3(x+y+z)^3}=1$.

উদা. 11. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$ হইলে, প্রত্যেকটি $=\left(\frac{la^n+mc^n+pe^n}{lb^n+md^n+pf^n}\right)^{\frac{1}{n}}$ হইবে।

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=k$ (মনে কর), $\therefore$ $a=bk,\ c=dk,\ e=fk$.

এক্ষণে, $\left(\frac{la^n+mc^n+pe^n}{lb^n+md^n+pf^n}\right)^{\frac{1}{n}}=\left(\frac{lb^nk^n+md^nk^n+pf^nk^n}{lb^n+md^n+pf^n}\right)^{\frac{1}{n}}$

$=\left\{\frac{k^n(lb^n+md^n+pf^n)}{lb^n+md^n+pf^n}\right\}^{\frac{1}{n}}=(k^n)^{\frac{1}{n}}=k^{n\times\frac{1}{n}}=k$.

$\because$ প্রত্যেক প্রদত্ত অনুপাত $=k$,

$\therefore$ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\left\{\frac{la^n+mc^n+pe^n}{lb^n+md^n+pf^n}\right\}^{\frac{1}{n}}$ [প্রমাণিত হইল।]

[l, m, n, p যে-কোন সংখ্যা হইলে ইহা সত্য।]

উদা. 12. যদি $a:b=b:c=c:d$ হয়, তবে দেখাও যে,

$(b-c)^2+(c-a)^2+(b-d)^2=(a-d)^2$. [D. B. 1933]

$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=k$ (মনে কর), $\therefore$ $a=bk=ck^2=dk^3$,

$b=ck=dk^2$, $c=dk$.

এক্ষণে, বামপক্ষ $=(dk^2-dk)^2+(dk-dk^3)^2+(dk^2-d)^2$

$=d^2k^4+d^2k^2-2d^2k^3+d^2k^2+d^2k^6-2d^2k^4+d^2k^4$

$-2d^2k^2+d^2=d^2k^6-2d^2k^3+d^2$.

ডানপক্ষ $=(dk^3-d)^2=d^2k^6-2d^2k^3+d^2$.

$\therefore$ $(b-c)^2+(c-a)^2+(b-d)^2=(a-d)^2$.

উদা. 13. যদি $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

$(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)=(ab+bc+cd)^2$. [C. U. 1944]

$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=k$ (মনে কর), $\therefore\ a=bk,\ b=ck,\ c=dk$.

এক্ষণে, $(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)$

$=(b^2k^2+c^2k^2+d^2k^2)(b^2+c^2+d^2)$

$=k^2(b^2+c^2+d^2)(b^2+c^2+d^2)=k^2(b^2+c^2+d^2)^2$;

আবার, $(ab+bc+cd)^2=(bk.b+ck.c+dk.d)^2$

$=(b^2k+c^2k+d^2k)^2=k^2(b^2+c^2+d^2)^2$.

$\therefore\ (a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)=(ab+bc+cd)^2$.

[বিবিধ]

উদা. 14. যদি $\frac{x}{a+b-c}=\frac{y}{b+c-a}=\frac{z}{c+a-b}$ হয়,

তবে প্রত্যেকটি$=\frac{x+y+z}{a+b+c}$ হইবে। [C. U. '11 ; D. B. '36]

$\because\ \frac{x}{a+b-c}=\frac{y}{b+c-a}=\frac{z}{c+a-b}$,

$\therefore$ ইহাদের প্রত্যেকটি$=\frac{(x+y+z)}{(a+b-c)+(b+c-a)+(c+a-b)}$

$=\frac{x+y+z}{a+b+c}$ (প্রমাণিত), [সংযোজন প্রক্রিয়া]

উদা. 15. $\frac{x}{b+c}=\frac{y}{c+a}=\frac{z}{a+b}$ হইলে প্রমাণ কর যে

$(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=0$.

$\frac{x}{b+c}=\frac{y}{c+a}=\frac{z}{a+b}=k$ (মনে কর)

$\therefore\ x=(b+c)k,\ y=(c+a)k,\ z=(a+b)k$.

এক্ষণে, $(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=(b-c)(b+c)k+(c-a)(c+a)k$

$+(a-b)(a+b)k=k(b^2-c^2)+k(c^2-a^2)+k(a^2-b^2)$

$=k(b^2-c^2+c^2-a^2+a^2-b^2)=k\times0=0$ (প্রমাণিত)।

উদা. 16. $\frac{a}{b+c}=\frac{b}{c+a}=\frac{c}{a+b}$ হইলে, প্রমাণ কর যে, প্রত্যেক অনুপাতটি $\frac{1}{2}$ অথবা -1এর সমান হইবে।

$$\because \quad \frac{a}{b+c}=\frac{b}{c+a}=\frac{c}{a+b},$$

$\therefore$ প্রত্যেকটি অনুপাত $=\frac{\text{লবগুলির সমষ্টি}}{\text{হরগুলির সমষ্টি}}=\frac{a+b+c}{2(a+b+c)}=\frac{1}{2}.$

আবার, $\because \quad \frac{a}{b+c}=\frac{b}{c+a},$

$\therefore$ প্রত্যেকটি অনুপাত $=\frac{\text{লব দুইটির অন্তর}}{\text{হর দুইটির অন্তর}}=\frac{a-b}{b+c-c-a}=\frac{a-b}{b-a}$

$$=\frac{(a-b)}{-(a-b)}=-1.$$

অতএব, প্রত্যেক অনুপাত $=\frac{1}{2}$ অথবা -1.

উদা. 17. $\frac{a}{b+c}=\frac{b}{c+a}=\frac{c}{a+b}$ এবং $a+b+c\neq 0$; প্রমাণ কর যে, $a=b=c.$ [$\neq$ এই চিহ্নের অর্থ 'সমান নহে'।]

$\because \quad \frac{a}{b+c}=\frac{b}{c+a}=\frac{c}{a+b}, \quad \therefore \quad \frac{a}{b+c}+1=\frac{b}{c+a}+1=\frac{c}{a+b}+1$

বা, $\frac{a+b+c}{b+c}=\frac{a+b+c}{c+a}=\frac{a+b+c}{a+b}, \quad \therefore \quad \frac{1}{b+c}=\frac{1}{c+a}=\frac{1}{a+b}$

[$a+b+c$ শূন্য নহে বলিয়া উহা দ্বারা ভাগ করিয়া]

$\therefore \quad b+c=c+a=a+b,$ এক্ষণে $\because \ b+c=c+a, \ \therefore \ a=b.$ আবার $\because \ c+a=a+b, \ \therefore \ c=b.$ অতএব, $a=b=c$ (প্রমাণিত)।

উদা. 18. যদি $\frac{ay-bx}{c}=\frac{cx-az}{b}=\frac{bz-cy}{a}$ হয়, তবে $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ হইবে। [W. B. S. F, '56]

এখানে প্রথমটির লব ও হরকে c দ্বারা, দ্বিতীয়টির লব ও হরকে b দ্বারা এবং তৃতীয়টির লব ও হরকে a দ্বারা গুণ করিয়া পাওয়া যায়,

$$\frac{acy-bcx}{c^2}=\frac{bcx-abz}{b^2}=\frac{abz-acy}{a^2}$$

$\therefore$ প্রত্যেক অনুপাত $=\frac{\text{লবগুলির সমষ্টি}}{\text{হরগুলির সমষ্টি}}$

$$=\frac{acy-bcx+bcx-abz+abz-acy}{c^2+b^2+a^2}=\frac{0}{a^2+b^2+c^2}=0.$$

এখন, $\because \frac{acy-bcx}{c^2}=0, \quad \therefore acy-bcx=0,$

বা, $acy=bcx$, বা, $ay=bx$, $\therefore \frac{y}{b}=\frac{x}{a}$.

আবার, $\because \frac{bcx-abz}{b^2}=0, \quad \therefore bcx-abz=0,$

বা, $bcx=abz$, বা, $cx=az$, $\therefore \frac{x}{a}=\frac{z}{c}$.

অতএব $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ (প্রমাণিত)।

প্রশ্নমালা 60

1. 3, 5 ও 9এর চতুর্থ সমানুপাতী কত ?

2. 8 ও 12এর তৃতীয় সমানুপাতী নির্ণয় কর।

3. -3 ও -27এর এবং $\frac{1}{2}$ ও $\frac{1}{8}$এর মধ্যসমানুপাতী কত ?

4. $(a+b)^2$ এবং $(a-b)^2$এর মধ্যসমানুপাতী নির্ণয় কর।

5. $x-y$, x^2-y^2 ও x^2-xy+y^2এর চতুর্থ সমানুপাতী কত ?

6. 7, 11, 17 ও 25-এর প্রত্যেকটির সহিত কত যোগ করিলে যোগফলগুলি সমানুপাতী হইবে ?

7. 5, 6, 8 ও 10এর প্রত্যেকটি হইতে কত বিয়োগ করিলে বিয়োগফলগুলি সমানুপাতী হইবে ?

8. a, b, c, dএর প্রত্যেকটি হইতে কত বিয়োগ করিলে বিয়োগফলগুলি সমানুপাতী হইবে ?

$a:b=c:d$ হইলে প্রমাণ কর যে :—

9. $a^2+ab+b^2 : a^2-ab+b^2=c^2+cd+d^2 : c^2-cd+d^2$.
C. U. 1894 ; 1945]

10. $(a^2+c^2)(b^2+d^2)=(ab+cd)^2$ [C. U. '46 ; A. U. 1890]

11. $(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})^2 : (c^{\frac{1}{2}}+d^{\frac{1}{2}})^2=a-b : c-d$. [C. U. 1895]

12. $\sqrt{a^2+c^2} : \sqrt{b^2+d^2}=ma+nc : mb+nd$. [C. U. 1880]

13. $\frac{a^2+c^2}{b^2+d^2}=\frac{(a+c)c}{(b+d)d}$. [C. U. '35] 14. $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}=\frac{c^2+d^2}{c^2-d^2}$.

15 $bd\left(\frac{a+b}{b}+\frac{c+d}{d}\right)^2=4(a+b)(c+d)$.

16. $a:b=c:d$ হইলে প্রমাণ কর যে, a^2+c^2 ও b^2+d^2-এর মধ্যসমানুপাতী $ab+cd$ হইবে। [D. B. 1928]

17. যদি $\frac{a}{b}=\frac{p}{q}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

$(a+b)(a^2+b^2)p^3=(p+q)(p^2+q^2)a^3$. [C. U. 1936]

18. যদি $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ হয়, তবে $\frac{x^3+y^3+z^3}{a^3+b^3+c^3}=\frac{xyz}{abc}$. [D. B. 1932]

19. যদি $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$ হয়, তবে $(a-b)^3:(b-c)^3=a:d$.

[C. U. '38]

যদি a, b, c, d **ক্রমিক সমানুপাতী** হয়, তবে প্রমাণ কর যে :—

20. $a+b:c+d=a^2+b^2+c^2:b^2+c^2+d^2$. [C. U. '39]

21. $a:d=a^3+b^3+c^3:b^3+c^3+d^3$. [C. U. '34]

22. $(ab+cd):(ab-cd)=(b^2+d^2):(b^2-d^2)$. [P. U. '13]

23. $(a^2-b^2)(c^2-d^2)=(b^2-c^2)^2$. [C. U. '43]

a, b, c **ক্রমিক** সমানুপাতী হইলে প্রমাণ কর যে :—

24. $a:c=a^2+b^2:b^2+c^2$. [C. U. '17]

25. $(a+b+c)^2:(a^2+b^2+c^2)=(a+b+c):(a-b+c)$,

26. $\frac{abc(a+b+c)^3}{(ab+bc+ca)^3}=1$. **27.** $\left(\frac{a+b}{b+c}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}$.

[B. U. '34]

28. $a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)=a^3+b^3+c^3$.

যদি $a:b=c:d=e:f$ হয়, তবে প্রমাণ কর :—

29. $\frac{a^2+c^2+e^2}{b^2+d^2+f^2}=\frac{ce}{df}$. [C. U. '41] **30.** $\frac{a}{b}=\left(\frac{a^2+c^2+e^2}{b^2+d^2+f^2}\right)^{\frac{1}{2}}$

31. $\left(\frac{2a+3c+5e}{2b+3d+5f}\right)^3=\frac{ace}{bdf}$. [C. U. '42]

32. $\frac{a^2ce}{b^2df}=\sqrt[4]{\frac{a^5c^3e^8}{b^5d^3f^8}}$. [P. U. '33]

33. প্রত্যেক অনুপাত$=\sqrt[3]{a^3+c^3+e^3}:\sqrt[3]{b^3+d^3+f^3}$.

34. $(a^2+c^2+e^2)(b^2+d^2+f^2)=(ab+cd+ef)^2$.

[W. B. S. F. '52]

$x : a = y : b = z : c$ হইলে প্রমাণ কর :—

35. $\frac{x^3}{a^2}+\frac{y^3}{b^2}+\frac{z^3}{c^2}=\frac{(x+y+z)^3}{(a+b+c)^2}$ [D. B. 1930]

36. $\frac{x^3}{a^3}+\frac{y^3}{b^3}+\frac{z^3}{c^3}=3\left(\frac{x+y+z}{a+b+c}\right)^3$ [P. U. '26]

37. $p : q = r : s$ হইলে, $pq : p^2+q^2 = rs : r^2+s^2$ হইবে।

38. যদি $(a+b+c)x=(b+c-a)y=(c+a-b)z=(a+b-c)w$ হয়, তবে $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{w}=\frac{1}{x}$ হইবে। [C. U. 1905]

39. $\frac{x}{lm-n^2}=\frac{y}{mn-l^2}=\frac{z}{nl-m^2}$ হইলে দেখাও যে, $lx+my+nz=0$. [C. U. '34]

40. $\frac{a}{ax+by+cz}=\frac{b}{bx+cy+az}=\frac{c}{cx+ay+bz}$ এবং $a+b+c\neq0$ হইলে দেখাও যে প্রত্যেক অনুপাত$=\frac{1}{x+y+z}$.

41. যদি $\frac{a+b}{b+c}=\frac{c+d}{d+a}$ হয়, তবে হয় $c=a$, অথবা, $a+b+c+d=0$ হইবে। [C. U. 1891]

42. $\frac{a+b-c}{a+b}=\frac{b+c-a}{b+c}=\frac{c+a-b}{c+a}$ এবং $a+b+c\neq0$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $a=b=c$. [C. U. 1873]

43. $\frac{x}{(b-c)(b+c-2a)}=\frac{y}{(c-a)(c+a-2b)}=\frac{z}{(a-b)(a+b-2c)}$ হইলে, $x+y+z$এর মান কত হইবে? [C. U. 1889 ; উত্তর : 0]

44. $x : ax+by+cz=y : bx+cy+az=z : cx+ay+bz$, এবং $x+y+z\neq0$. প্রমাণ কর যে প্রদত্ত প্রত্যেক অনুপাত $\frac{1}{a+b+c}$ এর সমান। [M. U. 1902]

45. যদি $\frac{x}{b+c-a}=\frac{y}{c+a-b}=\frac{z}{a+b-c}$ হয়, তবে $(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z$এর মান নির্ণয় কর। [C. U. '48 ; উত্তর : 0]

46. $a : b = x : y$ হইলে দেখাও যে

$$a^2+b^2 : \frac{a^3}{a+b} :: x^2+y^2 : \frac{x^3}{x+y}.$$ [C. U.]

47. $\frac{x}{b+c}=\frac{y}{c+a}=\frac{z}{a+b}$ হইলে প্রমাণ কর যে

$$\frac{a}{y+z-x}=\frac{b}{z+x-y}=\frac{c}{x+y-z}.$$ [D. B. '49]

48. $\frac{x}{y}=\frac{a+2}{a-2}$ হইলে $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$-এর মান কত হইবে ? [D. B. '51]

দ্বিঘাত সমীকরণ (Quadratic Equation)

10. **দ্বিঘাত সমীকরণ :** যে সমীকরণের অজ্ঞাত রাশিটি দ্বিঘাত অপেক্ষা উচ্চতর ক্রমের নহে (অর্থাৎ যাহাতে অজ্ঞাত রাশিটির সর্বোচ্চ ঘাত 2) তাহাকে **দ্বিঘাত (quadratic) সমীকরণ বা দ্বিতীয় মানের (of the second degree)** সমীকরণ বলে। যথা, $x^2=25$, $3x^2+5x=4$, $ax^2+bx+c=0$ ইত্যাদি। দ্বিঘাত সমীকরণের সাধারণ আকার হইল $ax^2+bx+c=0$.

10. **অমিশ্র এবং মিশ্র দ্বিঘাত সমীকরণ :** (1) যে সমীকরণে অজ্ঞাত রাশিটি কেবলমাত্র দ্বিঘাত-বিশিষ্ট তাহাকে অমিশ্র দ্বিঘাত (pure quadratic) সমীকরণ বলে। ইহাতে অজ্ঞাত রাশিটির প্রথম ঘাতবিশিষ্ট কোন পদ থাকে না। যথা, $x^2=4$, $ax^2-5=0$

(2) যে সমীকরণে অজ্ঞাত রাশি প্রথম ও দ্বিতীয় ঘাতের হয়, তাহাকে **মিশ্র দ্বিঘাত** (adfected quadratic) সমীকরণ বলে। যথা, $3x^2-4x=15$.

12. **অমিশ্র দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান :**

প্রথমে অজ্ঞাত রাশিগুলিকে বামপক্ষে এবং জ্ঞাত রাশিগুলিকে ডানপক্ষে লইয়া গিয়া সাধারণভাবে x^2-এর মান নির্ণয় করিয়া তাহার বর্গমূল নির্ণয় করিলে অজ্ঞাত রাশির মান পাওয়া যায়। নিম্নের উদাহরণগুলি দেখ।

সমাধান কর (Solve) :—

উদাহরণ 1. $x^2=36$.

পক্ষান্তর করিয়া পাই $x^2-36=0$, বা, $(x+6)(x-6)=0$.

$\because$ দুইটি রাশির গুণফল শূন্য হইলে, যে কোন একটি শূন্য হইতে পারে,

$\therefore$ এখানে $x+6=0$, অথবা $x-6=0$,

$\therefore$ $x=-6$, অথবা, $x=6$. অতএব, সমাধান হইল $x=\pm 6$.

[**দ্বিতীয় প্রণালী**] $x^2=36$.

উভয় পক্ষের বর্গমূল লইয়া পাই $x=\pm 6$.

[**দ্রষ্টব্য :** এখানে $x^2=36$ হইয়াছে। উভয় পক্ষের বর্গমূল লইলে $\pm x=\pm 6$ হয়। অতএব, ইহা হইতে $+x=+6$, $+x=-6$, $-x=+6$ ও $-x=-6$ এই চারিটি সমাধান পাওয়া যায়। কিন্তু উপরের সমাধানে $-x=+6$ ও $-x=-6$ এই দুইটি না লিখিবার কারণ এই যে $-x=+6$ ও $x=-6$ একই এবং $-x=-6$ ও $x=6$ একই। $\therefore$ $x^2=36$ হইতে কেবল $x=\pm 6$ এই দুইটি সমাধানই পাওয়া যায়।]

উদা. 2. $2x-\dfrac{3}{x}=\dfrac{x}{2}$.

উভয়পক্ষকে হরগুলির ল. সা. গু. $2x$ দ্বারা গুণ করিয়া পাই,

$4x^2-6=x^2$, বা, $3x^2=6$, বা, $x^2=2$, $\therefore$ $x=\pm\sqrt{2}$.

[**অন্য প্রণালী**] $\dfrac{2x^2-3}{x}=\dfrac{x}{2}$,

বা, $4x^2-6=x^2$ [বজ্র গুণন দ্বারা] [এর পর পূর্বের মত হইবে]

উদা. 3. $\dfrac{x+4}{x-4}+\dfrac{x-4}{x+4}=\dfrac{10}{3}$. [C. U. '12 ; D. B. '22]

প্রদত্ত সমীকরণ হইতে $\dfrac{(x+4)^2+(x-4)^2}{(x-4)(x+4)}=\dfrac{10}{3}$, বা, $\dfrac{2x^2+32}{x^2-16}=\dfrac{10}{3}$,

বা, $10x^2-160=6x^2+96$, বা, $4x^2=256$, বা, $x^2=64$,

$\therefore$ $x=\pm 8$.

13. মিশ্র দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান

(1) উৎপাদক নির্ণয় দ্বারা সমাধান

উদাহরণ 1. $4x^2+25x-351=0$. [D. B. '27]

$4x^2+25x-351=0$, বা, $4x^2+52x-27x-351=0$,

বা, $4x(x+13)-27(x+13)=0$, বা, $(x+13)(4x-27)=0$.

এখানে $\because$ দুইটি উৎপাদকের গুণফল শূন্য, $\therefore$ উহাদের একটি অবশ্যই শূন্য হইবে। যদি $x+13=0$ হয়, তবে $x=-13$; আর যদি $4x-27=0$ হয়, তবে $4x=27$, $\therefore$ $x=\frac{27}{4}=6\frac{3}{4}$. $\therefore$ $x=-13$ অথবা $6\frac{3}{4}$.

উদা. 2. $\dfrac{x-2}{x+2}+\dfrac{6(x-2)}{x-6}=1$. [C. U. '51]

এখন, $\dfrac{6(x-2)}{x-6}=1-\dfrac{x-2}{x+2}$, বা, $\dfrac{6(x-2)}{x-6}=\dfrac{x+2-x+2}{x+2}$

বা, $\frac{6(x-2)}{x-6}=\frac{4}{x+2}$, বা, $\frac{3(x-2)}{x-6}=\frac{2}{x+2}$,

বা, $3(x^2-4)=2(x-6)$, বা, $3x^2-12=2x-12$,

বা, $3x^2-2x-12+12=0$, বা, $3x^2-2x=0$, বা, $x(3x-2)=0$,

∴ হয় $x=0$, অথবা, $3x-2=0$. অতএব, $x=0$ বা $\frac{2}{3}$.

উদা. 3. $x+\frac{1}{x}=25\frac{1}{25}$. [C. U. '14, '39 Sup. ; D. B. '25]

$x+\frac{1}{x}=25\frac{1}{25}$, বা, $\frac{x^2+1}{x}=\frac{626}{25}$, বা, $25x^2+25=626x$,

বা, $25x^2-626x+25=0$, বা, $25x^2-625x-x+25=0$,

বা, $25x(x-25)-1(x-25)=0$, বা, $(x-25)(25x-1)=0$.

∴ হয় $x-25=0$ অথবা $25x-1=0$, ∴ $x=25$ বা, $\frac{1}{25}$,

উদা. 4. $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+b}=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+b}$. [C. U. '21]

এক্ষেত্রে, $\frac{x+b-x}{x(x+b)}=\frac{a+b-a}{a(a+b)}$, বা $\frac{b}{x^2+bx}=\frac{b}{a^2+ab}$,

বা, $x^2+bx=a^2+ab$, বা, $x^2+bx-a^2-ab=0$,

বা, $(x+a)(x-a)+b(x-a)=0$, বা, $(x-a)(x+a+b)=0$,

∴ $x-a=0$ অথবা $x+a+b=0$, ∴ $x=a$, বা, $-(a+b)$.

উদা. 5. $x=\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-x}}}$. [C. U. '30]

এখানে $x=\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{\cfrac{4-2x-1}{2-x}}}$ বা, $x=\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{\cfrac{3-2x}{2-x}}}$, বা, $x=\cfrac{1}{2-\cfrac{2-x}{3-2x}}$

বা, $x=\cfrac{1}{\cfrac{6-4x-2+x}{3-2x}}$, বা, $x=\cfrac{1}{\cfrac{4-3x}{3-2x}}$, বা, $x=\frac{3-2x}{4-3x}$,

বা, $4x-3x^2=3-2r$, বা, $-3x^2+6x-3=0$,

বা, $x^2-2x+1=0$ [-3 দ্বারা ভাগ করিয়া]

বা, $(x-1)^2=0$, ∴ $x=1, 1$.

[**দ্রষ্টব্য :** $(x-1)^2=0$ অর্থাৎ $(x-1)(x-1)=0$. ∴ x-এর মান 1, 1 হইবে।]

উদা. 6. $\frac{1}{a+b+x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x}$, [D. B. '40, '43, '48]

বা, $\frac{1}{a+b+x}=\frac{bx+ax+ab}{abx}$, বা, $(a+b+x)(bx+ax+ab)=abx$,

বা, $(a+b+x)(bx+ax+ab)-abx=0$,

বা, $(a+b)(a+x)(b+x)=0$, বা, $(a+x)(b+x)=0$,

$\therefore$ $a+x=0$, অথবা, $b+x=0$, $\therefore$ $x=-a$ বা $-b$.

(2) পূর্ণবর্গে পরিণত করিয়া সমাধান

প্রথমে সমীকরণটিকে সাধারণ আকারে পরিণত করিয়া x বিহীন পদগুলিকে ডানদিকে পক্ষান্তর কর। উভয় পক্ষকে x^2-এর সহগ দ্বারা ভাগ কর। **x-এর সহগের অর্ধেকের বর্গ** উভয় পক্ষে যোগ কর। ইহাতে বামপক্ষটি পূর্ণবর্গ হইয়া যাইবে। নিম্নে উদাহরণগুলি দেখ।

সমাধান কর :

উদা. 1. $x^2-26x=407$. [D. B. '29]

$x^2-26x=407$, বা, $x^2-26x+(13)^2=407+(13)^2$,

বা, $(x-13)^2=407+169=576$, বা, $(x-13)=\pm\sqrt{576}$,

বা, $x-13=\pm 24$, $\therefore$ $x=13\pm 24=37$, বা, -11.

[**দ্রষ্টব্য :** এখানে x-এর সহগ -26, উহার অর্ধেক -13. $\therefore (-13)^2$ বা $(13)^2$ উভয়দিকে যোগ করা হইল। x-এর মান একটি হইল $(13+24)$, অন্যটি $(13-24)$]

উদা. 2. $ax^2+bx+c=0$. [C. U. '46]

উভয়পক্ষকে a দ্বারা ভাগ করিয়া পাই $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$,

বা, $x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$, বা, $x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$.

[উভয়পক্ষে $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ যোগ করিয়া]

বা, $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ বা, $x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$,

$\therefore$ $x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

[**বিশেষ দ্রষ্টব্য :** সকল দ্বিঘাত সমীকরণকে, $ax^2+bx+c=0$ এই সাধারণ আকারে পরিণত করা যায়। তারপর $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ এই

সূত্রের সাহায্যে তাহার সমাধান করা যায়। **ইহার ব্যাখ্যা :** সমীকরণে আছে x^2-এর সহগ a, এবং x-এর সহগ b এবং x-বিহীন পদ c. সূত্রে লব হইবে বিপরীত চিহ্নযুক্ত x-এর সহগ, তারপর $\pm\sqrt{}$চিহ্নের মধ্যে হইবে x-এর সাংখ্য সহগের বর্গ (অর্থাৎ b^2) বিযুক্ত x^2-এর সহগ ও x-বিহীন পদের গুণফলের 4 গুণ অর্থাৎ $-4ac$. আর হরে হইবে x^2-এর সহগের দ্বিগুণ। এখানে x-এর মান দুইটি কি কি দেখ। একটি হইল $\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, অন্যটি হইল $\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.]

(3) সূত্রের সাহায্যে সমাধান

উদা. 1. সমাধান কর : $x^2-2\sqrt{17}x-8=0$. [C. U. '47]

$$\text{এখানে } x=\frac{2\sqrt{17}\pm\sqrt{(2\sqrt{17})^2-4\times1\times-8}}{2\times1}=\frac{2\sqrt{17}\pm\sqrt{68+32}}{2}$$

$$=\frac{2\sqrt{17}\pm\sqrt{100}}{2}=\frac{2\sqrt{17}\pm10}{2}=\sqrt{17}\pm5.$$

উদা. 2. সমাধান কর : $\dfrac{1}{(x-1)(x-2)}+\dfrac{1}{(x-2)(x-3)}$

$$+\frac{1}{(x-3)(x-4)}=\frac{1}{6}.$$ [C. U. '17]

বা, $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x-4}-\dfrac{1}{x-3}=\dfrac{1}{6}$

বা, $\dfrac{1}{x-4}-\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{1}{6}$, বা, $\dfrac{x-1-x+4}{(x-4)(x-1)}=\dfrac{1}{6}$,

বা, $\dfrac{3}{x^2-5x+4}=\dfrac{1}{6}$, বা, $x^2-5x+4=18$,

বা, $x^2-5x-14=0$, বা, $(x-7)(x+2)=0$, $\therefore\ x=7$ বা -2.

[**দ্রষ্টব্য :** $\dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$ কে $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x-1}$ এইরূপ আকারে লেখা যায়, কারণ $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x-1}$ সরল করিয়া ঐ $\dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$ হয়। এইভাবে বাকী পদ দুইটিও লেখা হইল।]

উদা. 3. সূত্রের সাহায্য না লইয়া $x^2-11x=82052$ সমীকরণটি সমাধান কর। [C. U. '42]

$x^2-11x=82052$, বা $x^2-11x+(\frac{11}{2})^2=82052+(\frac{11}{2})^2$,

বা, $(x-\frac{11}{2})^2=82052+\frac{121}{4}=\frac{328329}{4}$;

বা, $x-\frac{11}{2}=\pm\frac{573}{2}$, $\therefore\ x=\frac{11}{2}\pm\frac{573}{2}=292$ বা, -281.

(4) শ্রীধর আচার্যের প্রণালী বা হিন্দু প্রণালী

প্রদত্ত সমীকরণকে প্রথমে $ax^2+bx+c=0$ এই সাধারণ আকারে পরিণত করিবে। যথা, [$(x-2)^2=3x+5$ সমীকরণকে $x^2-4x+4=3x+5$, বা $x^2-7x-1=0$ এইভাবে লিখিবে।] x-বিহীন পদ cকে ডানদিকে লইয়া যাইবে। উভয় পক্ষকে x^2-এর সহগের 4 গুণ (এখানে $4a$) দ্বারা গুণ করিবে। তারপর উভয় পক্ষে x-এর সহগের বর্গ (এখানে b^2) যোগ করিবে। ইহাতে বামদিকে একটি পূর্ণবর্গ রাশি হইবে]

উদাহরণ। সমাধান কর : $x^2-2\sqrt{7}x-2=0$. [G. U. '48]

এখানে $x^2-2\sqrt{7}x=2$,

বা, $4x^2-8\sqrt{7}x=8$ [উভয় পক্ষে 4×1 দ্বারা গুণ করিয়া]

বা, $4x^2-8\sqrt{7}x+(2\sqrt{7})^2=(2\sqrt{7})^2+8$ [উভয় পক্ষে x-এর সহগের বর্গ $(-2\sqrt{7})^2$ অর্থাৎ $(2\sqrt{7})^2$ যোগ করিয়া]

বা, $(2x-2\sqrt{7})^2=28+8=36$, বা, $2x-2\sqrt{7}=\pm6$,

বা, $2x=2\sqrt{7}\pm6$, $\therefore$ $x=\sqrt{7}\pm3$.

প্রশ্নমালা 61

সমাধান কর (Solve) :—

1. $5x^2+3=128$
2. $(2x-1)^2=5-4x$
3. $(x+3)(x-3)=16$
4. $x(x+5)=5(x+125)$
5. $x^2+2bx-b^2=a^2-b(b-2x)$
6. $2x-\frac{3}{x}=\frac{x}{2}$
7. $\frac{2x+1}{x+1}=\frac{x+8}{x+4}$ [C. U. '13]
8. $\frac{b-ax}{bx-a}=\frac{d-cx}{dx-c}$
9. $42x^2-41x-20=0$ [C. U. '13]
10. $3x^2-10x+3=0$ [C. U. '33]
11. $4x^2-65x+126=0$
12. $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+5}=\frac{1}{2}$
13. $x^2-(a+b)x+ab=0$
14. $6x^2-11x-10=0$ [C. U. '22]
15. $(17x-8)(x-2)=555$ [C. U. '32]
16. $17x^2+19x=1848$ [C. U. '11]
17. $6x^2-91x+323=0$ [C. U. '14]
18. $(x-7)(x-19)=64$ [C. U. '18]
19. $(x+4)(2x-3)=6$
20. $\frac{3x+4}{x+2}=\frac{x+5}{x+1}$

21. $\frac{x}{3}+\frac{3}{x}=4\frac{1}{4}$ [C. U. '31] 22. $x^2-6x+2=0$ [G. U. '48]

23. $\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x}=2\frac{1}{6}$ [E. B. S. B. '50]

24. $\frac{1}{a-b}\left\{a^2\left(x-b\right)-b^2\left(x-a\right)\right\}=x^2$

25. $x^2-2\sqrt{13}x+4=0$ [C. U. '49]

26. $\frac{x+3}{x-3}+6\frac{x-3}{x+3}=5$ [W. B. S. F. '52]

27. $\frac{x-3}{x+3}-\frac{x+3}{x-3}+6\frac{6}{7}=0$

28. $(x-3)(x-4)=\frac{34}{33^2}$ 29. $x^2-10x+8=0$ [C. U. '47]

30. $\frac{12x+17}{3x+1}-\frac{2x+15}{x+7}=3\frac{1}{5}$ [C. U. '20]

31. $\frac{40}{x-5}+\frac{27}{x}=13$ [D. B. '26] 32. $x+\frac{1}{x}=6\frac{1}{6}$

33. $\frac{x-6}{x+2}=\frac{x-10}{x+6}+2=0$ [C. U. '28]

34. $\frac{x+1}{x-1}+\frac{x+2}{x-2}=\frac{2x+13}{x+1}$

35. $\frac{x+1}{2}+\frac{2}{x+1}=\frac{x+1}{3}+\frac{3}{x+1}-\frac{5}{6}$ [C. U. '36]

36. $\frac{x-3}{x+3}+\frac{x+3}{x-3}=\frac{2(x+4)}{x-4}$ 37. $\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^2-5\left(\frac{x-a}{x+a}\right)+6=0$

38. $1+x=\cfrac{3}{4-\cfrac{3}{4-x}}$ [C. U. '44] 39. $\frac{(x+1)^3-(x-1)^3}{(x+1)^2-(x-1)^2}=2$ [D. B '49]

40. $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}=0$ [C. U. '26,'29 ; D. B. '50]

41. $ax^2+2bx+c=0$ সমীকরণের বীজগুলি নির্ণয় কর। [C. U. '45 ; G. U. '42]

42. $\frac{x-a}{x-b}+\frac{x-b}{x-a}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ [P. U. 1891]

43. $ax^2-bx-c=0$ [C.U. '44] 44. $\frac{1}{p+q+x}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{x}$

44. (a) $\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+2a}+\frac{1}{x+3a}=\frac{3}{x}$ [C. U. '50]

কোন সূত্রের সাহায্য না লইয়া সমাধান কর :

45. $3x^2+4x=8$ [C. U. '51] 46. $x^2-x=1806$

47. $63x^2-62x=221$

48. xএর মান কত হইলে $ax^2-(a+1)x+1=0$ হইবে ?

দ্বিঘাত সমীকরণ সংক্রান্ত বিবিধ প্রশ্ন
(Problems on Quadratic Equations)

14. দ্বিঘাত সমীকরণ সংক্রান্ত প্রশ্নগুলির সমাধানকালে অনেক সময় দেখা যায় যে, অজ্ঞাত রাশিটির প্রাপ্ত দুইটি মানের একটি প্রশ্নের সর্ত পূরণ করে না। সুতরাং প্রত্যেক ফলটিকে পরীক্ষা করিয়া তবে উত্তররূপে গ্রহণ করিবে।

উদাহরণ 1. পর পর কোন্ দুইটি অযুগ্ম সংখ্যার গুণফল 899 ?

মনে কর, $2x-1$ ও $2x+1$ পর পর দুইটি অযুগ্ম সংখ্যা,

$\therefore$ সর্তানুসারে, $(2x-1)(2x+1)=899$, বা $4x^2-1=899$,

বা, $4x^2=900$, বা, $x^2=225$, $\therefore$ $x=\pm 15$.

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাদ্বয়=29 ও 31 অথবা -31 ও -29.

[**দ্রষ্টব্য :** xএর যে কোন অখণ্ড মানে $2x$ একটি যুগ্ম সংখ্যা, $\therefore$ $2x+1$ বা $2x-1$ অযুগ্ম সংখ্যা। প্রথমটি পাটীগাণিতীয় সমাধান।]

উদা. 2. এক ব্যক্তি 20 টাকায় কতকগুলি পুস্তক কিনিল। সে যদি ঐ টাকায় আর একখানি পুস্তক বেশী পাইত, তবে প্রত্যেকখানির গড় মূল্য এক টাকা কম হইত। সে কতগুলি পুস্তক কিনিয়াছিল ?

মনে কর, পুস্তকের সংখ্যা x, সুতরাং প্রত্যেক পুস্তকের গড়মূল্য $\frac{20}{x}$ টাকা। যদি 20 টাকায় $x+1$ সংখ্যক পুস্তক কেনা হইত, তবে ঐ গড়মূল্য হইত $\frac{20}{x+1}$ টাকা। $\therefore$ সর্তানুসারে, $\frac{20}{x+1}=\frac{20}{x}-1$, বা, $\frac{20}{x+1}=\frac{20-x}{x}$,

বা, $20x=20x+20-x^2-x$, বা, $x^2+x-20=0$,

বা, $(x+5)(x-4)=9$, $\therefore$ $x=-5$ বা 4.

$\because$ পুস্তক-সংখ্যা ঋণাত্মক হয় না, $\therefore$ নির্ণেয় পুস্তকের সংখ্যা=4.

[**দ্রষ্টব্য :** এখানে যেহেতু পুস্তকের সংখ্যা ঋণাত্মক হইতে পারে না, সেজন্য xএর মান -5 গ্রাহ্য হইল না।]

উদা. 3. 50-কে এরূপ দুই অংশে বিভক্ত কর যেন তাহাদের অন্যোন্যকের সমষ্টি $\frac{1}{12}$ হয়। [C. U. '13]

মনে কর, প্রথম অংশ x, সুতরাং দ্বিতীয় অংশ $=50-x$.

$\therefore$ সর্তানুসারে $\frac{1}{x}+\frac{1}{50-x}=\frac{1}{12}$, বা $\frac{50-x+x}{x(50-x)}=\frac{1}{12}$,

বা, $\frac{50}{50x-x^2}=\frac{1}{12}$, বা, $600=50x-x^2$,

বা, $x^2-50x+600=0$, বা, $x^2-30x-20x+600=0$,

বা, $(x-20)(x-30)=0$, $\therefore$ $x=20$ বা 30.

$\therefore$ নির্ণেয় অংশদ্বয় $=20$ ও 30.

[**দ্রষ্টব্য :** দুইটি সংখ্যার গুণফল 1 হইলে একটিকে অপরটির **অন্যোন্যক** (reciprocal) বলে। যথা, $\frac{3}{4}$এর অন্যোন্যক $\frac{4}{3}$, 5এর অন্যোন্যক $\frac{1}{5}$ ইত্যাদি।]

উদা. 4. একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ 20 ইঞ্চি এবং অপর দুই বাহুর অন্তর 4 ইঞ্চি। ঐ বাহু দুইটি নির্ণয় কর। [G. U. '49]

মনে কর, ক্ষুদ্রতর বাহু $=x$ ইঞ্চি, সুতরাং বৃহত্তর বাহুটি $=x+4$ ইঞ্চি।

$\therefore$ $x^2+(x+4)^2=20^2$, বা, $x^2+x^2+8x+16=400$,

বা, $2x^2+8x-384=0$, বা, $x^2+4x-192=0$,

বা, $(x+16)(x-12)=0$, $\therefore x=-16$ বা 12, $\because$ বাহু ঋণাত্মক নহে,

$\therefore$ ক্ষুদ্রতর বাহুটি $=12$ ইঞ্চি এবং বৃহত্তর বাহুটি $=(12+4)$ ই. $=16$ ই.।

উদা. 5. বেড়া দিয়া ঘেরা একটি আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 2000 বর্গ মি. এবং বেড়ার মোট দৈর্ঘ্য 180 মিটার। উহার দৈর্ঘ্য নির্ণয়ের জন্য একটি দ্বিঘাত সমীকরণ নির্ণয় কর।

2(দৈর্ঘ্য + প্রস্থ) = পরিসীমা = বেড়ার মোট চাপ = 180 মিটার।

$\therefore$ দৈর্ঘ্য + প্রস্থ = 90 মিটার। মনে কর, দৈর্ঘ্য x মিটার, সুতরাং প্রস্থ $=(90-x)$ মিটার। প্রথম সর্ত হইতে পাই $x(90-x)=2000$,

বা, $x^2-90x+2000=0$, ইহাই উদ্দিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ।

ইহার সমাধান করিলে পাই, $x=40$ বা 50.

$\therefore$ নির্ণেয় দৈর্ঘ্য $=50$ মিটার [$\because$ দৈর্ঘ্য > প্রস্থ]

উদা. 6. একটি সাইকেল আরোহী 84 মাইল ভ্রমণ করিয়া দেখিল যে, ঘণ্টায় আরও 5 মাইল অধিক বেগে যাইলে তাহার 5 ঘণ্টা কম সময় লাগিত। সে কত বেগে গিয়াছিল ?

মনে কর, লোকটির গতি ঘণ্টায় x মাইল। $\therefore$ 84 মা. যাইতে সময় লাগে $\frac{84}{x}$ ঘণ্টা। গতি ঘণ্টায় $(x+5)$ মা. হইলে 84 মা. যাইতে লাগে $\frac{84}{x+5}$ ঘণ্টা।

$\therefore$ $\frac{84}{x}-\frac{84}{x+5}=5$, বা, $\frac{84x+420-84x}{x(x+5)}=5$, বা, $\frac{420}{x^2+5x}=5$,

বা, $5(x^2+5x)=420$, বা, $x^2+5x=84$; বা, $x^2+5x-84=0$,

বা, $(x+12)(x-7)=0$, $\therefore$ $x=-12$ বা 7.

$\because$ গতি ঋণাত্মক হইতে পারে না, $\therefore$ নির্ণেয় গতি ঘণ্টায় 7 মাইল।

উদা. 7. কোন বৃত্তের কেন্দ্র হইতে একটি জ্যা-এর উপর অঙ্কিত লম্বটি জ্যা-এর অর্ধেক অপেক্ষা 3 সে. মিটার কম। বৃত্তের ব্যাসার্ধ 15 সে. মিটার হইলে, ঐ জ্যা-এর দৈর্ঘ্য কত?

বৃত্তের কেন্দ্র হইতে কোন জ্যা-এর উপর অঙ্কিত লম্ব ঐ জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। মনে কর, AB জ্যা-এর উপর কেন্দ্র O হইতে OD লম্ব টানা হইয়াছে। এক্ষণে, OAD একটি সমকোণী ত্রিভুজ।

মনে কর, OD$=x$ সে. মি., সুতরাং AD$=x+3$ সে. মি. এবং অতিভুজ OA$=15$ সে. মি. ; $\therefore$ $x^2+(x+3)^2=15^2$, বা, $2x^2+6x+9=225$,

বা, $2x^2+6x-216=0$, বা, $x^2+3x-108=0$,

বা, $(x+12)(x-9)=0$, $\therefore$ $x=-12$ বা 9.

$\because$ দৈর্ঘ্যের মাপ ঋণাত্মক হইতে পারে না, $\therefore$ লম্বটি $=9$ সে. মিটার।

$\therefore$ নির্ণেয় জ্যা-এর দৈর্ঘ্য $=2(9+3)$ সে. মি. $=24$ সেন্টিমিটার।

উদা. 8. একটি মাঝি $4\frac{2}{3}$ ঘণ্টায় 7 কি. মিটার নৌকায় যাতায়াত করিতে পারে। যদি স্রোতের বেগ ঘণ্টায় 2 কি. মিটার হয়, তবে স্থির জলে দাঁড়ের বেগ কত ছিল?

মনে কর, দাঁড়ের বেগ ঘণ্টায় x কিলো মিটার। $\therefore$ স্রোতের অনুকূলে নৌকার গতি ঘণ্টায় $x+2$ কি. মি. এবং প্রতিকূলে ঘণ্টায় $x-2$ কি. মিটার।

$$\therefore \quad \frac{7}{x+2}+\frac{7}{x-2}=4\tfrac{2}{3}, \quad \text{বা, } \frac{1}{x+2}+\frac{1}{x-2}=\frac{2}{3}$$

[উভয় পক্ষকে 7 দ্বারা ভাগ করিয়া]

$$\text{বা, } \frac{x-2+x+2}{x^2-4}=\frac{2}{3}, \quad \text{বা, } x^2-3x-4=0,$$

বা, $(x-4)(x+1)=0$, $\therefore$ $x=4$ বা -1.

$\because$ দাঁড়ের বেগ -2 হইতে পারে না, $\therefore$ নির্ণেয় বেগ $=$ ঘণ্টায় 4 কি. মি.।

প্রশ্নমালা 62

1. কোন্ সংখ্যার বর্গ উহার ত্রিঘাতের সহিত যোগ করিলে উহার পরবর্তী সংখ্যার 16 গুণ হইবে? [A. U. '16]

2. দুইটি সংখ্যার সমষ্টি 2 এবং উহাদের অন্যোন্যকদ্বয়ের সমষ্টি $2\frac{1}{4}$; সংখ্যা দুইটি কত? [C. U. '36]

3. পর পর কোন্ দুইটি অযুগ্ম সংখ্যার গুণফল 35?

4. পর পর কোন্ দুইটি সংখ্যার অন্যোন্যকদ্বয়ের অন্তর $\frac{1}{110}$?

5. কোন্ সংখ্যা 30এর সহিত যোগ করিলে যোগফল সংখ্যাটির বর্গ অপেক্ষা 12 কম হইবে ? [E. B. S. B. '50]

6. পর পর দুইটি অযুগ্ম সংখ্যার বর্গের সমষ্টি 290 ; সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

7. কোন্ সংখ্যা তাহার বর্গমূল অপেক্ষা 110 বেশী ?

8. দুইটি পর পর যুগ্ম সংখ্যার বর্গের সমষ্টি 100 ; সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর। [A. U. '24]

9. একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ 17″ এবং অপর দুইটি বাহুর সমষ্টি 23″, ঐ বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য কত ? [G. U. '51]

10. কোন্ সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ 13 ইঞ্চি এবং অন্য বাহুদ্বয়ের সমষ্টি 17 ইঞ্চি ; ঐ বাহু দুইটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [C. U. '45]

11. A ও B একত্রে একটি কার্য 72 মিনিটে করিতে পারে ; কিন্তু A অপেক্ষা B-র ঐ কাজ করিতে এক ঘণ্টা বেশী সময় লাগে। প্রত্যেকে কতক্ষণে ঐ কাজটি করিতে পারে ?

12. এক শিলিংএ আরও দুইটি ডিম বেশী পাইলে যদি এক ডজন ডিমের মূল্য বর্তমান মূল্য অপেক্ষা 1 পেনি কম পড়ে, তবে এক ডজন ডিমের বর্তমান মূল্য কত ? [E. B. S. B. '51]

13. এক ব্যক্তি 420 টাকায় কতকগুলি ছাগল কিনিয়া দেখিল যে, সে ঐ টাকায় আর একটি ছাগল বেশী পাইলে প্রত্যেকটির মূল্য গড়ে এক টাকা কম হইত। সে কতগুলি ছাগল কিনিয়াছিল ?

14. একটি সংখ্যা তাহার অঙ্কদ্বয়ের গুণফলের দ্বিগুণ অপেক্ষা 8 কম। যদি এককের অঙ্ক অপেক্ষা দশকের অঙ্ক 1 বেশী হয়, তবে সংখ্যাটি কত ?

15. এক ব্যক্তির গতিবেগ ঘণ্টায় 2 কি. মিটার বেশী হইলে 24 কি. মি. যাইতে 1 ঘণ্টা সময় কম লাগে। ঘণ্টায় তাহার গতিবেগ কত ?

16. একটি বৃত্তের কেন্দ্র হইতে কোন জ্যা-এর উপর লম্বটি অর্ধ-জ্যা অপেক্ষা 1 সেণ্টি মিটার কম। বৃত্তের ব্যাসার্ধ 5 সেণ্টি মিটার হইলে, ঐ জ্যা-এর দৈর্ঘ্য কত ?

17. একটি আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 260 বর্গ মিটার। উহার দৈর্ঘ্য 5 মি. কম এবং প্রস্থ 2 মিটার বেশী হইলে উহা একটি বর্গক্ষেত্র হইত। উহার দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

18. একটি মাঝি $1\frac{1}{2}$ ঘণ্টায় স্রোতের অনুকূলে 9 কি মি. এবং ঐ সময়ে স্রোতের প্রতিকূলে 2 কি. মিটার নৌকা বাহিয়া যায়। ঘণ্টায় স্রোতের ও নৌকার বেগ কত ?

19. পর পর কোন্ দুইটি ধনাত্মক সংখ্যার বর্গের সমষ্টি 761 ?
[G. U. '52]

20. কোন সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ 25" এবং উহার পরিসীমা 56" ; উহার ক্ষুদ্রতম বাহুটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [G. U. '54]

21. পর পর কোন্ সংখ্যাদ্বয়ের বর্গের সমষ্টি 145 ? [C. U. '16]

22. 1কে এরূপ দুই অংশে বিভক্ত কর যেন উহাদের ত্রিঘাতের সমষ্টি $\frac{7}{16}$ হয়। [C. U. '15]

23. কোন্ প্রকৃত ভগ্নাংশ ও তাহার অন্যোন্যকের অন্তর $\frac{9}{20}$?
[C. U. '41 ; D. B. '39]

24. দুইটি সংখ্যার সমষ্টি 45 এবং উহাদের মধ্যসমানুপাতী 18 ; সংখ্যা দুইটি কত ? [B. U. '29]

25. কোন সংখ্যা তাহার অন্যোন্যক অপেক্ষা 1 বেশী। এরূপ কয়টি সংখ্যা হইতে পারে ? সংখ্যাগুলি নির্ণয় কর। [C. U. '34]

26. প্রমাণ কর যে, চারিটি ক্রমিক সংখ্যার গুণফলের সহিত 1 যোগ করিলে যোগফল একটি পূর্ণবর্গ হইবে।

27. 6 আনায় একটি ডিম বেশী পাইলে যদি এক ডজন ডিমের মূল্য 1 আনা কম পড়ে, তবে এখন এক ডজন ডিমের মূল্য কত ?
[D. B. '39, '41, '46]

28. এরূপ একটি ভগ্নাংশ নির্ণয় কর যাহার লব ও হর দুইটিতেই 2 অথবা 3 যোগ করিলে ভগ্নাংশটির মান যথাক্রমে পূর্বমানের 2 গুণ বা 3 গুণ হইবে।
[D. B. '40]

29. কোন সৈন্যদলকে 4 গভীর করিয়া শূন্যগর্ভ বর্গাকারে সাজাইলে সম্মুখ সারিতে যত সৈন্য থাকে, তাহাদিগকে পূর্ণবর্গাকারে সাজাইলে সম্মুখ সারিতে তদপেক্ষা 16 জন কম থাকে। সৈন্যসংখ্যা নির্ণয় কর। [D. B. '40]

লেখ (Graph)

14. সমীকরণ সমাধান। তোমরা লেখ অঙ্কন শিখিয়াছ। এক্ষণে লেখ সাহায্যে সমীকরণ সমাধান প্রণালী দেখ।

উদা. 1. $3x=17-2y$ ও $3y=2x+6$ সমীকরণ দুইটি লেখ সাহায্যে সমাধান কর। [A. U. '27]

চিত্র নং 1

$3x=17-2y\cdots(1)$,

বা, $2y=17-3x$,

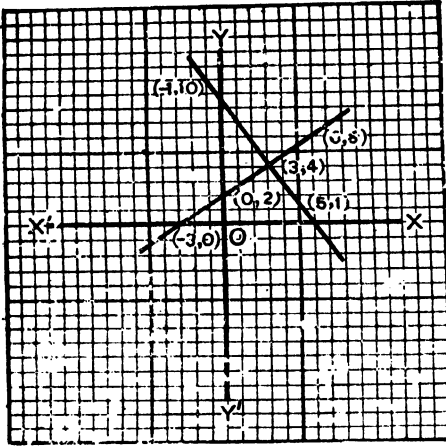
$\therefore\quad y=\dfrac{17-3x}{2}$, ইহা হইতে

x	-1	3	5
y	10	4	1

আবার, $3y=2x+6\cdots(2)$

বা, $y=\dfrac{2x+6}{3}$, ইহা হইতে পাই

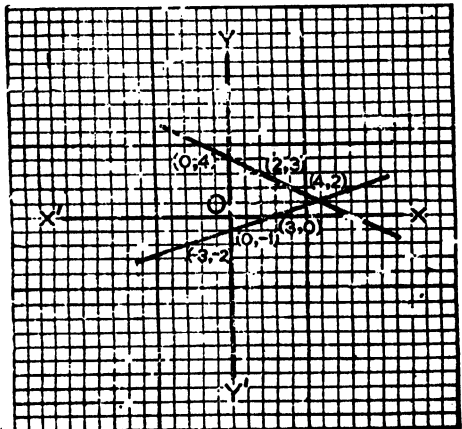
x	0	-3	6
y	2	0	6

ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গ-ক্ষেত্রের একটি বাহুকে দৈর্ঘ্য একক ধরিয়া লেখ দুইটি আঁকা হইল। উহারা যে বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে তাহার স্থানাঙ্ক (3, 4) দেখা গেল। [চিত্র 1]

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x=3,\ y=4$.

উদা. 2. লেখ আঁকিয়া সমাধান কর :

$$\frac{8-x}{2}=\frac{x-3}{3}.$$

মনে কর, $y=\dfrac{8-x}{2}$,

সুতরাং $y=\dfrac{x-3}{3}$ হইল।

চিত্র নং 2

এখন $y=\frac{8-x}{2}$ হইতে $\begin{array}{c|c|c|c} x & 0 & 2 & 4 \\ \hline y & 4 & 3 & 2 \end{array}$ এবং $y=\frac{x-3}{3}$ হইতে $\begin{array}{c|c|c|c} x & 0 & 3 & -3 \\ \hline y & -1 & 0 & -2 \end{array}$.

ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুকে দৈর্ঘ্য একক ধরিয়া সমীকরণ দুইটির লেখ আঁকা হইল। উহারা যে বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে তাহার স্থানাঙ্ক (6, 1)। ∴ নির্ণেয় সমাধান $x=6$. [চিত্র 2 দেখ।]

উদা. 3. $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$এর লেখ অঙ্কিত কর এবং অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী উহার অংশটির মাপ নির্ণয় কর। [D. B. '30, '33]

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1, \quad \text{বা,} \quad 4x+3y=12, \quad \text{বা,} \quad 3y=12-4x,$$

∴ $x=\frac{12-4x}{3}$, ইহা হইতে পাই $\begin{array}{c|c|c|c} x & 0 & 3 & 6 \\ \hline y & 4 & 0 & -4 \end{array}$.

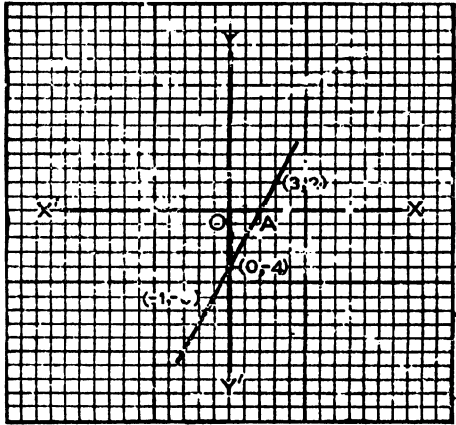
লেখ কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুকে দৈর্ঘ্য একক ধরিয়া লেখটি আঁক। 127 পৃষ্ঠায় চিত্র 6এর RS রেখা ঐ লেখ। উহা যেন অক্ষ দুইটিকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করিল। AB-র দৈর্ঘ্য মাপিয়া দেখ, AB = 5 দৈর্ঘ্য একক।

[অন্যরূপে : $AB^2=AO^2+BO^2=3^2+4^2=25$, ∴ AB = 5 দৈর্ঘ্য একক।]

উদা. 4. $y-2x+4=0$ এর লেখ আঁক এবং ঐ লেখ হইতে $2x-4=0$ এই সমীকরণের সমাধান কর। [D. B. '29]

$y-2x+4=0$,

∴ $y=2x-4\cdots(1)$

x	0	−1	3
y	−4	−6	2

চিত্র নং 3

লেখ কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুকে দৈর্ঘ্য একক ধরিয়া লেখটি আঁকা হইল (চিত্র নং 3)। এখন ঐ লেখ হইতে $2x-4=0$ সমীকরণটি সমাধান করিতে হইলে লেখটি x-অক্ষকে যে A বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে, তাহার ভুজ (বা x-অক্ষ বরাবর মাপ) দেখিতে হইবে। কারণ, সেখানে $y=0$, সুতরাং $0=2x-4$ হইবে, সমীকরণ (1) দেখ।

এখানে উক্ত দৈর্ঘ্য = 2 একক। ∴ নির্ণেয় বীজ $x=2$.

16. লেখ অঙ্কন দ্বারা প্রশ্ন সমাধান।

উদা. 1. এক পাউণ্ড চা-এর মূল্য 1 টাকা 50 পয়সা হইলে লেখ সাহায্যে (i) 5 পাউণ্ড চা-এর মূল্য এবং (ii) 12 টাকায় কত চা পাওয়া যায় নির্ণয় কর।

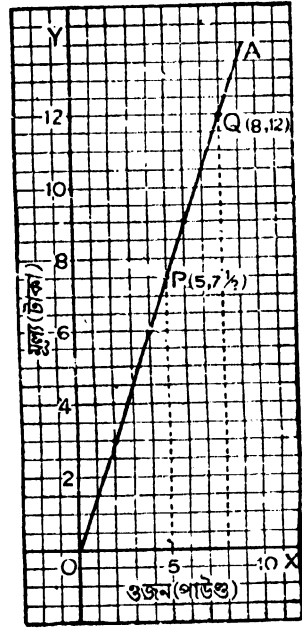
মনে কর, x পাউণ্ড ওজনের চা-এর মূল্য y টাকা। এখানে বলা আছে, 1 পাউণ্ড চা-এর মূল্য $\frac{3}{2}$ টাকা।

$\therefore$ x পাউণ্ড চা-এর মূল্য $\frac{3x}{2}$ টাকা।

$\therefore$ $y=\frac{3}{2}x$ হইল এবং ইহাই এস্থলে উদ্দিষ্ট লেখটির সমীকরণ।

এক্ষণে মনে কর, ছক কাগজে x-অক্ষের উপর অবস্থিত ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের **একটি** বাহু 1 পাউণ্ড ওজন এবং y-অক্ষস্থিত অনুরূপ **দুইটি** বাহু 1 টাকা মূল্য সূচিত করে।

সমীকরণ হইতে

x	2	4	6	...
y	3	6	9	...

চিত্র নং 4

$y=\frac{3}{2}x$-এর লেখ OA আঁকা হইল (চিত্র নং 4 দেখ)।

(i) এই লেখটির যে কোন বিন্দুর ভুজ ও কোটি দ্বারা যথাক্রমে চায়ের ওজন (পাউণ্ডে) এবং উহার মূল্য (টাকায়) সূচিত হইবে।

লেখ হইতে দেখা যায় যে, লেখটির যে বিন্দুর (P) ভুজ 5 একক, তাহার কোটি$=7\frac{1}{2}$ একক ; সুতরাং 5 পাউণ্ড চায়ের মূল্য $7\frac{1}{2}$ টাকা হইল।

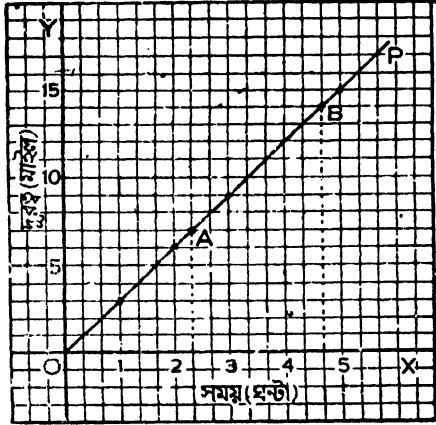
(ii) আবার, দেখা যায় লেখটির যে বিন্দুর (Q) কোটি 12 একক তাহার ভুজ$=8$ একক ; সুতরাং 12 টাকায় 8 পাউণ্ড চা পাওয়া যাইবে।

[**দ্রষ্টব্য :** এখানে OA সরলরেখাকে চায়ের **মূল্য-লেখ** (Price-graph) বলে।]

উদা. 2. এক ব্যক্তি ঘণ্টায় 3 মাইল যায়। তাহার গতি-লেখ অঙ্কিত কর এবং তাহা হইতে (i) সে 2 ঘণ্টা 20 মিনিটে কতদূর যাইবে ও (ii) 14 মাইল যাইতে তাহার কত সময় লাগিবে নির্ণয় কর।

মনে কর, লোকটি x ঘণ্টায় y মাইল যায়। এখানে লোকটি 1 ঘণ্টায় 3 মাইল যায়, স্থতরাং x ঘণ্টায় যায় $3x$ মাইল। $\therefore$ y মাইল $= 3x$ মাইল।

$\therefore$ $y = 3x$, এই সমীকরণের লেখটি লোকটির **গতি-লেখ** (motion-graph) হইবে।

মনে কর, ছক কাগজের x-অক্ষস্থিত ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 3টি বাহু 1 ঘণ্টা বা 1টি বাহু 20 মিনিট স্থচিত করে এবং y-অক্ষস্থিত অনুরূপ 1টি বাহু এক মাইল স্থচিত করে।

$y = 3x$এর লেখ OP আঁকা হইল। OP সরলরেখাই উদ্দিষ্ট গতি-লেখ। এই লেখটির যে কোন বিন্দুর ভুজ ও কোটি দ্বারা যথাক্রমে গতির সময় ও দূরত্ব স্থচিত হইবে [চিত্র 5 দেখ]।

চিত্র নং 5

(i) 2 ঘ. 20 মি. $= \frac{7}{3}$ ঘণ্টা। এখানে দেখা যায় লেখটির যে বিন্দুর (A) ভুজ $= 7$ বাহু $= \frac{7}{3}$ একক, তাহার কোটি $= 7$ বাহু $= 7$ একক। অতএব লোকটি $\frac{7}{3}$ ঘ. বা 2 ঘণ্টা 20 মিনিটে 7 মাইল পথ যাইবে।

(ii) আবার, দেখা যায় যে, লেখাস্থিত যে বিন্দুর (B) কোটি $= 14$ একক, তাহার ভুজ $= \frac{14}{3}$ একক (14 বাহু); স্থতরাং 14 মাইল যাইতে লোকটির $\frac{14}{3}$ ঘ. বা 4 ঘণ্টা 40 মিনিট সময় লাগিবে।

[**দ্রষ্টব্য :** OP লেখটিকে লোকটির **গতি-লেখ** (motion-graph) বলে। লোকটি সমবেগে গতিশীল বলিয়া তাহার গতি-লেখ একটি সরলরেখাই হইবে।]

উদা. 3. দুইটি আমের মূল্য 5 আনা হইলে লেখ সাহায্যে 5টি আমের মূল্য এবং 1 টাকা 4 আনায় কয়টি আম পাওয়া যাইবে তাহা নির্ণয় কর।

মনে কর, x সংখ্যক আমের মূল্য y আনা।

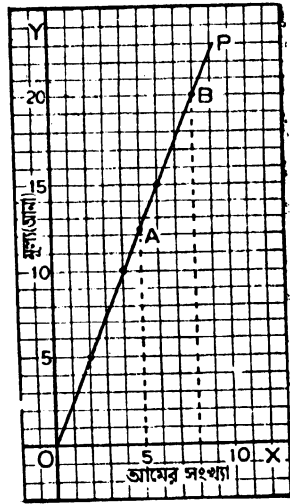
এখানে 2টি আমের মূল্য $= 5$ আনা,

চিত্র নং 6

∴ 1টি আমের মূল্য $=\frac{5}{2}$ আনা,

∴ x আমের মূল্য $=\frac{5x}{2}$ আনা।

অতএব, এস্থলে $y=\frac{5x}{2}$, এই সমীকরণের লেখটি আমের **মূল্য-লেখ** হইবে।

x-অক্ষের উপরিস্থিত ক্ষুদ্রতম বর্গ-ক্ষেত্রের একটি বাহুকে একটি আম এবং y-অক্ষের উপর অবস্থিত একটি বাহুকে 1 আনা ধরিয়া $y=\frac{5x}{2}$-এর লেখ OP আঁকা হইল [চিত্র নং 6]। এক্ষণে লেখ হইতে দেখা যাইতেছে যে (i) এই লেখটির যে বিন্দুর (A) ভুজ $=5$ একক, তাহার কোটি $=12\frac{1}{2}$ একক।

∴ 5টি আমের মূল্য $=12\frac{1}{2}$ আনা।

(ii) আবার, 1 টা. 4 আ. $=20$ আনা। লেখটির যে বিন্দুর (B) কোটি $=20$ একক, তাহার ভুজ $=8$ একক; সুতরাং 20 আনায় বা 1 টা. 4 আনায় 8টি আম পাওয়া যাইবে।

17. সরলরেখার সমীকরণ গঠন।

দুইটি বিন্দু নির্দিষ্ট থাকিলে এই দুইটি বিন্দুগামী সরলরেখাটিও নির্দিষ্ট হয়। সুতরাং দুইটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক দেওয়া থাকিলে সরলরেখাটির সমীকরণ নির্ণয় করা যায়।

সরলরৈখিক সমীকরণের সাধারণ আকৃতি হইল $ax+by=c$ অর্থাৎ আরও সংক্ষেপে $y=mx+c$.

এখন (1) ঐ সমীকরণে $y=0$ হইলে উহা $x=-\frac{c}{m}$ হয়, এবং ইহার লেখ-চিত্র হইবে y-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখা।

আবার $x=0$ হইলে উহা $y=c$ হয়; এবং ইহার লেখচিত্র হইবে x-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখা।

(2) $c=0$ হইলে $y=mx$ হয় এবং তখন $x=0$ হইলে $y=0$ হয়, সুতরাং সমীকরণে ধ্রুবক সংখ্যাটি না থাকিলে সরলরেখাটি মূলবিন্দু দিয়া যাইবে।

উদাহরণ 1. (3, 4) এবং (−2, −5) এই দুইটি বিন্দু দিয়া অঙ্কিত সরলরেখার সমীকরণ গঠন করিতে হইবে।

মনে কর, নির্ণেয় সমীকরণ $y=mx+c\cdots(1)$

যেহেতু, (3, 4) দ্বারা এই সমীকরণ সিদ্ধ, সুতরাং $4=3m+c\cdots(2)$

আবার, যেহেতু (−2, −5) দ্বারা ইহা সিদ্ধ, $\therefore\ -5=-2m+c\cdots(3)$

(2) হইতে (3) বিয়োগ করিলে, $9=5m$, $\therefore\ m=\frac{9}{5}$.

এখন (2) হইতে পাই $4=\frac{9}{5}\times3+c$, $\therefore\ c=4-\frac{27}{5}=-\frac{7}{5}$,

সুতরাং নির্ণেয় সমীকরণ হইল $y=\frac{9}{5}x-\frac{7}{5}$ অর্থাৎ $5y=9x-7$.

প্রশ্নমালা 63

লেখ সাহায্যে নিম্নের সমীকরণগুলি সমাধান কর :—

1. $4x+3y=15$ এবং $x-y=2$

2. $2x+3y=13$ এবং $3x-2y=13$ [P. U. '24]

3. $\dfrac{3x-4}{2}=3x-\frac{1}{2}$ [P. U. '25]   4. $\dfrac{2x+4}{6}=2x-1$.

5. $3x+2y=5$ এবং $5x-2y=3$ [P. U. '32]

6. $y-x=2$ এবং $8x-2y=5$ [D. B. '40]

7. $3x-2y-4=0$ এই সমীকরণের লেখ অঙ্কিত কর। $x=2$ হইলে y-এর মান কত হইবে তাহা ঐ লেখ হইতে নির্ণয় কর। [D. B. '36]

8. একই অক্ষদ্বয় ও একক লইয়া (i) $y+x=5$, (ii) $x=2y-3$, (iii) $x=7$এর লেখগুলি আঁক এবং উহাদের দ্বারা যে ত্রিভুজটি উৎপন্ন হইল তাহার শীর্ষবিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [D. B. '27]

9. $2x-5y=0$ এবং $5x+2y=7$এর লেখ দুইটি অঙ্কিত করিয়া উহাদের অন্তর্ভূত কোণটির পরিমাণ নির্ণয় কর।

10. $\frac{x}{5}+\frac{y}{12}=1$এর লেখ অঙ্কিত করিয়া অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী উহার অংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

11. একটি সঞ্চরমান বিন্দুর সর্ব অবস্থানে কোটির দ্বিগুণ উহার ভুজ অপেক্ষা 3 অধিক। প্রমাণ কর যে উহার সঞ্চারপথ (3, 3) বিন্দু দিয়া যাইবে এবং লেখ দ্বারা উহা সমর্থন কর।

[Hints : ঐ বিন্দুটির সঞ্চারপথ একটি সরলরেখা যাহা $2y=x+3$ এই সমীকরণ দ্বারা সূচিত অর্থাৎ উহার লেখ।]

12. নিম্নের প্রত্যেক বিন্দুযুগলগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর :—
(i) (2, 3), (0, 6) ; (ii) (0, 0), (2, −4) ; (iii) (6, −8), (−7, 5) ; (iv) (2, 3), $(3, 2\frac{1}{3})$.

13. $x+y=2$ এবং $x=y$ সমীকরণদ্বয়ের লেখ অঙ্কিত কর। উহাদের ছেদবিন্দু ও অন্তর্ভূত কোণ নির্ণয় কর। [W. B. S. F. '52]

14. এক ব্যক্তি সাইকেলে 20 কিলো মিটার ভ্রমণ করিবার জন্য প্রাতে 8টায় রওনা হইয়া ঘণ্টায় 5 কিলোমিটার বেগে যাইতে লাগিল। ঐ পথ যাইতে দূরত্ব ও সময়ের সম্বন্ধসূচক একটি লেখ অঙ্কিত কর।

15. যদি 2টি লেবুর মূল্য 3 আনা হয়, তবে (1) 7টি লেবুর মূল্য ও (2) 1 টাকা 5 আনায় কয়টি লেবু পাওয়া যাইবে লেখ সাহায্যে নির্ণয় কর।

সহজ অভেদ (Identities)

18. পূর্বে অভেদ ও সমীকরণের পার্থক্য সম্বন্ধে আলোচনা করা হইয়াছে। $a^2+b(2a+b)=a(a+2b)+b^2$ একটি অভেদ, = এই সমান চিহ্নের উভয় পক্ষের রাশিমালা দৃশ্যতঃ বিভিন্নরূপ হইলেও কার্যতঃ ইহারা একই ; কারণ a ও bএর যে-কোনও মানে উভয় পক্ষের মান একই হইবে। সুতরাং রাশিমালার অভেদত্ব নিম্নভাবে প্রমাণ করিতে হয়।

(1) উভয় পক্ষকে সরল করিলে ইহাদের সরলতম মান সমান হইবে।

(2) এক পক্ষের রূপের প্রতি দৃষ্টি রাখিয়া অপর পক্ষকে প্রক্রিয়া দ্বারা ঐরূপে রূপান্তরিত করা যায় ; যেমন, বামপক্ষ যদি কয়েকটি পদসমষ্টি হয় এবং দক্ষিণপক্ষ যদি একপদ অর্থাৎ কয়েকটি পদের গুণফল হয়, তবে বুঝিতে হইবে, বামপক্ষকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিলেই দক্ষিণপক্ষ পাওয়া যাইবে।

কয়েকটি বিভিন্ন প্রক্রিয়ার উদাহরণ দেওয়া যাইতেছে।

উদা. 1. প্রমাণ কর $(ac+bd)^2+(ad-bc)^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2)$.
এখানে স্পষ্টতঃ বামপক্ষকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিলেই দক্ষিণপক্ষ হইবে।

বামপক্ষ $=a^2c^2+b^2d^2+2abcd+a^2d^2-2abcd+b^2c^2$
$=(a^2c^2+a^2d^2)+(b^2c^2+b^2d^2)=a^2(c^2+d^2)+b^2(c^2+d^2)$
$=(a^2+b^2)(c^2+d^2)=$ দক্ষিণপক্ষ।

উদা. 2. প্রমাণ কর $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$
$=\frac{1}{2}\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}$.

বামপক্ষ $=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$
$=\frac{1}{2}\{(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)+(a^2-2ab+b^2)\}$
$=\frac{1}{2}\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}$.

উদা. 3. প্রমাণ কর যে $(x+2y-3z)^3+(x-2y+3z)^3$
$+6x(x+2y-3z)(x-2y+3z)=8x^3$.

স্পষ্টতঃ বামপক্ষকে সরল করিলেই দক্ষিণপক্ষ হইবে।

মনে কর, $x+2y-3z=a$, $x-2y+3z=b$,

$\therefore \quad a+b=(x+2y-3z)+(x-2y+3z)=2x.$

$\therefore$ প্রদত্ত বামপক্ষ $=a^3+b^3+3ab(a+b)=(a+b)^3=(2x)^3=8x^3$.

19. সর্তাধীন অভেদ। ইতিপূর্বে যে সকল অভেদের উদাহরণ আলোচনা করা হইল, তাহাদের কোন সর্ত নাই; এগুলি সর্তহীন অভেদ। আবার, এমন দেখা যায় যে কোন নির্দিষ্ট সর্তে দুইটি রাশিমালা সমান হয়। এক্ষেত্রে এই প্রকার অভেদকে সর্তাধীন অভেদ বলে। সমীকরণ সর্তাধীন অভেদের বিপরীত প্রক্রিয়া। সর্তাধীন অভেদে নির্দিষ্ট সর্তে অভেদ প্রমাণ করিতে হয়, কিন্তু সমীকরণে সর্তটি নির্ণয় করিতে হয়। সর্তাধীন অভেদের কয়েকটি উদাহরণ দেওয়া হইল।

উদাহরণ 1. যদি $2s=a+b+c$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

$$(s-a)^2+(s-b)^2+(s-c)^2+s^2=a^2+b^2+c^2$$

বামপক্ষ $=s^2-2sa+a^2+s^2-2sb+b^2+s^2-2sc+c^2+s^2$

$=4s^2-2s(a+b+c)+a^2+b^2+c^2$

$=4s^2-2s.2s+a^2+b^2+c^2 \quad [\because \quad a+b+c=2s]$

$=4s^2-4s^2+a^2+b^2+c^2$

$=a^2+b^2+c^2$.

উদা. 2. যদি $a+b+c=0$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

$$a^2-bc=b^2-ca=c^2-ab.$$

যেহেতু $a+b+c=0$, $\therefore a=-b-c$, $b=-c-a$, $c=-a-b$.

এখন, $a^2-bc=a.a-bc=a.(-b-c)-bc=-ab-ac-bc$,

$b^2-ca=b.b-ca=b.(-c-a)-ca=-bc-ab-ca$,

$c^2-ab=c.c-ab=c.(-a-b)-ab=-ca-bc-ab$.

$\because$ প্রত্যেকটি $=-(ab+bc+ca)$, $\therefore a^2-bc=b^2-ca=c^2-ab$.

উদা. 3. যদি $a+b+c=0$ হয়, তবে প্রমাণ কর $a^3+b^3+c^3=3abc$.

যেহেতু, $a+b+c=0$, $\quad \therefore \quad a+b=-c$,

$\therefore \quad (a+b)^3=(-c)^3$, বা, $a^3+b^3+3ab(a+b)=-c^3$,

বা, $a^3+b^3-3abc=-c^3 \quad (\because a+b=-c)$

$\therefore \quad a^3+b^3+c^3=3abc$ [পক্ষান্তর করিয়া]

উদা. 4. যদি $2s=a+b+c$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

$(s-a)^3+(s-b)^3+3(s-a)(s-b)c=c^3$.

মনে কর, $s-a=x$, $s-b=y$,

$\therefore \quad x+y=2s-a-b=a+b+c-a-b=c.$

$\therefore$ বামপক্ষ $=x^3+y^3+3xy(x+y)=(x+y)^3=c^3$.

উদা. 5. যদি $a+b+c=0$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,
$$a^4+b^4+c^4=2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2).$$ [C. U. '43]

$\because \; a+b+c=0, \;\therefore\; a+b=-c,$

$\therefore \; a^2+b^2+2ab=c^2,$ বা, $a^2+b^2-c^2=-2ab,$

$\therefore \; (a^2+b^2-c^2)^2=(-2ab)^2,$

বা, $a^4+b^4+c^4+2a^2b^2-2b^2c^2-2a^2c^2=4a^2b^2$

$\therefore \; a^4+b^4+c^4=4a^2b^2-2a^2b^2+2b^2c^2+2a^2c^2$

$=2a^2b^2+2b^2c^2+2a^2c^2=2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2).$

উদা. 6. যদি $a+b+c=0$ হয়, তবে দেখাও যে,

$$\frac{1}{b^2+c^2-a^2}+\frac{1}{c^2+a^2-b^2}+\frac{1}{a^2+b^2-c^2}=0.$$ [C. U. 1938]

$\because \; a+b+c=0, \;\therefore\; a+b=-c,$

$\therefore \; a^2+b^2+2ab=c^2$ [উভয়পক্ষের বর্গ লইয়া]

বা, $a^2+b^2-c^2=-2ab.$ অনুরূপে $b^2+c^2-a^2=-2bc$

এবং $c^2+a^2-b^2=-2ca.$

এক্ষণে, $\dfrac{1}{b^2+c^2-a^2}+\dfrac{1}{c^2+a^2-b^2}+\dfrac{1}{a^2+b^2-c^2}$

$$=\frac{1}{-2bc}+\frac{1}{-2ca}+\frac{1}{-2ab}=\frac{a+b+c}{-2abc}=\frac{0}{-2abc}=0.$$

উদা. 7. যদি $x^2=y+z$, $y^2=z+x$ এবং $z^2=x+y$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1+y}+\dfrac{1}{1+z}=1.$

$$\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+z}=\frac{x}{x+x^2}+\frac{y}{y+y^2}+\frac{z}{z+z^2}$$

[প্রথম পদের লব ও হরকে x দ্বারা, দ্বিতীয়টির লব ও হরকে y দিয়া এবং তৃতীয়টির লব ও হরকে z দ্বারা গুণ করিয়া]

$$=\frac{x}{x+y+z}+\frac{y}{x+y+z}+\frac{z}{x+y+z}=\frac{x+y+z}{x+y+z}=1.$$

উদা. 8. যদি $x=\dfrac{4ab}{a+b}$ হয়, তবে দেখাও যে, $\dfrac{x+2a}{x-2a}+\dfrac{x+2b}{x-2b}=2.$

[D. B. '32]

$$\because \; x=\frac{4ab}{a+b}, \quad \therefore \; x(a+b)=4ab.$$

এক্ষণে, $\frac{x+2a}{x-2a}+\frac{x+2b}{x-2b}=\frac{x+2a}{x-2a}-1+\frac{x+2b}{x-2b}-1+2$

$$=\frac{x+2a-x+2a}{x-2a}+\frac{x+2b-x+2b}{x-2b}+2$$

$$=\frac{4a}{x-2a}+\frac{4b}{x-2b}+2=\frac{4ax-8ab+4bx-8ab}{(x-2a)(x-2b)}+2$$

$$=\frac{4x(a+b)-16ab}{(x-2a)(x-2b)}+2=\frac{4\times 4ab-16ab}{(x-2a)(x-2b)}+2$$

$$=\frac{0}{(x-2a)(x-2b)}+2=0+2=2.$$

উদা. 9. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$ হইলে প্রমাণ কর যে,

$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}=\frac{1}{a^3+b^3+c^3}=\frac{1}{(a+b+c)^3}$. [C. U. '41 ; D. B. '42]

$\because$ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$, $\therefore$ $\frac{bc+ca+ab}{abc}=\frac{1}{a+b+c}$

বা, $(a+b+c)(bc+ca+ab)=abc$ [বজ্রগুণন দ্বারা]

বা, $(a+b+c)(bc+ca+ab)-abc=0$,

$\therefore$ $(a+b)(b+c)(c+a)=0$.

তিনটি সংখ্যার গুণফল 0 হইলে, উহাদের মধ্যে কোন একটি অবশ্য শূন্য হইবে। এখানে মনে কর, $a+b=0$, $\therefore$ $a=-b$; $\therefore$ $a^3=-b^3$.

এক্ষণে, $\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}=\frac{1}{-b^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}=-\frac{1}{b^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}=\frac{1}{c^3}$,

আবার, $\frac{1}{a^3+b^3+c^3}=\frac{1}{-b^3+b^3+c^3}=\frac{1}{c^3}$

এবং $\frac{1}{(a+b+c)^3}=\frac{1}{(-b+b+c)^3}=\frac{1}{(c)^3}=\frac{1}{c^3}$,

$\therefore$ $\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}=\frac{1}{a^3+b^3+c^3}=\frac{1}{(a+b+c)^3}$ $\left[\because \text{প্রত্যেকটি}=\frac{1}{c^3}\right]$

প্রশ্নমালা 64

নিম্নের অভেদগুলি প্রমাণ কর :—

1. $(b+c)(b-c)+(c+a)(c-a)+(a+b)(a-b)=0$.

2. $(b-c)(b^2+bc+c^2)+(c-a)(c^2+ca+a^2)$
$=(b-a)(b^2+ab+a^2)$.

3. $(1+a^2)(1+b^2)-(a+b)^2=1-2ab+a^2b^2.$

4. $(a^2-b^2)(x^2-y^2)+4abxy=(ax+by)^2-(bx-ay)^2.$

5. $(a+b)^2-(c+d)^2+(a+c)^2-(b+d)^2$
$$=2(a-d)(a+b+c+d).$$

6. $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a).$

7. যদি $s=a+b+c$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,
$(as+bc)(bs+ca)(cs+ab)=(b+c)^2(c+a)^2(a+b)^2.$

8. $2s=a+b+c$ হইলে, দেখাও যে, $s(s-c)+(s-a)(s-b)=ab.$

9. $2s=a+b+c$ হইলে, প্রমাণ কর যে,
$(s-a)^3+(s-b)^3+3(s-a)(s-b)c=c^3.$

10. যদি $2s=a+b+c$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $2(s-a)(s-b)$
$+2(s-b)(s-c)+2(s-c)(s-a)+a^2+b^2+c^2=2s^2.$

11. যদি $s=a+b+c$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,
$(s-3a)^2+(s-3b)^2+(s-3c)^2=3\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}.$

12. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=3$ হইলে, দেখাও যে, $x^3+\frac{1}{x^3}=0.$

13. $xy+xz+yz=1$ হইলে দেখাও যে, $(1+x^2)=(x+y)(x+z).$

14. যদি $a+b+c=0$ হয়. তবে প্রমাণ কর যে,

(i) $a^2+b^2+c^2=-2(ab+bc+ca),$

(ii) $b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2=(bc+ca+ab)^2.$

15. যদি $a+b+c=0$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,
$b^2+bc+c^2=c^2+ca+a^2=a^2+ab+b^2=-(bc+ca+ab).$

16. যদি $a+b+c=0$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,
$2(a^4+b^4+c^4)=(a^2+b^2+c^2)^2.$

17. $x+y+z=1$ হইলে, প্রমাণ কর যে,
$(x+yz)(y+z)=(y+zx)(z+x)=(z+xy)(x+y).$

18. যদি $a+b+c=0$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,
$a(a^2-b^2-c^2)+b(b^2-c^2-a^2)+c(c^2-b^2-a^2)=6abc.$
[C. U. '49]

19. যদি $x+y=2z$ হয়, তবে দেখাও যে, (i) $\frac{x}{x-z}+\frac{y}{y-z}=2$;

(ii) $\frac{x}{x-z}+\frac{z}{y-z}=1.$ [W. B. S. F. '53]

20. যদি $a+b=2c$ হয়, তবে দেখাও যে, $\frac{a}{a-c}+\frac{c}{b-c}=1.$ [C. U. '46]

21. যদি $xy+yz+zx=1$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,
$(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)=(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2$.

22. $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$ হইলে, প্রমাণ কর যে,
$a^3+b^3+c^3=3abc$.

23. $a=y+z$, $b=z+x$, $c=x+y$ হইলে, প্রমাণ কর যে,
$a^3+b^3+c^3-3abc=2(x^3+y^3+z^3-3xyz)$.

24. যদি $x=b+c-a$, $y=c+a-b$, $z=a+b-c$ হয়, তবে
$x^3+y^3+z^3-3xyz=4(a^3+b^3+c^3-3abc)$ হইবে। [D. B. '30]

25. $a=x^2-yz$, $b=y^2-zx$, $c=z^2-xy$ হইল প্রমাণ কর যে,
$a^3+b^3+c^3-3abc=(x^3+y^3+z^3-3xyz)^2$. [C. U. '44]

26. যদি $2s=a+b+c$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,
$2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4=16s(s-a)(s-b)(s-c)$.

27. যদি $a+b+c=0$ হয়, তবে $a^4+b^4+c^4=2(ab+bc+ca)^2$.

28. যদি $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{b}{a}+\frac{d}{c}$ হয়, তবে $\frac{a^3}{b^3}+\frac{c^3}{d^3}=\frac{b^3}{a^3}+\frac{d^3}{c^3}$ হইবে। [C.U.]

29. যদি $a+b=1$ হয়, তবে দেখাও যে, $(a^2-b^2)^2=a^3+b^3-ab$.

30. যদি $a+\frac{1}{b}=1$ এবং $b+\frac{1}{c}=1$ হয়, তবে দেখাও যে, $c+\frac{1}{a}=1$ এবং $abc+1=0$.

31. যদি $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$ হয়, তবে $a=b=c$ হইবে।

32. যদি $x=a(b-c)$, $y=b(c-a)$, $z=c(a-b)$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\left(\frac{x}{a}\right)^3+\left(\frac{y}{b}\right)^3+\left(\frac{z}{c}\right)^3=\frac{3xyz}{abc}$. [D. B. '24]

*33. $a+b+c=0$ হইলে, প্রমাণ কর যে,
$$\frac{1}{2a^2+bc}+\frac{1}{2b^2+ca}+\frac{1}{2c^2+ab}=0.$$

34. যদি $bc+ca+ab=0$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,
$$\frac{1}{a^2-bc}+\frac{1}{b^2-ca}+\frac{1}{c^2-ab}=0.$$ [C. U. '51 ; D. B. '37]

35. যদি $a^3+b^3+c^3=3abc$ হয়, তবে হয় $a+b+c=0$, অথবা $a=b=c$ হইবে। [G. U. '39 Sup.]

36. যদি $3(a^2+b^2+c^2)=(a+b+c)^2$ হয়, তবে $a=b=c$ হইবে।

37. $a+2b+3c=0$ হইলে, $\frac{2c}{a+c}-\frac{a}{b+c}$ এর মান নির্ণয় কর। [উঃ $=2$]

38. যদি $a^2=b+c$, $b^2=c+a$, $c^2=a+b$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,
$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}=1.$ [C. U. '42]

39. প্রমাণ কর : $\frac{(a-b)^2}{(b-c)(c-a)}+\frac{(b-c)^2}{(c-a)(a-b)}+\frac{(c-a)^2}{(a-b)(b-c)}=3.$
[C. U. '30 ; D. B. '41]

40. যদি $x=\frac{2ab}{a+b}$ হয়, তবে $\frac{x+a}{x-a}+\frac{x+b}{x-b}=2$ হইবে। [C. U. '20]

41. $\frac{b+c}{a}=\frac{c+a}{b}=\frac{a+b}{c}$ হইলে, প্রমাণ কর যে, হয় $a+b+c=0$, অথবা, $a=b=c.$ [C. U. '31]

42. $ap=bq=cr$ হইলে, প্রমাণ কর যে,
$\frac{p^2}{qr}+\frac{q^2}{pr}+\frac{r^2}{pq}=\frac{bc}{a^2}+\frac{ca}{b^2}+\frac{ab}{c^2}.$ [P. U. '29]

43. প্রমাণ কর যে, $\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}^2$
$=2\{(b-c)^4+(c-a)^4+(a-b)^4\}.$

***44.** $ab+bc+ca=0$ হইলে, প্রমাণ কর যে,
$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3-3abc.$ [M. U.]

45. $\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=\frac{2}{a+b}$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $a^2+b^2=2c^2.$
[C. U. '48]

46. $x+y+z=xyz$ হইলে, প্রমাণ কর যে,
$(1+x)(1+y)(1+z)-(1-x)(1-y)(1-z)=4xyz.$
[C. U. '48 Sup.]

47. যদি $ax+by=m$, $bx-ay=n$ এবং $a^2+b^2=1$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $x^2+y^2=m^2+n^2.$ [C. U. '39 Sup.]

***48.** যদি $(a+b+c)(ab+bc+ca)=abc$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,
$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3.$

49. $a+b+c=0$ হইলে, প্রমাণ কর যে,
$a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3=0.$ [W. B. S. F. '52]

50. $1+x+x^2=0$ হইলে, প্রমাণ কর যে,
$(a+bx+cx^2)+(ax+bx^2+c)+(ax^2+b+cx)=0.$ [G. U. '51]

51. যদি $x=by+cz$, $y=cz+ax$, $z=ax+by$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}=1.$ [E. B. S. B. '55]

52. $4(a^2+b^2+c^2+d^2)=(a+b+c+d)^2$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $a=b=c=d.$
[W. B. S. B. Addl.]

উত্তরমালা (বীজগণিত)

প্রশ্নমালা 1

1\. (i) 2   (ii) −2   (iii) −5   (iv) −5

2\. (i) 18   (ii) −4   (iii) 4   (iv) −4   (v) −12   (vi) 0   (vii) −40   (viii) 0

3\. (i) −5   (ii) −7   (iii) +3   (iv) +22

4\. (i) −10   (ii) −3   (iii) 0   (iv) 6   (v) 6   (vi) 0   (vii) −3   (viii) 0

5\. 77°   6. (i) 60টা.   (ii) 90 টা.   7. (−5) টা.

8\. (−5) কি. মি., 5 কি. মি.   9. 56 কি. মি. দক্ষিণে   10. 5°.

প্রশ্নমালা 2

1\. (1) −21   (2) −28   (3) 32   (4) 28   (5) 176   (6) 0   (7) 0   (8) 0   (9) 0   (10) −3   (11) −9   (12) 8   (13) 0   (14) 5.

2\. (1) −4   (2) 4   (3) −10   (4) −5   (5) −26   (6) 13   (7) 97   (8) −45   (9) 1   (10) 16   (11) $\frac{4}{9}$ (12) 9   (13) $-\frac{4}{5}$ (14) 7

3\. $\frac{5}{13}$ 4. 0   5. 3   6. 0   7. 0.

প্রশ্নমালা 3

1\. $5xy-zx$ 2. $4a^2b^2$ 3. $\frac{1}{4}ab^2cd$ 4. $4x^2-6x-\frac{1}{8}$

5\. 0   6. $\frac{5}{4}a^2+\frac{4}{3}a-\frac{1}{4}b$ 7. $2x^3+1$ 8. $-ab^2-3a$

9\. $10x-2y-4z$ 10. 4.

প্রশ্নমালা 4

1\. $12xy-y^2$ 2. $9x^4+x^2-4x-1$ 3. $-3a^2-5ab+6b^2$

4\. $3a+3b$ 5. $\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{3}a+b-\frac{1}{2}c$ 6. $3b-2a$, $3x-5y$

7\. $-x^2+xy+y^2$ 8. $5a^3+6a^2+9a-1$ 9. $-3x^2+2xy-1$

10\. $(a-b)$ মিটার।

প্রশ্নমালা 5

1\. $6x^3-17x^2y+14xy^2-3y^3$ 2. $\frac{1}{4}a^3+\frac{7}{18}ab^2+\frac{1}{3}b^3$

3\. $49a^3+14a^2-17a+2$ 4. x^3-y^3 5. $a^3+b^3+c^3-3abc$

6\. $a^3+2ab-ab^2+b-1$ 7. $a^3+b^3+3ab-1$ 8. $8a^3-27b^3$

9\. $-6a^6-9a^5+19a^4+4a^3-11a^2+8a-5$.

10. $x^3+y^3+z^3-3xyz$ 11. $1-x^8$ 12. x^4-y^4

13. $2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4$

14. $a^8+a^4b^4+b^8$ 15. $6x^2$.

প্রশ্নমালা 6

1. $5x+3$ 2. a^3+2a^2+4a+2 3. a^4-a^2+a

4. $4x^2+3x+1$ 5. $x^2+y^2+a^2$

6. $a^2+b^2+c^2-ab+ac+bc$ 7. $x^2+y^2+1-xy+x+y$

8. $a^4+a^3b-ab^3-b^4$

9. $x^4+x^3y-xy^3-y^4-\frac{y^5}{x}+\frac{y^7}{x^3}+\frac{y^8}{x^4}$.

10. গুণফল $=4x^4+y^4-5x^2y^2$; ভাগফল $=2x^2+xy-y^2$.

প্রশ্নমালা 7

1. $x-2$ 2. $-b+3c$ 3. $-x$ 4. $x-2$ 5. $2x+7y+z$

6. $4x-8y-2z$ 7. $-1-x$ 8. $x+5z$ 9. $x+y$

10. $3a+1$ 11. $3x-2y+4z$ 12. $-2b+3c$.

প্রশ্নমালা 8

1. $36a^4-60a^2b^2+25b^4$ 2. $16x^6-72x^3y^3+81y^6$

3. $x^2y^2-2abxy+a^2b^2$ 4. $x^2y^2+2x^2yz+x^2z^2$

5. $4x^2y^2-12xy^3+9y^4$ 6. $a^2b^2c^2-2abc+1$

7. $a^2b^2c^2+2ab^2c^2+b^2c^2$ 8. $4a^2b^2c^2-12a^2b^2c+9a^2b^2$

9. q^2 10. x^2 11. $4a^2b^2$ 12. 225 13. 16

14. 1 15. 1012036 16. 99820081 17. 99980001.

প্রশ্নমালা 9

1. 41 2. 53 3. 14 4. 11 5. 19 6. 156

7. 45 8. 69 9. $4x^2+y^2+z^2+4xy-4xz-2yz$

10. $9x^2+25y^2+z^2-30xy+6xz-10yz$

11. $a^2+b^2+c^2+d^2-2ab+2ac-2ad-2bc+2bd-2cd$

12. $a^2+4b^2+9c^2+d^2-4ab-6ac-2ad+12bc+4bd+6cd$

13. 1 14. 5 15. $a=5, b=3$ 16. 16.

প্রশ্নমালা 10

1. $9a^4b^4-1$ 2. x^8-y^8 3. $25a^4b^2c^2-a^2b^4c^2$

4. x^4+x^2+1 5. $25x^2+30x+9-4z^4$

6. $a^4-a^2b^2+2ab^3-b^4$ 7. $9x^4-12x^3y+4x^2y^2-y^4$
8. $x^2-2xy+y^2-z^2+2zw-w^2$ 9. 7944 10. 25575
11. 999996 12. $a^{16}-b^{16}$ 13. $1-x^{24}$
14. $2x^2y^2+2y^2z^2+2x^2z^2-x^4-y^4-z^4$ 15. $p^8+p^4q^4+q^8$.

প্রশ্নমালা 11

1. $8a^3+36a^2b+54ab^2+27b^3$ 2. $8a^3-36a^2b+54ab^2-27b^3$
3. $x^3y^3+3x^2y^2+3xy+1$ 4. $x^3y^3-3x^2y^2+3xy-1$
5. $x^3y^3+3x^3y^2+3x^3y+x^3$ 6. $x^3y^3-3x^2y^3+3xy^3-y^3$
7. $a^3b^3c^3-6a^3b^2c^2+12a^3bc-8a^3$
8. $8a^3b^3c^3+12a^3b^2c^2+6a^3bc+a^3$ 9. 54 10. 0
11. a^3-3a 12. 4 13. 7904
16. $x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3$ 17. $8y^3+24y^2z+24yz^2+8z^3$
18. $64x^3$ 19. 9 20. 0 21. -27 22. -118
23. -28 24. 1 25. 8
26. $a^3+b^3-c^3+3a^2b+3ab^2-3a^2c-6abc+3ac^2-3b^2c+3bc^2$
27. $a^3-b^3-c^3+3ab^2+3ac^2-3a^2b-3a^2c+6abc-3bc^2-3b^2c$
28. $27x^3+54x^2y+36xy^2+8y^3-27x^2z-36xyz-12y^2z$
$+9xz^2+6yz^2-z^3$.

প্রশ্নমালা 12

1. x^3-8 2. $1-8x^3$ 3. $27a^3-64b^3$ 4. $a^3b^3+8a^3$
5. $x^3y^3z^3-1$ 6. a^6-b^6 7. $64x^6-729y^6$
8. $64a^6-729b^6$ 9. -54 10. 16 11. 0.

বিবিধ প্রশ্ন (A)

1. (i) 12 (ii) $18xy$ (iii) $x-y$ (iv) $3pq$
2. 1, $6x$, 2 3. 51 এবং 364 4. $36y^2$, 36 5. $-8y^3$
6. (1) $2b^3+6a^2b$ (2) $2a^3+6ab^2$ (3) $4a^2b^2$ (4) $2a^4+2b^4$.

প্রশ্নমালা 13

x-এর মান প্রদত্ত হইল :

1. 0 2. $x=9$ 3. -25 4. $-\frac{4}{7}$ 5. $2\frac{1}{2}$
6. $-\frac{1}{2}$ 7. $-\frac{3}{4}$ 8. -3 9. $\frac{7}{2}$ 10. 0
11. $-\frac{20}{3}$ 12. 0 13. $-\frac{2}{3}$ 14. $-\frac{1}{13}$.

প্রশ্নমালা 14

1. $x+5$ 2. $x-5$ 3. $x-5$ 4. $y-x$ 5. $x-y$

6. $\frac{12}{x}$ 7. $12x$

8. যুগ্ম-সংখ্যা$=2x$, অযুগ্ম সংখ্যা$=2x-1$ বা $2x+1$

9. $x+1, x+2$ 10. প্রথমটি $x-1$, তৃতীয়টি $x+1$

11. $(4x+10)$ টাকা 12. $x-2, x+2$

13. প্রথমটি $x-2$, দ্বিতীয়টি $x-1$, চতুর্থটি $x+1$

14. $(192x+12y)$ পাই, $(200x+y)$ পয়সা

15. $\frac{ac}{b}$ টাকা 16. $\frac{22x}{15}$ ফুট 17. $\frac{c-a}{b}$ টাকা 18. $\frac{ax+by}{x+y}$ টাকা

19. $\frac{100y}{x}\%$ 20. বার্ষিক $\frac{100y}{xt}\%$ 21. $\frac{pqy}{xt}$ টাকা

22. $15x+y$ 23. $\frac{x-y}{18}$ 24. $x-5=7$ 25. $\frac{x}{3}+10=25$

26. $x+(x+5)=25$ 27. $2x+3=5x-3$ 28. $5x=2(34-x)$

29. $\left(\frac{a}{2}-5\right)$ টাকা 30. $\frac{ax+by+cz}{a+b+c}$ টাকা

31. $\frac{3+4x-6y}{2}$ সে. মি. 32. $2(ab+bc+ca)$ বর্গ সে. মিটার।

প্রশ্নমালা 15

1. 8 2. 36, 54 3. 95, 96, 97 4. 420 5. 31

6. 70 7. 216 8. 25, 18 9. 100, 80

10. 5 বৎসর 11. 45 ব., 15 ব. 12. 5 বৎসর 13. 20 ব., 30 ব.

14. 14 বৎসর 15. 38 ব., 16 ব. 16. 90, 6 17. 8টি

18. 30 কি. মি. 19. 51 টাকা 20. A 1440 টা., B 1080 টা.

21. A 82 টা., B 41 টা. 22. A 300 টা., B 597 টা., C 896 টা.

23. বালক 132 জন, বালিকা 73 জন

24. Aর বয়স 12 ব., Bর 30 ব., Cর 6 বৎসর

25. 131টি টাকা, 234টি 50 পয়সা মুদ্রা 26. 170 টা.

27. Aর 152 টা., Bর 233 টা. 28. 12 মিটার

29. পিতার 64 ব., পুত্রের 41 বৎসর 30. 52 31. 3 কি. গ্রা.

32. ঘণ্টায় 6 কি. মি. 33. 90 কি. মি.

34. Aর 72 ব., Bর 12 বৎসর 35. 12 মাইল।

প্রশ্নমালা 16

1. $xyz(x+z)$ 2. $6xy(6x-y)$ 3. $9y^3(5y-x)$
4. $5x^2y^2(x^2+2y^2)$ 5. $-py(p^2+y^2-1)$
6. $9a^2bc(ab-9b^2c+4c^2)$ 7. $17a^7b^5c^9(b^3+4b-5)$
8. $29xyz(x^3y^3z^3-2x^2y^2z^2-3xyz+1)$.

প্রশ্নমালা 17

1. $b(a-c)(x-y)$ 2. $(x+y+z)(a-c)$ 3. $(a+1)(b+1)$
4. $(x+a)(x+b)$ 5. $(a-b)(c-d)$ 6. $(x+5)(x^2+3)$
7. $(c-1)(ab-1)$ 8. $(b+1)(a-c)$ 9. $(a-c)(p-bq)$
10. $(a^2+b^2)(c^2+d^2)$ 11. $(x-a)(x-b)$ 12. $(x-b)(x+a)$
13. $x(a+b+c)$ 14. $(a+b+c)(x+y+z)$.

প্রশ্নমালা 18

1. $c(ab+c)(ab-c)$ 2. $7(3xy+1)(3xy-1)$
3. $p^2q^2(9+pq)(9-pq)$ 4. $(abc+1)(abc-1)$
5. $(2x+3y+4)(2x+3y-4)$ 6. $(3p-2q+r)(3p-2q-r)$
7. $(x+y+z)(x-y-z)$ 8. $(5x-3y)(x+3y)$
9. $(x+z)(x-2y+z)$ 10. $(r-p)(5p-6q+r)$
11. $(3p+5q-2r)(3p-q+2r)$
12. $(a+b+c-d)(a+b-c+d)$ 13. $4c(a-b)$
14. $(2x+y+z)(2x+y-z)$ 15. $(a+b-c)(a-b+c)$
16. $(3x-y+z)(3x-y-z)$ 17. $(5a-b+c)(5a-b-c)$
18. $(3a+2b-5c)(3a-8b+5c)$ 19. $(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$
20. $(x^4+y^4)(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$.

প্রশ্নমালা 19

1. $(a^2+2a+2)(a^2-2a+2)$ 2. $(2x^2+6x+9)(2x^2-6x+9)$
3. $(9x^2+12xy+8y^2)(9x^2-12xy+8y^2)$
4. $9(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$ 5. $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$
6. $(a^2+ay+y^2)(a^2-ay+y^2)$
7. $(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)$
8. $(x^2+2x-1)(x^2-2x-1)$
9. $(a^2+ax+x^2)(a^2-ax+x^2)(a^4-a^2x^2+x^4)$
10. $(p^2+2p+3)(p^2-2p+3)$ 11. $(x^2+5xy+y^2)(x^2-5xy+y^2)$

12. $(2x^2y^2+2xy-3)(2x^2y^2-2xy-3)$
13. $(2x^2+10x+25)(2x^2-10x+25)$
14. $(3y^2+3y-4)(3y^2-3y-4)$ 15. $(3a^2+5a+4)(3a^2-5a+4)$
16. $(2x^2+3x+5)(2x^2-3x+5)$ 17. $(2x^2+2x-5)(2x^2-2x-5)$
18. $(2x^2+6x+5)(2x^2-6x+5)$ 19. $(2a^2+2a+1)(2a^2-2a+1)$
20. $(x^2+4x+12)(x^2-4x+12)$
21. $\{(a+b)^2+2(a+b)+2\}\{(a+b)^2-2(a+b)+2\}$
22. $(x-z)(x-2y+z)$ 23. $(2a+3b+c)(2a-3b-c)$
24. $(6x-y+z)(6x-y-z)$
25. $(2p+3q+5r+1)(2p+3q-5r-1)$
26. $(4x+4y-3z-3)(4x-4y+3z-3)$
27. $(c+d+a-b)(c+d-a+b)$ 28. $(2x+y-z)(2x-3y+z)$
29. $(2a+c)(2a-2b-c)$ 30. $(3a-b-c)(a-b+c)$.

প্রশ্নমালা 20

1. $(x+5)(x-4)$ 2. $(x-2)(x-10)$ 3. $(x-10)(x+2)$
4. $(x-20)(x+1)$ 5. $(1-9x)(1+4x)$ 6. $(1+9x)(1-4x)$
7. $(x-6)^2$ 8. $(x-18)(x+2)$ 9. $(x-9)(x+8)$
10. $(x-27)(x+3)$ 11. $(x-13)(x-7)$ 12. $(a-18)(a+5)$
13. $(x-12)(x+11)$ 14. $(x-16)(x+9)$ 15. $(x-13)(x+12)$
16. $(x-21)(x+20)$ 17. $(x-13y)(x+3y)$
18. $(ab-14c)(ab+13c)$ 19. $(a+1)(a-1)(a^2+5)$
20. $(x+1)(x-1)(x^2+3)$ 21. $(x^2-2)(x^2-8)$
22. $(x^3-3)(x^3-4)$ 23. $(a^3-12)(a^3+5)$
24. $(a^3b^3-3)(a^3b^3+2)$ 25. $(a^4+1)(a^4-2)$
26. $(a+b+2)(a+b-6)$ 27. $(1-5a+5b)(1+3a-3b)$
28. $2(3y-2x)(3x-y)$ 29. $(x+6y+6z)(x-11y-11z)$
30. $-4a(2a+9b)$ 31. $(x-1)(x+3)(x^2+2x+15)$
32. $(x^2-3x+1)(x^2-3x-2)$ 33. $(x+a+2)(x-a-1)$
34. $(x-a+b)(x-a-b)$
35. $(x+a^2+b^2+2ab)(x+a^2+b^2-2ab)$
36. $(x-a-3b)(x+a+2b)$ 37. $(x-a)(x-\frac{1}{a})$
38. $(a+b-3)(a+b-2)$.

প্রশ্নমালা 21

1. $(a+2)(4a+3)$ 2. $2(a+1)(2a-3)$ 3. $2(a-3)(2a+1)$
4. $(x-1)(5x+4)$ 5. $(4x-5)(x+1)$ 6. $(4p-7)(2p+1)$

7. $(p-1)(7p-8)$ 8. $(p+1)(7p-8)$ 9. $(1-a)(3-10a)$
10. $(1-2a)(3+5a)$ 11. $(3l-4m)(14l+5m)$
12. $(2x-y)(9x+20y)$ 13. $(2x-1)(2x-3)(x^2-2x+2)$
14. $(x^2-3x+4)(5x^2-15x-1)$
15. $(x-1)(2x+1)(10x^2-5x+4)$ 16. $4(3a-2b)(4b-a)$
17. $2b^2(15b^2-a^2)$ 18. $(x+a)(ax+1)$
19. $2(5a-2b)(5b-a)$ 20. $(x-y)\{(a-b)^2x+(a+b)^2y\}$.

প্রশ্নমালা 22

1. $(2x+3)(4x^2-6x+9)$ 2. $(2a-3)(4a^2+6a+9)$
3. $(x+1)(x^2-x+1)$ 4. $(x+4y)(x^2-4xy+16y^2)$
5. $(a-2b)(a^2+2ab+4b^2)$ 6. $3(3x-2y)(9x^2+6xy+4y^2)$
7. $(ab-xy)(a^2b^2+abxy+x^2y^2)$
8. $(4p-5q)(16p^2+20pq+25q^2)$ 9. $x(x-1)(x^2+x+1)$
10. $4(x+3y)(x^2-3xy+9y^2)$ 11. $(4x-y^2)(16x^2+4xy^2+y^4)$
12. $(x-y-z)(x^2+y^2-2xy+xz-yz+z^2)$ 13. $2a(a^2+3)$
14. $(3x+2y)(3x^2+13y^2+9xy)$
15. $(a+b)(a-b)(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)$
16. $(x-2y+2z)(x^2+2xy-2xz+4y^2+4z^2-8yz)$
17. $(x+3)(x^2+3x+3)$ 18. $(3a+2)(21a^2-12a+4)$
19. $(a-b)(2a^2+5ab+8b^2)$ 20. $(2x+1)(2x-1)^2$.

প্রশ্নমালা 23

1. $(x-a)(x-b)$ 2. $(a+b)(a+c)$ 3. $(a-b)(abc-1)$
4. $(x-c)(1+b)$ 5. $(a-c)(x+by)$ 6. $(x^2-2x+2)^2$
7. $(1-x)(1-x-a)$ 8. $(1-y+z)(1-y-z)$
9. $(1+ax+x)(1+ax-x)$ 10. $(x^2+x-3)(x^2-x-3)$
11. $(x^2+axy-y^2)(x^2-axy-y^2)$
12. $2(x+a)(x-a)(x^4+4a^4-2x^2a^2)$
13. $(a-1)(a^2x+ax+x+1)$ 14. $(x-y)(x+y+a)$
15. $4(ax+by)(bx+ay)$ 16. $(a+b)(a-b)(c+d)(c-d)$
17. $(x-a-3b)(x+a+2b)$
18. $(a+2)(a-2)(a^2+2)(a^2-2)(a^2+4)$ 19. $-(x+6)(5x+8)$
20. $(a-b)^3$ 21. $a^3(5a+3b)(13a^2+30ab+21b^2)$

22. $(a+b)(a-b)(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)(a^2+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4)$

23. $(x+y)(2x^2-5xy+8y^2)$ 24. $(a+3)(a^2+9)$

25. $(a+b)(a+b+1)$ 26. $(a+b)(a+b+3)$

27. $(x+y)(x-y+3)$ 28. $(x+y)(x^2+y^2+2xy+x+y+1)$.

প্রশ্নমালা 24

1. $3a^2b^3c^2$ 2. $a^2(b+c)$ 3. $(a+b)^2(c+d)^2$ 4. $a-b$

5. $(a-b)(b-c)$ 6. a^2-b^2 7. $x-y$ 8. $3(x+y)$

9. $x-y$ 10. $x-1$ 11. $x-y$ 12. $x+1$

13. $x(x+2)$ 14. $a+b-c$.

প্রশ্নমালা 25

1. $24a^2bc^2$ 2. $60a^2c^2(a-c)^2$

3. $(a+b)^2(a-b)^2(a^2-ab+b^2)$

4. $(x+y)(x^2+y^2)(x-y)^2(x^3-y^3)$

5. $(x+y)(y+z)(z+x)$ 6. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$

7. $(a-x)(b^2-y^2)$ 8. $(x^6-y^6)(x^4-x^2y^2+y^4)$

9. $(a+2)(a+1)(a^3-1)$ 10. $(a^2-b^2)(3a-2b)(a^2+ab+b^2)$

11. $(x+a)(x^2-b^2)$ 12. $(a+b+c)(a-b-c)(b-a-c)$

13. x^6-y^6 14. $(a-1)(2a-3)(2a+1)(3a+2)$

15. $120xy(x^2-y^2)$ 16. $x^2(x-1)(x^2-4)(x+3)$

17. $(x-3)(x^2+1)(x^2+5)$ 18. $(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)^2$.

প্রশ্নমালা 26

1. $2x+3$ 2. $x-3$ 3. $3x+1$ 4. $2x^2+7x+3$

5. $x+5$ 6. $x-2$ 7. $x+1$ 8. x^3+3x+5

9. x^2+4x+3 10. $a-2b$ 11. x^2-3x-4

12. $x+2$ 13. x^2-3x+4 14. x^3-2x-1

15. $x+3$ 16. $x+5$ 17. $x-1$ 18. $x(x^2-2x-1)$

19. a^2+3a+1 20. x^2+x-2 21. $x-2$

22. x^2+2x+3 23. $3x-7$ 24. $x-1$

25. $a-1$ 26. x^2-x+1 27. $2x(x-2)$.

প্রশ্নমালা 27

1. $(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$ 2. $(x+1)(x-1)(2x+1)$

3. $(x-a)(x+c)(x-c)$ 4. $(x-1)(x-2)(x-3)$

5. $(a+2)(a+3)(a+4)(a^2+a+1)$
6. $(x+1)(x-1)(x-5)(x-7)$ 7. $x^2(x-2)(x-1)(x+2)(x+3)$
8. $(a+1)(a-1)^2(a-2)(a^2+1)$
9. $(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)^2$
10. $(2x+3)(4x^2-6x+9)(4x^2+6x+9)(7x^2-5x-6)$
11. $36(x^2-1)(x^2-4)(x^2-9)$ 12. $(x+2)(2x-1)(3x+1)$
13. $x^2(x+2)(x-2)(x+4)$ 14. $(x-2)(x^2+2)(x^2+x+1)$
15. x^2+4x+3 17. x^2-1 এবং x^2+2x-3.

প্রশ্নমালা 28

1. $\frac{2d^2}{3a^2}$ 2. $\frac{x+y}{x^2+xy+y^2}$ 3. $\frac{a-b}{a+b}$ 4. $\frac{(a-b)^2}{a+b}$

5. $a-b$ 6. $\frac{a^2-ab+b^2}{a+b}$ 7. $a+b$ 8. $-(3x+2y)$

9. $1+2x$ 10. $\frac{2x^2}{x-1}$ 11. $\frac{5ax^2}{x+1}$ 12. $\frac{a-2}{a(a-3)}$

13. $\frac{x+3y}{x-4y}$ 14. a^2-ab+b^2 15. $\frac{x^2+xy+y^2}{x+y}$

16. $\frac{x-1}{x+1}$ 17. $\frac{a-1}{a+1}$ 18. $\frac{1}{x+y}$

19. $\frac{x-y-z}{x+y-z}$ 20. $\frac{1}{a^2-b^2}$.

প্রশ্নমালা 29

1. $\frac{3x^2z}{6xyz}, \frac{3xy^2}{6xyz}, \frac{2yz^2}{6xyz}$ 2. $\frac{axy}{abc}, \frac{byz}{abc}, \frac{czx}{abc}$

3. $\frac{bcx}{a^2b^2c^2}, \frac{acy}{a^2b^2c^2}, \frac{abz}{a^2b^2c^2}$

4. $\frac{x(x+z)}{(y+z)(x+z)}, \frac{y(y+z)}{(y+z)(x+z)}, \frac{z(y+z)(x+z)}{(y+z)(x+z)}$

5. $\frac{x^3z}{xyz(x+y)}, \frac{y^3x}{xyz(x+y)}, \frac{z^3y}{xyz(x+y)}$

6. $\frac{x(z+x)}{xyz(z^2-x^2)}, \frac{y(z-x)}{xyz(z^2-x^2)}, \frac{z}{xyz(z^2-x^2)}$

7. $\frac{(a+b)^2}{a^2-b^2}, \frac{(a-b)^2}{a^2-b^2}, \frac{c}{a^2-b^2}$

8. $\frac{a-b}{a^2-b^2}, \frac{a+b}{a^2-b^2}, \frac{a^2(a-b)}{a^2-b^2}$

9. $\frac{x-1}{(x-1)(x-2)(x-3)}, \frac{x-2}{(x-1)(x-2)(x-3)}, \frac{x-3}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

10. $\frac{a(a-b)}{-(a-b)(b-c)(c-a)}, \frac{b(b-c)}{-(a-b)(b-c)(c-a)}, \frac{c(c-a)}{-(a-b)(b-c)(c-a)}$

11. $\frac{b(a+b)}{ab(a^2-b^2)}, \frac{a(a-b)}{ab(a^2-b^2)}, \frac{1}{ab(a^2-b^2)}$

12. $\frac{c(a-b)}{abc(a-b)(b-c)(c-a)}, \frac{a(c-a)}{abc(a-b)(b-c)(c-a)}, \frac{b(b-c)}{abc(a-b)(b-c)(c-a)}.$

প্রশ্নমালা 30

1. $\frac{3a-14b}{a^2-4b^2}$ 2. $\frac{2a-1}{a^2-9}$ 3. $\frac{x^2+4y^2}{(x-2y)^2(x+2y)}$

4. $\frac{7}{(a-2)(a-3)(a+5)}$ 5. $\frac{10a^2+a+7}{3(2a+1)}$ 6. 1

7. $\frac{1}{2a+1}$ 8. 0 9. 0 10. 1 11. $\frac{x-4y}{x-2y}$

12. $\frac{1}{1-x}$ 13. 0 14. $\frac{16x^{15}}{x^{16}-1}$ 15. $\frac{1}{1+x^2+x^4}$

16. 0 17. 0 18. $\frac{x^2y+xy^2-1}{xy(x+y)}$ 19. 0

20. 1 21. 1 22. $\frac{1}{6}$.

প্রশ্নমালা 31

1. $\frac{p^3q^3r^3}{6xyz}$ 2. 1 3. $\frac{p^3}{18q^2m^2}$ 4. $\frac{3(a-4)}{a+4}$

5. $\frac{3x-1}{3}$ 6. $\frac{3a+1}{3a-1}$ 7. $\frac{a+2}{a}$ 8. $\frac{a^2-b^2}{a}$

9. $\frac{1-y}{x}$ 10. $\frac{x^2+y^2}{x}$ 11. $\frac{x-y}{x+2y}$ 12. $\frac{1}{x^2+y^2}$

13. $\frac{x^2+y^2}{2xy}$ 14. $\frac{3}{x^2+y^2}$ 15. 4 16. a

17. $\frac{a+1}{a-1}$ 18. $\frac{x+1}{x-1}$ 19. $\frac{1}{(1+x)^2}$ 20. $\frac{y+z-x}{x+y+z}$

21. $\frac{y(x-y)}{x(x+y)}$ 22. 2 23. $\frac{xy}{x^2+y^2}$ 24. $\frac{x}{b}$

25. x^2 26. 1 27. $\frac{a(a-b+c)}{c(a+b+c)}$. 28. $\frac{3a-2b}{3a+2b}$

29. $\frac{a-b}{a+b}$ 30. 1 31. a^3 32. $\frac{2a^2}{a^2+b^2}$.

প্রশ্নমালা 32

1. $\frac{2x+1}{3x+2}$ 2. $\frac{a^3}{a^4-a^2-1}$ 3. $\frac{x-1}{x}$ 4. $\frac{(a+b+c)^2}{2bc}$

5. x 6. x 7. 0 8. 1 9. 0

10. 0 11. $a+b+c$ 12. -1 13. $ab+bc+ca$

14. 0 15. $\frac{1}{abc}$ 16. 0 17. 0 18. 0

19. 0 20. 1 21. 0 22. 1 23. 3

24. $a+b+c$ 25. $2(x^2+y^2+z^2)$ 26. $\frac{1}{abc}$

27. 1 28. x.

প্রশ্নমালা 33

1. $x^3+3x^2-4x-12$ 2. $x^3-109x+420$

3. $a^3-111a-110$ 4. $a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc$

5. $a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc$

6. $4a^2+9b^2+9c^2+12ab-12ac-18bc$

7. $a^2+4b^2+9c^2+4ab+6ac+12bc$

8. $a^2+b^2+c^2+d^2+2ab-2ac+2ad-2bc+2bd-2cd$

9. $a^2+b^2+c^2+d^2-2ab-2ac-2ad+2bc+2bd+2cd$

10. $a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd$

11. 121 12. 25 13. 24 14. 5 15. 1 16. 11
17. $a^2=b^2+2c^2$ 18. 3 21. 3 23. 1000
25. 16 26. $7y^2$ 27. 0 28. 8.

প্রশ্নমালা 34

1. 0 2. 0 3. abc 4. 0 5. 3 6. 0.

প্রশ্নমালা 35

1. 0 2. 0 3. 0 4. 0 5. 0
6. $-(a-b)(b-c)(c-a)$ 7. $-x(a-b)(b-c)(c-a)$
8. $-(a-b)(b-c)(c-a)$ 9. $(a-b)(b-c)(c-a)$.

প্রশ্নমালা 36

1. $2x^2y+x^2z+4y^2z+4xy^2+xz^2+2yz^2+4xyz$
2. $2a^2b+3a^2c+12b^2c+4ab^2+9ac^2+18bc^2+12abc$
3. $x^2y+x^2z+y^2z-xy^2-xz^2+yz^2-2xyz$ 4. 0
5. $4abc$ 6. $4xyz$ 7. $(a+b)(b+c)(c+a)$.

প্রশ্নমালা 37

1. $-x^2y-x^2z-y^2z+y^2x+z^2x-z^2y+3xyz$
2. $x^2y^3z+x^3y^2z+xy^2z^3+xy^3z^2+x^3yz^2+x^2yz^3+3x^2y^2z^2$
3. $p^4q^2+p^4r^2+q^4r^2+q^4p^2+r^4p^2+r^4q^2+3p^2q^2r^2$
4. $-12a^2b-4a^2c-9b^2c+18ab^2+2ac^2-3bc^2+18abc$
5. $8abc$ 6. $-3(b+c)(c+a)(a+b)$.

প্রশ্নমালা 38

1. $x^3-y^3-z^3-3xyz$ 2. $8x^3-27y^3+1+18xy$
3. $a^3-8b^3-c^3-6abc$ 4. $8x^3-27y^3-8-36xy$
5. $b^3c^3+c^3a^3+a^3b^3-3a^2b^2c^2$ 6. $p^6-q^6+r^6+3p^2q^2r^2$
7. 603 8. 0 9. 2034 10. $\frac{1}{2}(3pq^2-p^3)+3r^3$
11. 0 12. 0 13. 0
16. $(x+y-z)(x^2+y^2+z^2-xy+xz+yz)$

17. $(2a-b+3c)(4a^2+b^2+9c^2+2ab-6ac+3bc)$

18. $(3a-2b-1)(9a^2+4b^2+1+6ab+3a-2b)$.

প্রশ্নমালা 39

5. $3(2x+y-z)(2y+z-x)(2z+x-y)$

6. $3(a+b-2c)(b+c-a)(c+2a-2b)$ 9. 495.

প্রশ্নমালা 40

1. $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

2. $a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5$

3. $a^8+8a^7+28a^6+56a^5+70a^4+56a^3+28a^2+8a+1$

4. $a^6-12a^5b+60a^4b^2-160a^3b^3+240a^2b^4-192ab^5+64b^6$

5. $16x^4+32x^3+24x^2+8x+1$

6. $x^7-14x^6+84x^5-280x^4+560x^3-672x^2+448x-128$

7. $2a^4+12a^2b^2+2b^4$ 8. $10a^4b+20a^2b^3+2b^5$.

প্রশ্নমালা 41

1. $(a-b-c)(a^2+b^2+c^2+ab+ac-bc)$

2. $(2x-y+1)(4x^2+y^2+1+2xy-2x+y)$

3. $(x+2y-1)(x^2+4y^2+1-2xy+x+2y)$

4. $(2a-3b-1)(4a^2+9b^2+1+6ab+2a-3b)$

5. $(a^2-a+2)(a^4+a^3-a^2+2a+4)$

6. $(2a^2+a-1)(4a^4-2a^3+3a^2+a+1)$

7. $2(c-b)(3a^2+b^2+c^2-3ab-3ac+bc)$

8. $(1+2x-3y)(1+4x^2+9y^2-2x+3y+6xy)$

9. $3(x-y)(y-z)(z-x)$ 10. $3(x+y)(x-2y)(2x-y)$.

প্রশ্নমালা 42

1. $(a-b)(b-c)(c-a)$

2. $-(a-b)(b-c)(c-a)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)$

3. $-(a-b)(b-c)(c-a)$ 4. $-p(a-b)(b-c)(c-a)$

5. $-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b)(b+c)(c+a)$

6. $(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$ 7. $(a+b)(b+c)(c+a)$

8. $(x+y)(y+z)(z+x)$ 9. $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$

10. $-(a-b)(b-c)(c-a)(a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc)$

11. $-(a-b)(b-c)(c-a)(ab+ac+bc)$

12. $-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b)(b+c)(c+a)$

13. $-2(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

14. $-4(a-b)(b-c)(c-a)$ 15. $(ab+bc+ca)(a+b+c+1)$

16. $-(x-y)(y-z)(z-x)$ 17. $(x^2+y^2+z^2)(xy+yz+zx)$

18. $-(a-b)(b-c)(c-a)$

19. $(a+b+c)(2ab+2bc+2ca-a^2-b^2-c^2)$

20. $(x+y+z+xyz)(xy+yz+zx+1)$ 21. $(x-b)(x-c)(b-c)$.

প্রশ্নমালা 43

1. $(8x+27y)(8x-9y)$ 2. $(9x-16y)(16x-9y)$

3. $(a+2b-1)(2a-3b-2)$ 4. $(2a-7b-3)(2a+5b-4)$

5. $(x+2y-2)(2x-3y-1)$ 6. $(3x-5y-5)(5x+3y-4)$

7. $(a-2b-2)(2a+3b+1)$ 8. $(a+5b-2c)(6a+b-5c)$

9. $(x-3z)(x+4y+2z)$ 10. $(p-2q-2r)(p-q+2r)$

11. $(a-3b)(a-b+c)$ 12. $(x+4a)(2x+4b-3a)$

13. $(2a+3b+c)(a-b-c)$ 14. $(2a-7b)(8a+3b-1)$

15. $(4x+9)(3px-p+8)$.

প্রশ্নমালা 44

1. $(x+1)(x^2+1)$ 2. $(x-1)(x^2+1)$ 3. $(x-1)(x^2+6x+4)$

4. $(x+1)(x^2+6x+1)$ 5. $(x+1)(x^2+3x+8)$

6. $(2x+3)(x^2-x-3)$ 7. $(x-1)(x^2+x-4)$

8. $(a+1)(3a^2-3a+5)$ 9. $(x+1)(x+2)(x^2-2x+2)$

10. $(x-2)(2x+1)(x^2+1)$ 11. $(a+1)(5a^2+6a-2)$

12. $(a-1)(a^2+a-5)$ 13. $(3+x)(2+x)(2-x)$

14. $(a+5)(4a-1)(a^2-2a-1)$.

প্রশ্নমালা 45

1. $(a+1)^2(a^2-6a+1)$ 2. $(x+1)^2(x^2+3x+1)$

3. $(a^2-a-1)(4a^2-3a-4)$ 4. $(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

5. $(x+1)(x+2)(x^2+x+2)$ 6. $(x-1)^2(2x^2+3x+2)$

7. $(x^2-4x+1)(x^2-6x+1)$ 8. $(x^2+6x+1)(x^2-11x+1)$

9. $(a^2+3a-2)(a^2+3a-3)$ 10. $(x^2+1)(x^2+x+1)$.

প্রশ্নমালা 46

1. $(x-2)(x+3)(x+6)$ 2. $(a+6)(a^2-2a+12)$
3. $(2a-1)(a^2-a+1)$ 4. $(x+2)(x-3)(x^2+x+7)$
5. $(x+2)(x^2+3x+4)$ 6. $(x+1)(x-2)(3x^2-2x+4)$
7. $(a+b-1)(a^2+b^2+2ab+a+b+2)$
8. $(x+1)(x+2)(x^2+3x-3)$ 9. $(x+2)(x+7)(x^2+9x+4)$
10. $(x^2-3x-6)(x^2-3x-16)$ 11. $(x+3)(x+4)(x^2+7x-2)$
12. $(a^2+3a+5)(a^2+3a-3)$ 13. $(x-2)(3x+4)(3x^2-2x-6)$
14. $(xy+x-y+1)(xy-x+y+1)$ 15. $(2x+a)^2(x-4a)$
16. $(ax+ay+bx-by)(ax+ay-bx+by)$
17. $(x-a)(2x^2+5ax+8a^2)$ 18. $(ax-c)(x^2-ax+b)$
19. $2(x-y)(1-xy)$
20. $(x+1)(x-1)(y+1)(y-1)(x^2+1)(y^2+1)$
21. $(x+2a-2b)(x+a-b)$ 22. $(x^2-3x+5)(x^2-3x+1)$
23. $(a-b)(b-c)(a-c)$ 24. $(x^2-2x-4)(x^2-2x-1)$
25. $(x^2-3x+4)(x^2-2x+4)$ 26. $(a-b-c)(a+b+c+1)$
27. $(a-1)^2(2a^2-a+2)$.

প্রশ্নমালা 47

xএর মান দেওয়া হইল :—

1. -1	2. 0	3. 1	4. $-\frac{5}{6}$	5. -7
6. $a+b+c$	7. $-\frac{a^2+b^2}{2a}$	8. $\frac{b^2}{a-c}$	9. $\frac{1}{ab}$	
10. 17	11. -7	12. 5	13. $-\frac{3}{4}$	
14. -9	15. a	16. 8	17. $\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}$	
18. 6	19. 1	20. $\frac{ab+bc+ca}{3abc}$	21. 0	
22. $a-b$	23. $a+b$	24. $\frac{ab}{a-b}$	25. $\frac{3ac-b}{a-3b-c}$.	

প্রশ্নমালা 48

1. 1	2. ·5	3. 11	4. 7	5. 4	6. 19
7. $5\cdot 1\dot{6}$	8. ·6	9. $3\cdot\dot{3}$	10. 5.		

প্রশ্নমালা 49

1. -14 2. $2\frac{1}{2}$ 3. 0 4. $\dfrac{b^2-ac}{a^2+c^2-ab-bc}$

5. $-\frac{12}{29}$ 6. $\dfrac{ab}{a^2-b^2}$ 7. $a-2b$ 8. $\frac{5}{3}$ 9. 2

10. $\frac{1}{4}$ 11. 6 12. 7 13. $2\frac{3}{5}$ 14. $-1\frac{2}{5}$

15. $-8\frac{2}{3}$ 16. $\frac{31}{47}$ 17. $3a$ 18. -6 19. 5

20. 6 21. $4\frac{1}{2}$ 22. $\frac{7}{12}$ 23. $-\frac{1}{2}(a+b)$

24. $\dfrac{a+b}{2}$ 25. $a+b$ 26. $ab+bc+ca$ 27. $a+b+c+abc$

28. $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$ 29. $-(a+b+c)$ 30. $(a+b+c)^2$

31. $a^3+b^3+c^3$ 32. $-(a+b+c)$ 33. $-(a^2+b^2+c^2)$

34. $a^3+b^3+c^3$ 35. 13 36. $-5\frac{1}{2}$ 37. $3\frac{1}{3}$

38. $-\frac{1}{2}$ 39. $-2\frac{1}{2}$ 40. $5\frac{1}{2}$ 41. 9

42. $\dfrac{a}{3}$, বা, $3a$ 43. $-\frac{1}{2}(a+b)$ 44. -7 45. $\dfrac{b}{a}(a-b+c)$.

প্রশ্নমালা 50

1. 672 বর্গ সে. মি. 2. 44, 45 3. $\frac{3125}{256}$ 4. $\frac{15}{30}$ 5. $\frac{17}{21}$

6. 72 7. টাকা 189টি, 50 পয়সা মুদ্রা 352 টি 8. 2 শি. 6 পে.

9. 960 টা. 10. প্রথম দরে 150টি, দ্বিতীয় দরে 120 টি

11. $\frac{4}{7}$ 12. $12\frac{1}{2}$ 13. 1 14. 42, 47, 11, 220

15. 37, 52, 4, 528 16. 73 17. 25 18. 20 জন

19. 22 দিন 20. 60 বৎসর 21. 24 ব. 22. 25 ব.

23. 1830 টা. 24. পিতার 40 বৎসর, বড় ছেলের 10 বৎসর, ছোট ছেলের 8 বৎসর 25. 240 টি।

প্রশ্নমালা 51

1. 2টা বাজিয়া $10\frac{10}{11}$ মিনিটে 2. 5টা $10\frac{10}{11}$ মিনিটে ও 5টা $43\frac{7}{11}$ মিনিটে

3. (1) 2টা $43\frac{7}{11}$ মি. (2) 2টা $27\frac{3}{11}$ মি. (3) 2টা 24 মি.

4. 5টা $16\frac{4}{11}$ মি. ও 5টা $38\frac{2}{11}$ মি. 5. 1টা $21\frac{9}{11}$ মি. ও 1টা $54\frac{6}{11}$ মি.

6. 5টা $32\frac{4}{13}$ মি. 7. 100 জন 8. 7 জন 9. 1200 10. 530

11. 2250 12. 600 জন 13. ঘণ্টায় 2 কি. মি. ও 4 কি. মি.

14. 35 মা., 45 মাইল 15. 1215, 15.

প্রশ্নমালা 52

প্রথমটি x-এর এবং দ্বিতীয়টি y-এর মান দেওয়া হইল।

1. 4, 1 2. 2, 1 3. 2, 1 4. 14, −12
5. −3, 2 6. 4, −3 7. 4, −1 8. 1, 1
9. 12, 4 10. 22, −16 11. −2, 3 12. 16, 4
13. $\frac{32}{15}, \frac{4}{3}$ 14. $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ 15. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ 16. 3, −4
17. $13\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}$.

প্রশ্নমালা 53

প্রথমটি x-এর এবং দ্বিতীয়টি y-এর মান :

1. 2, 3 2. −3, 5 3. −2, −3 4. $1\frac{1}{3}, 3\frac{1}{2}$
5. $1\frac{1}{4}, 2\frac{1}{3}$ 6. $\frac{8}{3}, -\frac{8}{9}$ 7. 16, −4 8. $\frac{1}{3}, -\frac{1}{5}$
9. 35, 7 10. $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ 11. 3, 1 12. 7, 9.

প্রশ্নমালা 54

প্রথমটি x-এর, দ্বিতীয়টি y-এর মান :

1. 6, 1 2. 2, 4 3. 4, −1 4. 2, 1 5. 3, 2
6. $2, -\frac{1}{4}$ 7. $\frac{1}{4}, -4$ 8. 6, 2
9. 5, 9 10. $-\frac{4}{5}, \frac{1}{3}$ 11. $-\frac{2}{3}, \frac{5}{2}$ 12. $\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}$
13. 4, 9 14. 10, 4.

প্রশ্নমালা 55

পর পর x ও y-এর মান দেওয়া হইল :

1. 5, 2 2. 1, 2 3. 5, 4 4. a, b
5. $a+b, b-a$ 6. $\frac{c^2-bc^2}{a^2-ab}, \frac{ac^2-c^2}{ab-b^2}$ 7. $\frac{b^2}{2a}, \frac{2a^2+b^2}{2a}$
8. $a, b,$ 9. a, b 10. a^2, b^2 11. $\frac{1}{a}, b$ 12. a, b
13. $-\frac{1}{2}, \frac{1}{7}$ 14. $2, \frac{2}{3}$ 15. $a+b, a-b$ 16. $a+b, a-b$
17. 2, 1 18. $\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{b}{a^2+b^2}$
19. $\frac{ac-b-bc}{a^2-b^2}, \frac{a+ac-bc}{a^2-b^2}$ 20. $a+b, -\frac{2ab}{a+b}$.

প্রশ্নমালা 56

1. 28, 24 2. 45, 36 3. 52, 28 4. 36, 24
5. 10, 6 6. $\frac{4}{5}$ 7. $\frac{7}{9}$ 8. $\frac{15}{26}$
9. $\frac{9}{13}$ 10. 36 11. 27 12. 54
13. 28 অথবা 82 14. $x=15, y=105$
15. $x=45, y=46$ 16. Aর 36 ব., Bর 43 ব.
17. পিতার 43 ব., পুত্রদ্বয়ের 8 ব. ও 6 ব. 18. 68 ব., 32 ব.
19. 38 ব., 10 ব. 20. 57 টা.
21. 470 টা. 22. 31 টা. 23. 10 দিন
24. ঘণ্টায় $4\frac{1}{2}$ কি. মি. ও $3\frac{3}{4}$ কি. মি.
25. ঘণ্টায় স্রোতের বেগ 3 কি. মি. এবং নৌকার বেগ 8 কি. মি.
26. ঘণ্টায় 3 মাইল 27. 3, 3 28. 17ই., 9ই.
29. ঘণ্টায় A-র 6 মা. ও B-র 4 মা. 30. $1\frac{1}{3}$ টাকা
31. 17 ফুট, 13 ফুট 32. ঘণ্টায় 2 কি. মি.
34. A-র 36 ব., B-র 27 ব.
35. 3টা $21\frac{57}{143}$ মিনিটে বাহির হন, 4টা $16\frac{112}{143}$ মিনিটে ফিরিয়া আসেন
36. 5 : 9 37. $a=2$ $b=-9$.

প্রশ্নমালা 57

3. 48 দৈর্ঘ্য একক 4. $-1\cdot5$ একক।

প্রশ্নমালা 58

13. $x=0, y=7$, 14. 5, $-3\cdot5$ 15. 1, 1
16. 3, 4 17. 2, 4 18. 0, 5 19. 7, 1.

প্রশ্নমালা 59

1. 5 : 12 2. 16 : 175 3. $x^3 : y^3$
4. 1 : 3 5. $\frac{10}{19}$ 6. $\frac{7}{5}$ 7. 4 : 5
8. 9 : 4 9. 4 : 11 10. $1\frac{3}{5}$
11. $1\frac{1}{2}$ 12. $\frac{2ad-3bc}{c-d}$ 13. 3
14. $\frac{ad-bc}{a-b}$ 15. 33, 39 16. 12, 20
17. 7 : 11 18. 9 : 14 19. $\pm\sqrt{ab}$.

প্রশ্নমালা 60

1. 15 2. 18 3. ± 9 ; $\pm \frac{1}{4}$ 4. $\pm(a^2-b^2)$

5. x^3+y^3 6. 3 7. 2 8. $\dfrac{ad-bc}{a-b-c+d}$ 48. $\dfrac{4a}{a^2+4}$.

প্রশ্নমালা 61

1. ± 5 2. ± 1 3. ± 5 4. ± 25

5. $\pm a$ 6. $\pm\sqrt{2}$ 7. ± 2 8. ± 1

9. $\frac{4}{3}, -\frac{5}{14}$ 10. $3, \frac{1}{3}$ 11. $14, 2\frac{1}{4}$

12. ± 3 13. a, b 14. $\frac{5}{2}, -\frac{2}{3}$

15. $7, -4\frac{9}{17}$ 16. $9\frac{15}{17}, -11$ 17. $5\frac{2}{3}, 9\frac{1}{2}$

18. $3, 23$ 19. $2, -\frac{9}{2}$ 20. $\pm\sqrt{3}$ 21. $12, \frac{3}{4}$

22. $3\pm\sqrt{7}$ 23. $-3, 2$ 24. a, b 25. $\sqrt{13}\pm 3$

26. $6, 9$ 27. $4, -2\frac{1}{4}$ 28. $2\frac{32}{33}$ বা $4\frac{1}{33}$ 29. $5\pm\sqrt{17}$

30. $3, -\frac{68}{9}$ 31. $9, \frac{15}{13}$ 32. $6, \frac{1}{6}$ 33. $-4, 2$

34. $5, \frac{6}{5}$ 35. $0, -7$ 36. $0, 2\frac{1}{4}$ 37. $-2a, -3a$

38. $\dfrac{3\pm\sqrt{10}}{2}$ 39. $1, \frac{1}{3}$

40. $\dfrac{(a+b+c)\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac}}{3}$

41. $\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}$ 42. $0, a+b$ 43. $\dfrac{b\pm\sqrt{b^2+4ac}}{2a}$

44. $-p, -q$ 44. (a). $\dfrac{-11\pm\sqrt{13}}{6}a$ 45. $-\frac{2}{3}(1\pm\sqrt{7})$

46. $43, -42$ 47. $2\frac{3}{7}, -1\frac{4}{9}$ 48. $1, \dfrac{1}{a}$.

প্রশ্নমালা 62

1. 4 2. $\frac{2}{3}, \frac{4}{3}$ 3. $5, 7$; বা $-7, -5$

4. $10, 11$; বা $-11, -10$ 5. 7 বা -6

6. $11, 13$; বা $-13, -11$

7. $121, 100$ (২য় পক্ষে বর্গমূল -10 ধরিতে হইবে)

8. 6, 8 ; বা −8, −6 9. 8″, 15″ 10. 5″, 12″
11. A 2 ঘ., B 3 ঘ. 12. 9 পে. 13. 20 14. 76
15. 6 কি. মি. 16. 8 সে. মি. 17. 20 মি., 13 মি.
18. 2 কি. মি. ও 4 কি. মি. 19. 19, 20 20. 7″
21. 8, 9 ; বা −9, −8 22. $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}$ 23. $\frac{4}{5}$
24. 9, 36 25. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ 27. 9 আনা
28. $\frac{6}{-6}$ 29. 576.

প্রশ্নমালা 63

1. $x=3, y=1$ 2. $x=5, y=1$ 3. $x=-1$
4. $x=1$ 5. $x=1, y=1$ 6. $x=1\frac{1}{2}, y=3\frac{1}{2}$
7. $y=1$ 8. $(2\frac{1}{3}, 2\frac{2}{3}), (7, 5), (7, -2)$ 9. 90°
10. 13 একক বা 1·3 ইঞ্চি 12. (i) $3x+2y=12$
(ii) $y+2x=0$, (iii) $x+y+2=0$, (iv) $x+2y=8$
13. সমকোণ, স্থানাঙ্ক (1, 1) 15. $10\frac{1}{2}$ আনা, 14টি।

জ্যামিতি

[নবম শ্রেণী]

প্রথম অধ্যায়

পূর্বপাঠের পুনরালোচনা

1. ক্ষেত্র সম্বন্ধীয় সংজ্ঞা

সামতলিক ক্ষেত্র (Plane figure)। এক বা একাধিক রেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ সমতলকে সামতলিক ক্ষেত্র বলে।

ঋজুরেখ ক্ষেত্র। ঋজুরেখা অর্থাৎ সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে ঋজুরেখ বা সরল-রৈখিক ক্ষেত্র (Rectilineal বা Rectilinear figure) বলে।

সুষম ক্ষেত্র। যে ঋজুরেখ ক্ষেত্রের বাহুগুলি ও কোণগুলি সমান তাহাকে **সুষম ক্ষেত্র** (Regular figure) বলে।

ত্রিভুজ। তিনটি সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ সমতল ক্ষেত্রকে **ত্রিভুজ** (Triangle) বলে।

তিনটি বাহু ও তিনটি কোণ হইল ত্রিভুজের ছয়টি অঙ্গ। ত্রিভুজ ছয় প্রকার। যথা—

সমবাহু ত্রিভুজ। যে ত্রিভুজের তিনটি বাহুই সমান তাহাকে **সমবাহু** ত্রিভুজ (Equilateral triangle) বলে।

সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ। যে ত্রিভুজের কেবল দুইটি বাহু পরস্পর সমান তাহাকে সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ (Isosceles triangle) বলে।

বিষমবাহু ত্রিভুজ। যে ত্রিভুজের বাহু তিনটি পরস্পর অসমান তাহাকে বিষমবাহু ত্রিভুজ (Scalene triangle) বলে।

সমকোণী ত্রিভুজ। যে ত্রিভুজের একটি কোণ সমকোণ তাহাকে সমকোণী ত্রিভুজ (Right-angled triangle) বলে।

সমকোণের বিপরীত বাহুকে **অতিভুজ** (Hypotenuse) বলে।

সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ। যে ত্রিভুজের তিনটি কোণই সূক্ষ্মকোণ, তাহাকে সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ (Acute-angled triangle) বলে।

স্থূলকোণী ত্রিভুজ। যে ত্রিভুজের একটি কোণ স্থূলকোণ, তাহাকে স্থূলকোণী ত্রিভুজ (Obtuse-angled triangle) বলে।

[**দ্রষ্টব্য :** (1) ত্রিভুজটি যে বাহুর উপর দণ্ডায়মান, সাধারণতঃ তাহাকে উহার ভূমি (base) বলা হয়।

(2) ভূমির বিপরীত কোণকে সাধারণতঃ শীর্ষকোণ (Vertical angle) বলে। (3) ত্রিভুজের শীর্ষ বা কৌণিকবিন্দু (Vertex) তিনটি।]

ত্রিভুজের মধ্যমা। ত্রিভুজের যে কোন কৌণিকবিন্দু ও উহার বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দু সংযোজক সরলরেখাকে ত্রিভুজের মধ্যমা (Median) বলে।

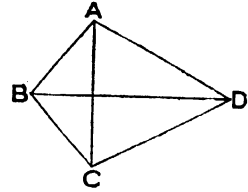
অতএব, বুঝা গেল যে, প্রত্যেক ত্রিভুজের তিনটি মধ্যমা হইতে পারে।

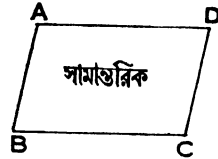
ত্রিভুজের উচ্চতা। ত্রিভুজের যে কোন শীর্ষ হইতে উহার বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বকে ত্রিভুজের **উচ্চতা** বা **উন্নতি** (Altitude বা height) বলে।

সাধারণতঃ ত্রিভুজের ভূমির উপর বিপরীত শীর্ষ হইতে অঙ্কিত লম্বকে উচ্চতা ধরা হয়। এক্ষেত্রেও ত্রিভুজের যে কোন বাহুকে ভূমি ধরিয়া উচ্চতা নির্ণয় করা যায়।

চতুর্ভুজ। চারিটি সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ সমতল ক্ষেত্রকে চতুর্ভুজ (Quadrilateral) বলে। যে সরলরেখা চতুর্ভুজের দুইটি বিপরীত কৌণিক বিন্দুকে সংযুক্ত করে তাহাকে উহার **কর্ণ** (diagonal) বলে।

চিত্র নং 1

চিত্র 1-এ AC ও BD, ABCD চতুর্ভুজের কর্ণ।

সামান্তরিক। যে চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলি পরস্পর সমান্তরাল, তাহাকে সামান্তরিক (Parallelogram) বলে।

চিত্র নং 2

আয়তক্ষেত্র। যে চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলি সমান্তরাল এবং কোণগুলি সমকোণ তাহাকে আয়তক্ষেত্র বা আয়ত (Rectangle) বলে।

আয়তক্ষেত্র

চিত্র নং 3

[**দ্রষ্টব্য :** (1) আয়তের সংজ্ঞায় 'কোণগুলি সমকোণ' না বলিয়া 'একটি কোণ সমকোণ' বলা যায়। কারণ, এক্ষেত্রে একটি কোণ সমকোণ হইলে অন্য কোণগুলিও সমকোণ হইবে। তোমরা পরে ইহার প্রমাণ পাইবে। (2) অন্য প্রকারেও আয়তের সংজ্ঞা দেওয়া যায়। যথা—যে সামান্তরিকের একটি কোণ সমকোণ তাহাকে আয়তক্ষেত্র বলে।]

বর্গক্ষেত্র। যে চতুর্ভুজের বাহুগুলি সমান ও কোণগুলি সমকোণ, তাহাকে বর্গক্ষেত্র (square) বলে।

অথবা, যে আয়তক্ষেত্রের দুইটি সন্নিহিত বাহু সমান তাহাকে বর্গক্ষেত্র বলে।

বর্গক্ষেত্র

চিত্র নং 4

রম্বস। যে চতুর্ভুজের বাহুগুলি পরস্পর সমান, কিন্তু একটি কোণও সমকোণ নহে, তাহাকে রম্বস (Rhombus) বলে।

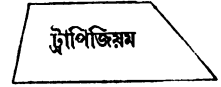
রম্বস

চিত্র নং 5

ট্রাপিজিয়ম। যে চতুর্ভুজের কেবল দুইটি বাহু সমান্তরাল, তাহাকে ট্রাপিজিয়ম (Trapezium) বলে।

[ট্রাপিজিয়মের অপর বাহু দুইটি সমান্তরাল নহে।]

যে ট্রাপিজিয়মের অসমান্তরাল বা তির্যক বাহু দুইটি সমান, তাহাকে **সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়ম** (Isosceles trapezium) বলে।

চিত্র নং 6

[**দ্রষ্টব্য :** (1) আয়তক্ষেত্র ও বর্গক্ষেত্র উভয়ই সামান্তরিক, (2) পরে প্রমাণিত হইবে যে রম্বসও একটি সামান্তরিক। (3) ট্রাপিজিয়মের যে বাহু দুইটি সমান্তরাল নহে, তাহাদিগকে তির্যক বাহুও বলে।]

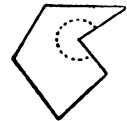
বহুভুজ। চারিটির অধিক বাহু দ্বারা সীমাবদ্ধ সমতল ক্ষেত্রকে বহুভুজ (Polygon) বলে।

এরূপ ক্ষেত্রগুলির সাধারণ নাম বহুভুজ। ইহাদের মধ্যে, যে ক্ষেত্রের বাহু-সংখ্যা পাঁচ তাহাকে **পঞ্চভুজ** (Pentagon), যাহার বাহুসংখ্যা ছয়টি তাহাকে **ষড়্ভুজ** (Hexagon), যাহার বাহুসংখ্যা সাতটি তাহাকে **সপ্তভুজ** (Heptagon) বলে। এইরূপে **অষ্টভুজ** (Octagon), নবভুজ, দশভুজ, প্রভৃতি বহুভুজের বিভিন্ন নাম হইয়া থাকে।

সুষম বহুভুজ। যে বহুভুজের বাহুগুলি সমান এবং কোণগুলিও সমান, তাহাকে সুষম (Regular) বহুভুজ বলা হয়।

কুব্জ বহুভুজ। যে বহুভুজের একটিও প্রবৃদ্ধ কোণ থাকে না, তাহাকে কুব্জ বহুভুজ (Convex polygon) বলে।

[**দ্রষ্টব্য :** বহুভুজ বলিলে সাধারণতঃ কুব্জ বহুভুজই বুঝায়। যে বহুভুজের একটিও প্রবৃদ্ধ কোণ থাকে তাহা কুব্জ নহে, তাহাকে Concave polygon বলে। চিত্র নং 7 দেখ।

চিত্র নং 7

কোন ঋজুরেখ ক্ষেত্রের বাহুগুলি সমান হইলে তাহাকে **সমবাহু** (Equilateral) ক্ষেত্র এবং কোণগুলি সমান হইলে তাহাকে **সদৃশকোণী** (Equiangular) ক্ষেত্র বলে।]

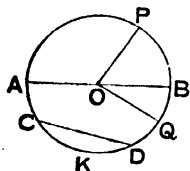
2. বৃত্ত সম্বন্ধীয় সংজ্ঞা

বৃত্ত। সমতলের উপরিস্থিত একটি নির্দিষ্ট বিন্দু O হইতে সর্বদা সমান দূরে থাকিয়া যদি কোন P বিন্দু বিচরণ করে, তবে ঐ বিন্দুটি যে বক্ররেখায় ঘুরিবে সেই বক্ররেখা দ্বারা বেষ্টিত ক্ষেত্রকে বৃত্ত (Circle) বলে।

ঐ বক্ররেখাটিকে বৃত্তের **পরিধি** (Circumference) এবং ঐ নির্দিষ্ট বিন্দু Oকে ঐ বৃত্তের **কেন্দ্র** (Centre) বলে।

চিত্র নং 8

[**দ্রষ্টব্য :** (i) 'বৃত্ত' বলিলে সাধারণতঃ বৃত্তের পরিধিকেই বুঝায়। (ii) কেন্দ্র হইতে পরিধির উপরিস্থিত বিন্দুগুলির দূরত্ব পরস্পর সমান।]

ব্যাস। বৃত্তের কেন্দ্রগামী যে সরলরেখা উভয়-দিকে পরিধি পর্যন্ত বিস্তৃত তাহাকে বৃত্তের **ব্যাস** (Diameter) বলে। 8নং চিত্রে AB একটি ব্যাস।

ব্যাসার্ধ। বৃত্তের কেন্দ্র হইতে পরিধি পর্যন্ত বিস্তৃত সরলরেখাকে বৃত্তের ব্যাসার্ধ বা অর (Radius) বলে। চিত্রে OP, OB, OQ প্রভৃতি এক একটি ব্যাসার্ধ। অতএব, বুঝা গেল যে ব্যাসার্ধ হইল ব্যাসের অর্ধেক।

চাপ। পরিধির যে কোন অংশকে বৃত্তের চাপ (Arc) বলে।

8নং চিত্রে PB, BQ প্রভৃতি এক একটি চাপ।

সমগ্র পরিধিকে দুইটি অংশে বিভক্ত করিলে বৃহত্তর অংশকে **অধিচাপ** (Major arc) এবং ক্ষুদ্রতর অংশকে **উপচাপ** (Minor arc) বলে। ঐ দুই চাপের একটিকে অপরটির **অনুবন্ধী চাপ** (Conjugate arc) বলে।

8নং চিত্রে PACDQ চাপটি অধিচাপ এবং PBQ চাপটি উপচাপ।

জ্যা। যে সরলরেখা বৃত্তের পরিধিস্থিত যে কোন দুই বিন্দুকে সংযুক্ত করে, তাহাকে জ্যা (Chord) বলে। অতএব, যে জ্যা বৃত্তের কেন্দ্রগামী তাহা একটি ব্যাস। ঐ চিত্রে CD একটি জ্যা।

বৃত্তাংশ। বৃত্তের একটি জ্যা বৃত্তটিকে যে দুই অংশে বিভক্ত করে তাহাদের প্রত্যেকটিকে বৃত্তাংশ বা বৃত্তখণ্ড (Segment) বলে। অতএব, একটি জ্যা ও উহা দ্বারা খণ্ডিত এক দিকের চাপ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রই বৃত্তাংশ।

8নং চিত্রে CKDC এবং CPDC এক একটি বৃত্তাংশ।

অর্ধবৃত্ত। বৃত্তের যে কোন ব্যাস বৃত্তকে দুইটি সমান অংশে বিভক্ত করে। উহাদের এক একটি বৃত্তাংশকে অর্ধবৃত্ত (Semi-circle) বলে।

8নং চিত্রে APBA এবং ABDA এক একটি অর্ধবৃত্ত।

এককেন্দ্রীয় বৃত্ত। যে সকল বৃত্তের কেন্দ্র একই, তাহাদিগকে এককেন্দ্রীয় বৃত্ত (Concentric circles) বলে।

বৃত্তকলা। দুইটি ব্যাসার্ধ ও উহাদের দ্বারা ছিন্ন চাপ বৃত্তের যে অংশকে সীমাবদ্ধ করে, তাহাকে বৃত্তকলা (Sector) বলে। আর ঐ ব্যাসার্ধদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণকে **বৃত্তকলা কোণ** বলে।

8নং চিত্রে OQPO একটি বৃত্তকলা এবং $\angle$POQ বৃত্তকলা কোণ।

3. পূর্ব পাঠের কয়েকটি প্রয়োজনীয় উপপাদ্য

উপপাদ্য 1

দুইটি সরলরেখা পরস্পর ছেদ করিলে বিপ্রতীপ কোণগুলি পরস্পর সমান হইবে।

[*If two straight lines intersect, then the vertically opposite angles are equal.*]

AB ও CD দুইটি সরলরেখা O বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

∠AOC=বিপ্রতীপ ∠BOD ; এবং

∠AOD=বিপ্রতীপ ∠BOC.

চিত্র নং 9

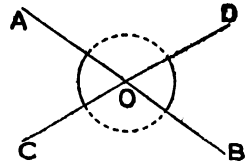
প্রমাণ : AO সরলরেখা CD সরলরেখার সহিত O বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে,

∴ ∠AOC+∠AOD=2 সমকোণ।

আবার, DO সরলরেখা AB সরলরেখার সহিত O বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে,

∴ ∠AOD+∠BOD=2 সমকোণ।

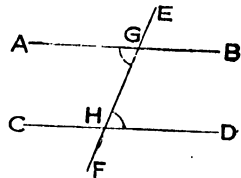
∴ ∠AOC+∠AOD=∠AOD+∠BOD, এই দুই সমান বস্তু হইতে ∠AOD বিয়োগ করিলে ∠AOC=∠BOD.

এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে ∠AOD=∠BOC.

উপপাদ্য 2

একটি সরলরেখা অপর দুইটি সরলরেখাকে ছেদ করিলে যদি (1) দুইটি একান্তর কোণ সমান হয়, অথবা (2) ছেদকের একই পার্শ্বে অবস্থিত অন্তঃকোণ দুইটির সমষ্টি দুই সমকোণ হয়, তবে শেষোক্ত সরল রেখা দুইটি সমান্তরাল হইবে।

[*If a straight line, cutting two other straight lines, makes (1) the alternate angles equal, or (2) the interior angles on the same side of the cutting line together equal to two right angles, then the two straight lines are parallel.*]

মনে কর, EF সরলরেখা AB ও CD সরলরেখা দুইটিকে যথাক্রমে G ও H বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

যদি (1) ∠AGH = একান্তর ∠GHD হয়, অথবা যদি (2) ∠BGH + ∠GHD = 2 সমকোণ হয়, তবে প্রমাণ করিতে হইবে যে, AB ও CD সমান্তরাল।

চিত্র নং 10

(1) **প্রমাণ :** ∠AGH = বিপ্রতীপ ∠EGB,
কিন্তু ∠AGH = ∠GHD (স্বীকার),

∴ ∠EGB = ∠GHD, এবং ইহারা অনুরূপ কোণ।

∴ AB ও CD সমান্তরাল (স্বতঃসিদ্ধ)।

(2) **প্রমাণ :** ∠BGH + ∠EGB = 2 সমকোণ (স্বতঃ)
আবার, ∠BGH + ∠GHD = 2 সমকোণ (স্বীকার)

∴ ∠BGH + ∠EGB = ∠BGH + ∠GHD,

∴ ∠EGB = ∠GHD, এবং ইহারা অনুরূপ কোণ,

∴ AB ও CD সমান্তরাল।

উপপাদ্য 3

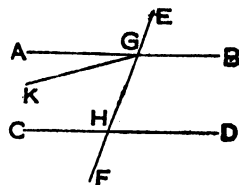
একটি সরলরেখা দুইটি সমান্তরাল সরলরেখাকে ছেদ করিলে (1) একান্তর কোণগুলি সমান হইবে, (2) অনুরূপ কোণগুলি পরস্পর সমান হইবে, এবং (3) ছেদকের একই পার্শ্বস্থ অন্তঃকোণ দুইটির সমষ্টি দুই সমকোণ হইবে।

[*If a straight line, cuts two parallel straight lines, it makes (1) the alternate angles equal, (2) the corresponding angles equal and (3) the two interior angles on the same side of the cutting line together equal to two right angles.*]

মনে কর, EF সরলরেখা AB ও CD সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়কে যথাক্রমে G ও H বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

(1) প্রমাণ করিতে হইবে যে
∠AGH = একান্তর ∠GHD.

চিত্র নং 11

প্রমাণ : যদি ∠AGH ও ∠GHD সমান না হয়, তবে মনে কর KGH কোণ GHD কোণের সমান ও একান্তর।

এক্ষণে, ∵ $\angle KGH$=একান্তর $\angle GHD$, ∴ KG ∥ CD ; কিন্তু AB ∥ CD (স্বীকার),

∴ AB ও KG এই দুইটি পরস্পরছেদী সরলরেখা CD সরলরেখার সমান্তরাল হইতেছে, কিন্তু প্লেফেয়ারের স্বতঃসিদ্ধ অনুসারে তাহা অসম্ভব।
∴ $\angle AGH$ ও $\angle GHD$ অসমান হইতে পারে না।

∴ $\angle AGH$ = একান্তর $\angle GHD$.

(2) প্রমাণ করিতে হইবে যে $\angle EGB$=অনুরূপ $\angle GHD$.

প্রমাণ : $\angle EGB$=বিপ্রতীপ $\angle AGH$.

আবার, $\angle AGH = \angle GHD$ [প্রমাণিত], ∴ $\angle EGB = \angle GHD$.

(3) প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\angle BGH + \angle GHD$ = 2 সমকোণ।

প্রমাণ : $\angle BGH + \angle AGH$ = 2 সমকোণ [স্বতঃ],

কিন্তু $\angle AGH$=একান্তর $\angle GHD$ [প্রমাণিত],

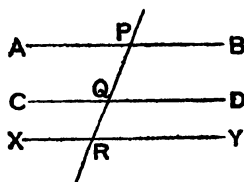
∴ $\angle BGH + \angle GHD$ = 2 সমকোণ।

উপপাদ্য 4

একই সরলরেখার সমান্তরাল সরলরেখাগুলি পরস্পর সমান্তরাল।

[*Straight lines which are parallel to the same straight line are parallel.*]

মনে কর, AB ও CD সরলরেখার প্রত্যেকটি XY সরলরেখার সমান্তরাল। প্রমাণ করিতে হইবে যে, AB ∥ CD.

প্রমাণ : যদি AB ও CD সমান্তরাল না হয়, তবে উহাদিগকে বর্ধিত করিলে কোন একদিকে পরস্পর ছেদ করিবে। অতএব, দুইটি পরস্পরছেদী সরলরেখা উভয়েই XY সরলরেখার সমান্তরাল হইবে, কিন্তু তাহা প্লেফেয়ারের স্বতঃসিদ্ধ অনুসারে হইতে পারে না।

চিত্র নং 12

∴ AB ও CD সমান্তরাল।

[ইহার বিকল্প প্রমাণ তোমরা পূর্বে শিখিয়াছ]

উপপাদ্য 5

ত্রিভুজের কোণ তিনটির সমষ্টি দুই সমকোণ।

[*The three angles of a triangle are together equal to two right angles.*]

ABC একটি ত্রিভুজ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 2$ সমকোণ।

অঙ্কন : BCকে D পর্যন্ত বর্ধিত কর এবং CE ‖ BA টান।

চিত্র নং 13

প্রমাণ : ∵ BA ‖ CE এবং AC ইহাদের ছেদক,

∴ $\angle CAB =$ একান্তর $\angle ACE$.

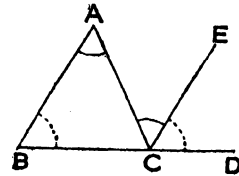
আবার, ∵ BA ‖ CE এবং BCD ইহাদের ছেদক,

∴ $\angle ABC =$ অনুরূপ $\angle ECD$.

অতএব, $\angle ABC + \angle CAB = \angle ECD + \angle ACE = \angle ACD$.

এই দুই সমান বস্তুতে $\angle BCA$ যোগ করিলে পাওয়া যায়,

$\angle ABC + \angle CAB + \angle BCA = \angle ACD + \angle BCA = 2$ সমকোণ।

উপপাদ্য 6

ত্রিভুজের একটি বাহু বর্ধিত করিলে উৎপন্ন বহিঃস্থ কোণটি অন্তঃস্থ বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান হয়।

[*If one side of a triangle is produced, the exterior angle so formed is equal to the sum of the interior opposite angles.*]

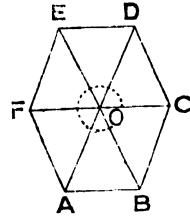
[চিত্র 13 আঁক। $\triangle ABC$-র BC বাহুকে D পর্যন্ত বর্ধিত কর এবং CE ‖ BA টান। প্রমাণ করিতে হইবে $\angle ACD = \angle ABC + \angle BAC$. ইহার পর উপপাদ্য 5এর মত প্রমাণ করিয়া—অতএব $\angle ABC + \angle CAB = \angle ACD$ এই পর্যন্ত লিখিবে।]

উপপাদ্য 7

n-সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট কুব্জ বহুভুজের অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি $(2n-4)$ সমকোণ।

[*The sum of the interior angles of a convex polygon of n-sides is $(2n-4)$ right angles.*]

মনে কর, ABCDEF⋯কুব্জ বহুভুজের বাহুসংখ্যা n.

প্রমাণ করিতে হইবে যে, এই n-ভুজের অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি$=(2n-4)$ সমকোণ।

অঙ্কন : এই বহুভুজের ভিতরে যে কোন বিন্দু O লও এবং O-এর সহিত প্রত্যেক কৌণিক বিন্দু যোগ কর। ইহাতে ক্ষেত্রটি n-সংখ্যক ত্রিভুজে বিভক্ত হইল।

চিত্র নং 14

প্রমাণ : ∵ প্রত্যেক ত্রিভুজের কোণসমষ্টি$=2$ সমকোণ,

∴ n-সংখ্যক ত্রিভুজের কোণসমষ্টি$=2n$ সমকোণ,

আবার, বহুভুজটির অন্তঃকোণগুলি$+$O বিন্দুস্থ কোণগুলি

$=$ঐ n-সংখ্যক ত্রিভুজের কোণসমষ্টি$=2n$ সমকোণ ;

কিন্তু O বিন্দুস্থ কোণগুলির সমষ্টি$=4$ সমকোণ,

∴ ঐ n-ভুজের অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি$+4$ সমকোণ$=2n$ সমকোণ,

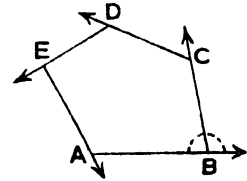
∴ n-ভুজের অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি$=(2n-4)$ সমকোণ।

উপপাদ্য 8

কোন কুব্জ বহুভুজের বাহুগুলিকে পর পর একইক্রমে বর্ধিত করিলে উৎপন্ন বহিঃকোণগুলির সমষ্টি চারি সমকোণ হইবে।

[*If the sides of a convex polygon are produced in order, the sum of the exterior angles is equal to four right angles.*]

মনে কর, ABCDE⋯একটি n-বাহুবিশিষ্ট কুব্জ (অর্থাৎ যাহাতে প্রবৃদ্ধ কোণ নাই) বহুভুজ এবং উহার বাহুগুলিকে পর পর একই ক্রমে (তীর-নির্দিষ্ট ক্রমে) বর্ধিত করা হইয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, উৎপন্ন বহিঃকোণগুলির সমষ্টি$=4$ সমকোণ।

চিত্র নং 15

প্রমাণ : বহুভুজটির বাহুসংখ্যা n বলিয়া উহার কৌণিক বিন্দুর সংখ্যাও n.

প্রত্যেক কৌণিক বিন্দুতে অন্তঃকোণ$+$বহিঃকোণ$=2$ সমকোণ,

∴ n অন্তঃকোণের সমষ্টি$+n$ বহিঃকোণের সমষ্টি$=2n$ সমকোণ ;

আবার, বহুভুজটির n অন্তঃকোণের সমষ্টি$+4$ সমকোণ$=2n$ সমকোণ,

∴ বহুভুজটির অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি$+$বহিঃকোণগুলির সমষ্টি

$=$অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি$+4$ সমকোণ,

∴ উহার বহিঃকোণগুলির সমষ্টি$=4$ সমকোণ।

উপপাদ্য 9

ত্রিভুজের দুইটি বাহু সমান হইলে, উহাদের বিপরীত কোণ দুইটিও সমান হইবে। [অথবা, সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি-সংলগ্ন কোণদ্বয় পরস্পর সমান।]

[*If two sides of a triangle are equal, then the angles opposite to these two sides are equal.*]

ABC একটি ত্রিভুজ, ইহার AB = AC.

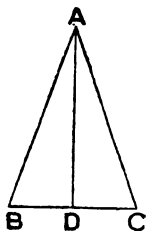
প্রমাণ করিতে হইবে যে ∠ABC = ∠ACB.

অঙ্কন : মনে কর, AD সরলরেখা ∠BACকে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়া BCকে D বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

প্রমাণ : △ABD ও △ACDএর AB = AC (স্বীকার), AD উভয়ের সাধারণ বাহু, এবং অন্তর্ভূ্ত ∠BAD = অন্তর্ভূ্ত ∠CAD ; ∴ ঐ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম।

∴ ∠ABD = ∠ACD অর্থাৎ ∠ABC = ∠ACB.

A

B D C

চিত্র নং 16

উপপাদ্য 10

ত্রিভুজের দুইটি কোণ সমান হইলে, উহাদের বিপরীত বাহু দুইটিও পরস্পর সমান হইবে।

[*If two angles of a triangle are equal, then the sides opposite to these equal angles are also equal.*]

[স্পষ্টত: ইহা উপপাদ্য 9-এর বিপরীত উপপাদ্য]

ABC একটি ত্রিভুজ এবং ইহার ∠ABC = ∠ACB.

প্রমাণ করিতে হইবে যে AB = AC. [চিত্র নং 16 আঁক].

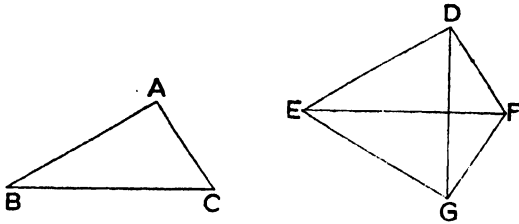
অঙ্কন : মনে কর, AD সরলরেখা ∠BACকে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়া BCকে D বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

প্রমাণ : △ABD ও △ACDর ∠ABD = ∠ACD (স্বীকার), ∠BAD = ∠CAD (অঙ্কন) এবং AD সাধারণ বাহু ;

∴ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম। ∴ AB = AC.

উপপাদ্য 11

যদি একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহু যথাক্রমে অপর একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহুর সমান হয়, তবে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হইবে।

[*If the three sides of one triangle are respectively equal to the three sides of another triangle, the two triangles are congruent.*]

চিত্র নং 17

মনে কর, ABC ও DEF ত্রিভুজ দুইটির AB = DE, BC = EF এবং CA = FD.

প্রমাণ করিতে হইবে যে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম।

প্রমাণ : মনে কর, BC ও EF, ত্রিভুজদ্বয়ের অন্য কোন বাহু অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর নহে। $\triangle ABC$কে $\triangle DEF$এর উপর এরূপভাবে স্থাপন কর যেন B বিন্দু E বিন্দুর উপর ও BC বাহু EF বাহুর উপর পড়ে এবং EF বাহুর যে পার্শ্বে D বিন্দু আছে A বিন্দু যেন তাহার বিপরীত পার্শ্বে G বিন্দুর উপর পড়ে।

$\because$ BC = EF, $\therefore$ C বিন্দু F বিন্দুর উপর পড়িবে।

অতএব, GEF ত্রিভুজটি ABC ত্রিভুজের নূতন অবস্থান হইল।

DG যোগ কর।

এক্ষণে, $\triangle DEG$এ, $\because$ ED = AB = EG, $\therefore$ $\angle EDG = \angle EGD$.

আবার, $\triangle DFG$এ, $\because$ FD = CA = FG, $\therefore$ $\angle FDG = \angle FGD$,

$\therefore$ সমগ্র $\angle EDF$ = সমগ্র $\angle EGF = \angle BAC$.

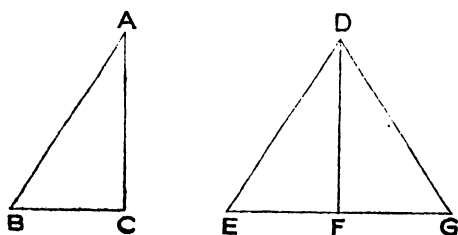
এখন, $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$এর AB = DE, AC = DF এবং

অন্তর্ভুক্ত $\angle BAC$ = অন্তর্ভুক্ত $\angle EDF$ (প্রমাণিত);

$\therefore$ $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ সর্বসম।

উপপাদ্য 12

দুইটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ দুইটি পরস্পর সমান হইলে এবং একটির এক বাহু অন্যটির এক বাহুর সমান হইলে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হইবে।

[*If two right-angled triangles have their hypotenuses equal and one side of the one equal to one side of the other, then the triangles are equal in all respects.*]

চিত্র নং 18

ABC ও DEF দুইটি সমকোণী ত্রিভুজের $\angle C$ ও $\angle F$ সমকোণ। ইহাদের অতিভুজ AB = অতিভুজ DE এবং AC বাহু = DF বাহু।

প্রমাণ করিতে হইবে যে $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ সর্বসম।

প্রমাণ ঃ $\triangle ABC$কে $\triangle DEF$এর উপর এরূপভাবে স্থাপন কর যেন A বিন্দু D বিন্দুর উপর ও AC বাহু DF বাহুর উপর পড়ে, এবং DFএর যে পার্শ্বে E বিন্দু আছে B বিন্দু যেন তাহার বিপরীত পার্শ্বে G বিন্দুর উপর পড়ে। $\because$ AC = DF, $\therefore$ C বিন্দু F বিন্দুর উপর পড়িবে। অতএব, DFG ত্রিভুজটি $\triangle ACB$র নূতন অবস্থান হইল। এখন, $\because$ $\angle DFG = \angle ACB = 1$ সমকোণ, $\because$ $\angle DFE + \angle DFG = 2$ সমকোণ, $\therefore$ FE ও FG একই সরলরেখায় অবস্থিত। এখন DEG একটি ত্রিভুজ হইল।

$\because$ DE = AB = DG, $\therefore$ $\angle DEF = \angle DGF = \angle ABC$.

এক্ষণে, $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$এর $\angle ACB = \angle DFE$ (সমকোণ),

$\angle ABC = \angle DEF$ (প্রমাণিত) এবং AC = DF.

$\therefore$ $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ সর্বসম।

উপপাদ্য 13

কোন ত্রিভুজের একটি বাহু অপর একটি বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে, বৃহত্তর বাহুর বিপরীত কোণটি ক্ষুদ্রতর বাহুর বিপরীত কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

[*If one side of a triangle is greater than another, then the angle opposite to the greater side is greater than the angle opposite to the less.*]

মনে কর, ABC ত্রিভুজের AB বাহু AC বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর।

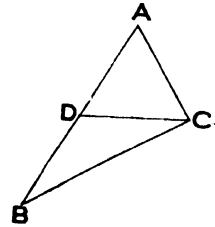
প্রমাণ করিতে হইবে যে $\angle ACB > \angle ABC$.

অঙ্কন : AB হইতে ACর সমান AD অংশ কাটিয়া লও এবং CD যোগ কর।

প্রমাণ : $\because$ AD = AC,

$\therefore$ $\angle ADC = \angle ACD$.

চিত্র নং 19

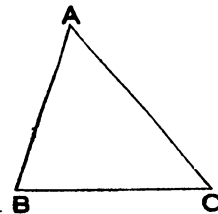
$\because$ $\triangle BCD$র বহিঃকোণ $\angle ADC > \angle DBC$, $\therefore$ $\angle ACD > \angle DBC$, অর্থাৎ $\angle ACD > \angle ABC$. $\therefore$ সমগ্র ACB কোণটি ABC কোণ অপেক্ষা আরও বৃহত্তর।

উপপাদ্য 14

কোন ত্রিভুজের একটি কোণ অপর একটি কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে, বৃহত্তর কোণের বিপরীত বাহুটি ক্ষুদ্রতর কোণের বিপরীত বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

[*If one angle of a triangle is greater than another, then the side opposite to the greater angle is greater than the side opposite to the less.*]

মনে কর, ABC ত্রিভুজের $\angle ABC > \angle ACB$.

প্রমাণ করিতে হইবে যে, AC > AB.

প্রমাণ : যদি AC বাহু AB বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর না হয়, তবে ইহা ABর সমান অথবা AB অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে।

চিত্র নং 20

এক্ষণে যদি AC = AB হয়, তবে $\angle ABC = \angle ACB$ হইবে, কিন্তু ইহা কল্পনাবিরুদ্ধ, $\therefore$ AB ও AC সমান হইতে পারে না।

আবার, যদি $AC < AB$ হয়, তবে $\angle ABC < \angle ACB$ হইবে,
কিন্তু ইহাও কল্পনাবিরুদ্ধ বলিয়া $AC < AB$ হইতে পারে না।
অতএব, AC বাহু AB-র সমানও নহে, অথবা AB অপেক্ষা ক্ষুদ্রতরও নহে।
$\therefore \quad AC > AB.$

উপপাদ্য 15

ত্রিভুজের যে কোণ দুইটি বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর।

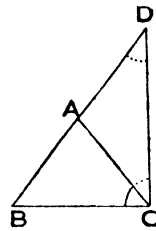
[*Any two sides of a triangle are together greater than the third side.*]

ABC একটি ত্রিভুজ। প্রমাণ করিতে হইবে যে, ইহার যে কোন দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর।

চিত্র নং 21

অঙ্কন : BA বাহুকে D পর্যন্ত এরূপভাবে বর্ধিত কর যেন $AD = AC$ হয়। DC যোগ কর।

প্রমাণ : $\because AD = AC, \therefore \angle ACD = \angle ADC,$
কিন্তু $\angle BCD > \angle ACD.$

$\therefore \quad \angle BCD > \angle ADC$ অর্থাৎ $\angle BCD > \angle BDC.$
এক্ষণে, $\because \triangle BCD$এ $\angle BCD > \angle BDC, \quad \therefore \quad BD > BC$;
কিন্তু $BD = BA + AD = BA + AC, \quad \therefore \quad AB + AC > BC.$
অনুরূপে প্রমাণ করা যায় যে, $AB + BC > AC$, এবং $AC + BC < AB.$

উপপাদ্য 16

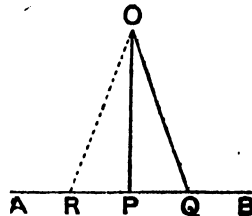
কোন সরলরেখার বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে ঐ সরলরেখা পর্যন্ত যত সরলরেখা টানা যায়, তন্মধ্যে লম্বই ক্ষুদ্রতম।

[*Of all st. lines that can be drawn to a given st. line from a given point outside it, the perpendicular is the shortest.*]

মনে কর, AB একটি সরলরেখা এবং O উহার বহিঃস্থ একটি বিন্দু।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, O হইতে ABর উপর যত সরলরেখা টানা যায় তাহাদের মধ্যে লম্বটি ক্ষুদ্রতম।

চিত্র নং 22

অঙ্কন : O হইতে ABর উপর OP লম্ব এবং অন্য যে কোন একটি সরলরেখা OQ টান।

প্রমাণ: ∵ ΔOPQএর $\angle OPQ$ একটি সমকোণ, ∴ $\angle OQP$ একটি সূক্ষ্মকোণ। ∴ $\angle OQP < \angle OPQ$, ∴ $OP < OQ$.

অতএব, দেখা গেল O হইতে AB পর্যন্ত অঙ্কিত যে কোন সরলরেখা অপেক্ষা লম্বটি ক্ষুদ্রতর।

∴ ঐ সরলরেখাগুলির মধ্যে OP লম্বটি ক্ষুদ্রতম।

প্রশ্নমালা 1

1. দুইটি সরলরেখা পরস্পর ছেদ করিলে যে চারিটি কোণ উৎপন্ন হয়, তাহাদের সমদ্বিখণ্ডকগুলি দুইটি পরস্পর লম্বরেখা উৎপন্ন করে।

2. একটি কোণের বাহুদ্বয় যথাক্রমে অন্য একটি কোণের বাহুদ্বয়ের সমান্তরাল হইলে ঐ কোণ দুইটি সমান অথবা পরস্পর সম্পূরক হয়।

3. সমকোণী ত্রিভুজের একটি সূক্ষ্মকোণ অপর সূক্ষ্মকোণটির দ্বিগুণ হইলে, অতিভুজটি ক্ষুদ্রতম বাহুর দ্বিগুণ হয়।

4. একটি ত্রিভুজের প্রত্যেক বাহুকে উভয় দিকে বর্ধিত করিলে বহিঃস্থ কোণ ছয়টির সমষ্টি আট সমকোণ হইবে। [W. B. S. F. '53]

5. কোন সুষম সরলরৈখিক ক্ষেত্রের একটি বহিঃকোণ একটি অন্তঃকোণের দ্বিগুণ। উহার বাহুসংখ্যা কত? [উত্তর: 3]

6. কোন পঞ্চভুজের একটি কোণ সমকোণ এবং অন্য কোণ চারিটি সমান। উহাদের প্রত্যেকটির পরিমাণ কত? [D. B. '27]

7. সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ হইতে অতিভুজের মধ্যবিন্দু পর্যন্ত অঙ্কিত সরলরেখা অতিভুজের অর্ধেক। [C. U. '19 ; P. U. '33 ; D. B. '33]

8. সমবাহু ত্রিভুজের মধ্যমাগুলি পরস্পর সমান।

9. যদি কোন ত্রিভুজের শীর্ষকোণের সমদ্বিখণ্ডক ভূমিকেও সমদ্বিখণ্ডিত করে, তবে ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু। [C. U. '37 ; D. B. '36]

10. একটি ত্রিভুজের কোন বহিঃকোণের সমদ্বিখণ্ডক উহার বিপরীত বাহুর সমান্তরাল হইলে, ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু হইবে। [D. B. '26]

11. ABCD রম্বসের মধ্যে A ও C হইতে সমদূরবর্তী P একটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে, PB ও PD একই সরলরেখায় অবস্থিত। [C. U. '46]

12. রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

[C. U. '35]

13. সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু ও ভূমির মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা শীর্ষকোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে ও ভূমির উপর লম্ব হয়। [C. U. ; D. B.]

14. একই ভূমির উপর অবস্থিত দুইটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুদ্বয় সংযোজক সরলরেখাটি শীর্ষকোণ দুইটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে এবং ভূমির লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক হয়। [C. U.]

15. কোন ত্রিভুজের দুইটি কৌণিক বিন্দু হইতে বিপরীত বাহুদ্বয়ের উপর অঙ্কিত লম্বদ্বয় সমান হইলে, ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু হইবে। [W. B. S. F. '55]

16. কোন ত্রিভুজের দুইটি বাহু 2 ও 3 হইলে তৃতীয় বাহুটি 5 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর কিন্তু 1 অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে। [C. U. '25]

17. ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহুর অন্তর তৃতীয় বাহু অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

[W. B. S. F. '52]

18. একটি চতুর্ভুজের মধ্যে এরূপ একটি বিন্দু নির্ণয় কর যেন চতুর্ভুজটির কৌণিক বিন্দুগুলি হইতে উহার দূরত্বগুলির সমষ্টি লঘিষ্ঠ হয়। [C. U. '44]

19. ত্রিভুজের যে-কোন দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহুর উপর অঙ্কিত মধ্যমার দ্বিগুণ অপেক্ষা বৃহত্তর। [C. U. '23 ; D. B. '32]

20. ত্রিভুজের কোন বাহুর প্রান্তদ্বয় হইতে ত্রিভুজটির মধ্যবর্তী কোন বিন্দু পর্যন্ত অঙ্কিত সরলরেখাদ্বয় একত্রে ত্রিভুজটির অপর বাহুদ্বয় অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে। [D. B '27]

21. $\triangle$ABCর A কোণটি বৃহত্তম। প্রমাণ কর যে AB, AC ও 2BCর সমান বাহুবিশিষ্ট কোন ত্রিভুজ অঙ্কন করা সম্ভব নহে। [C. U. '46]

22. যে কোন ত্রিভুজের মধ্যমাগুলির সমষ্টি উহার পরিসীমা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। [C. U. '41, '48 ; D. B. '34 ; W. B. '54]

23. চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় একত্রে উহার অর্ধপরিসীমা অপেক্ষা বৃহত্তর।

[C. U. '43]

24. ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দুগুলি হইতে উহার অন্তঃস্থ কোন বিন্দুর দূরত্ব তিনটির সমষ্টি ত্রিভুজটির অর্ধপরিসীমা অপেক্ষা বৃহত্তর। [C. U. '27]

দ্বিতীয় অধ্যায়

সম্পাদ্য

4. তোমরা জান যে অঙ্কনকার্যে রুলার, কম্পাস, চাঁদা, ডিভাইডার প্রভৃতি বিবিধ যন্ত্র ব্যবহার করা হয়। এখন জানিতে হইবে যে, বিশুদ্ধ জ্যামিতিক অঙ্কনে রুলার ও কম্পাস ভিন্ন অন্য কোন যন্ত্র ব্যবহার করা যাইবে না। এখানে সম্পাদ্যের আলোচনায় অঙ্কনকার্যে আমরা কেবল ঐ দুইটি যন্ত্রই ব্যবহার করিব।

সরলরেখা অঙ্কনে, কোন সরলরেখাকে প্রয়োজন মত যে কোন দিকে বর্ধিত করিতে এবং দুইটি বিন্দু সংযুক্ত করিতে **রুলার** ব্যবহার করা হয়। আর, **কম্পাসের** সাহায্যে কোন বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া যে কোন ব্যাসার্ধ লইয়া সমগ্র বৃত্ত বা কোন বৃত্তচাপ অঙ্কন করা হয়।

এই দুই যন্ত্রের সাহায্যে কতকগুলি অঙ্কনকার্যের বিধান স্বীকার করিয়া লওয়া হইয়াছে। এই স্বীকৃত বিধানগুলিকে **স্বীকৃত বিষয়** (Postulates) বলা হয়। নিম্নে এই বিধানগুলির উল্লেখ করা হইল :—

রুলারের সাহায্যে (1) যে কোন একটি সরলরেখা অঙ্কিত করা যাইতে পারে।

(2) কোন নির্দিষ্ট সরলরেখাকে উহার যে কোন একদিকে বা উভয়দিকে যতদূর ইচ্ছা বর্ধিত করা যাইতে পারে।

(3) দুইটি বিন্দুকে সরলরেখা দ্বারা সংযুক্ত করা যাইতে পারে।

আর, কম্পাসের সাহায্যে (4) কোন বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এবং যে কোন ব্যাসার্ধ লইয়া বৃত্ত অঙ্কিত করা যাইতে পারে।

5. **সম্পাদ্য সমাধান :** কোন সম্পাদ্যে প্রদত্ত বিষয়গুলিকে **উপাত্ত** (Data) বলে।

সম্পাদ্য সমাধানের দুইটি প্রণালী আছে— **সংশ্লেষণ** (Synthesis) প্রণালী ও **বিশ্লেষণ** (Analysis) প্রণালী।

প্রদত্ত উপাত্ত হইতে বিচার বা যুক্তির সাহায্যে নির্ণেয় বিষয় প্রতিষ্ঠিত করার প্রণালীকে সংশ্লেষণ প্রণালী বলে।

আর, নির্ণেয় বিষয়টিকে প্রথমেই সত্য বলিয়া ধরিয়া লইয়া যুক্তির সাহায্যে প্রদত্ত বিষয়ে উপনীত হওয়াকে বিশ্লেষণ প্রণালী বলে।

সাধারণতঃ সংশ্লেষণ প্রণালী অবলম্বন করা হয়, কিন্তু কঠিন সম্পাদ্যের সমাধানে এই বিশ্লেষণ প্রণালী বিশেষ সাহায্য করে।

সম্পাদ্য সমাধান কালে (1) অঙ্কনগুলি প্রত্যেক **অঙ্কনচিহ্নসহ** (Traces of construction । **চিত্রে** প্রদর্শন করিতে হইবে।

(2) অঙ্কনকার্যগুলির **বিবরণ** (Statement of construction) লিখিতে হইবে। (3) ঐ সমাধান যে ঠিক হইয়াছে তাহা **প্রমাণ** করিতে হইবে।

অঙ্কন চিহ্ন ও চিত্র যেন **স্পষ্ট ও পরিচ্ছন্ন** হয়।

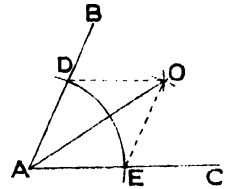
সম্পাদ্য 1

একটি নির্দিষ্ট কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

[***To bisect a given angle.*** [Euc. 1-6)]

BAC একটি নির্দিষ্ট কোণ, ইহাকে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

চিত্র নং 23

অঙ্কন : A বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া যে কোন ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ অঙ্কিত কর। উহা যেন AB ও ACকে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করিল।

এখন D ও E বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া DE ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি বৃত্তচাপ অঙ্কিত কর। মনে কর, চাপ দুইটি পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করিল। AO যোগ কর।

AO রেখা BAC কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করিল।

প্রমাণ : DO ও EO যোগ কর।

ADO এবং AEO ত্রিভুজের AD=AE (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ)

DO=EO (দুইটি সমান বৃত্তের ব্যাসার্ধ)

এবং AO সাধারণ বাহু ;

∴ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম। ∴ $\angle DAO = \angle EAO$.

অতএব, BAC কোণ AO রেখা দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হইয়াছে।

[**দ্রষ্টব্য :** D ও E বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া DE ব্যাসার্ধ লইয়া অথবা উহার অর্ধেকের অধিক যে কোন ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি বৃত্তচাপ আঁকা যাইতে পারে। DE-র অর্ধেক অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ব্যাসার্ধ লইয়া চাপ আঁকিলে উহারা পরস্পর ছেদ করিবে না।]

সম্পাদ্য 2

একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

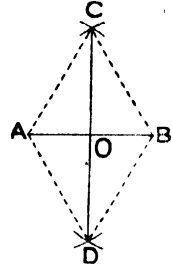
[*To bisect a straight line of given length.* (Euc. 1-10)]

AB একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা, ইহাকে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

অঙ্কন : A বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া AB ব্যাসার্ধ লইয়া AB-র উভয় পার্শ্বে একটি করিয়া বৃত্তচাপ অঙ্কিত কর।

আবার, B বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া AB ব্যাসার্ধ লইয়া AB-র উভয় পার্শ্বে একটি করিয়া বৃত্তচাপ অঙ্কিত কর। মনে কর, উভয় পার্শ্বের চাপগুলি C ও D বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিল। CD যোগ কর, উহা যেন ABকে O বিন্দুতে ছেদ করিল।

চিত্র. নং 24

AB রেখা O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইল।

প্রমাণ : CA, CB, DA, DB যোগ কর। $\triangle ACD$ ও $\triangle BCD$র

AC=BC (সমান বৃত্তের ব্যাসার্ধ)

AD=BD (সমান বৃত্তের ব্যাসার্ধ) এবং CD সাধারণ বাহু,

∴ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম। ∴ $\angle ACD = \angle BCD$.

আবার, $\triangle AOC$ ও $\triangle BOC$র AC=BC, CO সাধারণ বাহু,

এবং অন্তর্ভূত $\angle ACO$ = অন্তর্ভূত $\angle BCO$ (প্রমাণিত);

∴ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম। ∴ AO=BO.

অতএব, AB রেখা O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইয়াছে।

[**দ্রষ্টব্য :** (1) A ও B বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া বৃত্তচাপ আঁকিবার সময় ব্যাসার্ধ AB বা উহার অর্ধেক অপেক্ষা বৃহত্তর যে কোন ব্যাসার্ধ লওয়া যায়।

(2) AB-র অর্ধেক অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ব্যাসার্ধ লইলে চাপগুলি পরস্পর ছেদ করিবে না। (3) এস্থলে যদি প্রথমে A ও Bকে কেন্দ্র করিয়া কোন ব্যাসার্ধ

লইয়া AB-র একপার্শ্বে দুইটি চাপ আঁকা হয় এবং তৎপরে আর একবার A ও Bকে কেন্দ্র করিয়া অন্য কোন ব্যাসার্ধ লইয়া অপর পার্শ্বে দুইটি চাপ আঁকা হয়, তাহা হইলেও অঙ্কন শুদ্ধ হইবে। উভয় পক্ষে এই ব্যাসার্ধ দুইটি AB-র অর্ধেক অপেক্ষা বৃহত্তর হওয়া আবশ্যক। (4) এখানে CD রেখা AB-র **সমদ্বিখণ্ডক**। আবার, যেহেতু $\triangle AOC$ ও $\triangle BOC$ সর্বসম, সুতরাং $\angle AOC = \angle BOC$.
$\therefore$ CD রেখা AB-র উপর লম্ব। অতএব, CD রেখা AB-র **লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক** (Perpendicular Bisector) হইল।]

প্রশ্নমালা 2

1. কম্পাস ও রুলারের সাহায্যে নিম্নের কোণগুলি অঙ্কিত কর :—
$60°, 30°, 15°.$
2. একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিয়া উহার কোণগুলিকে সমদ্বিখণ্ডিত কর।
3. ABC একটি কোণ, ইহাকে চারিটি সমান অংশে বিভক্ত কর।
4. 5 সেন্টিমিটার দীর্ঘ সরলরেখাকে কম্পাস ও রুলারের সাহায্যে সমদ্বিখণ্ডিত কর।
5. একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে সমান চারি অংশে বিভক্ত কর।
6. একটি কোণকে এরূপ দুই অংশে বিভক্ত কর, যেন একটি অংশ অপর অংশের 3 গুণ হয়।
7. AB সরলরেখাকে এরূপ দুই অংশে বিভক্ত কর, যেন একটি অংশ অপরটির এক-সপ্তমাংশ হয়।
8. একটি কোণের বহিঃসমদ্বিখণ্ডক অঙ্কিত কর।
9. একটি ত্রিভুজের যে কোন দুইটি মধ্যমা আঁক।
10. একটি ত্রিভুজের যে কোন দুইটি বাহুর লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক অঙ্কিত কর। উহাদের ছেদবিন্দুটি ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দুগুলি হইতে সমদূরবর্তী কিনা মাপিয়া দেখ।
11. **একটি ত্রিভুজের কোন একটি বাহুর উপর এরূপ একটি বিন্দু নির্ণয় কর যেন বিপরীত কৌণিক বিন্দু হইতে উহার দূরত্ব ত্রিভুজটির অপর বাহুদ্বয়ের সমষ্টির অর্ধেক হয়।**

সম্পাদ্য 3

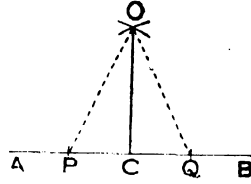
একটি সরলরেখাস্থিত কোন বিন্দুতে সরলরেখাটির উপর লম্ব অঙ্কিত করিতে হইবে।

[*To draw the perpendicular to a given straight line at a given point in it.* (Euc. 1-11)]

AB একটি সরলরেখা এবং C উহার উপর একটি বিন্দু।

C বিন্দুতে AB সরলরেখার উপর লম্ব অঙ্কিত করিতে হইবে।

চিত্র নং 25

অঙ্কন : C বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া একই ব্যাসার্ধের দুইটি বৃত্তচাপ আঁকিয়া AB-কে P ও Q বিন্দুতে ছেদ কর। আবার, P ও Q বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এবং PC অপেক্ষা বৃহত্তর যে কোন ব্যাসার্ধ লইয়া AB-র একই দিকে দুইটি বৃত্তচাপ আঁক। চাপ দুইটি যেন O বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিল। OC যোগ কর। C বিন্দুতে AB-র উপর OC লম্ব হইল।

প্রমাণ : OP ও OQ যোগ কর।

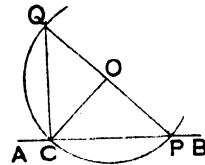
△OCP ও △OCQ-এর CP=CQ (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ)

OP=OQ (সমান বৃত্তের ব্যাসার্ধ) এবং OC সাধারণ বাহু

∴ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম।

∴ ∠OCP=∠OCQ এবং ইহারা সন্নিহিত কোণ হওয়ায় প্রত্যেকটি সমকোণ। ∴ OC, AB-র উপর লম্ব।

(অন্য প্রণালী)

অঙ্কন : AB-র বহিঃস্থ একটি বিন্দু O লও। O-কে কেন্দ্র করিয়া OC ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত আঁক। উহা যেন AB-কে P বিন্দুতে ছেদ করিল। PO যোগ করিয়া উহাকে বর্ধিত কর। বর্ধিত PO যেন বৃত্তকে Q বিন্দুতে ছেদ করিল। CQ যোগ কর। CQ, AB-র উপর লম্ব হইল।

চিত্র নং 26

প্রমাণ : OC যোগ কর।

∵ $OC = OP$ (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ), ∴ $\angle OCP = \angle OPC$.

আবার ∵ $OC = OQ$ (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ),

∴ $\angle OCQ = \angle OQC$.

∴ সমগ্র $\angle PCQ = \angle CPQ + \angle PQC$ = দুই সমকোণের অর্ধেক
= এক সমকোণ

∴ CQ, AB-র উপর C বিন্দুতে লম্ব।

[**অপর একটি প্রণালী**]

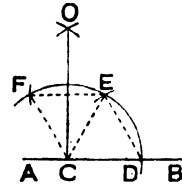
অঙ্কন : C-কে কেন্দ্র করিয়া যে কোন ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ DEF আঁক। উহা যেন AB-কে D বিন্দুতে ছেদ করিল। D বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া ঐ একই ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ আঁক, উহা যেন DEF চাপকে E বিন্দুতে ছেদ করিল।

E বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া পূর্বের ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ আঁক, উহা যেন DEF চাপকে F বিন্দুতে ছেদ করিল।

একণে E ও F বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া যে কোন ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি বৃত্তচাপ আঁক, উহারা যেন পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করিল। OC যোগ কর।

OC, AB-র উপর লম্ব হইল।

চিত্র নং 27

প্রমাণ : DE, CE, EF, CF যোগ কর।

একই ব্যাসার্ধের সমান বলিয়া CD, CE, DE, EF ও CF পরস্পর সমান।

অতএব, CED ও CEF দুইটি সমবাহু ত্রিভুজ।

∴ $\angle DCE = \angle ECF = 60^\circ$.

আবার, অঙ্কন অনুসারে ECF কোণটি OC দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হইয়াছে,

∴ $\angle ECO = 30^\circ$. ∴ $\angle OCD = \angle DCE + \angle ECO = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$.

∴ OC, AB-র উপর লম্ব।

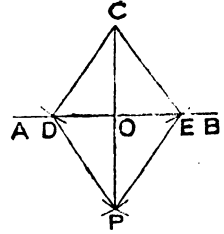
[**দ্রষ্টব্য :** সাধারণতঃ প্রথম প্রণালীতে লম্ব আঁকা হয়। কিন্তু স্থলবিশেষে **অপর প্রণালীগুলি সুবিধাজনক হইয়া থাকে।** যদি AB সরলরেখার A বিন্দুতে **AB-র উপর লম্ব আঁকিতে হয়,** তবে BAকে প্রয়োজনমত বর্ধিত করিয়া প্রথম **প্রণালীতে লম্ব অঙ্কন** করা যায়। এরূপ ক্ষেত্রে কিন্তু দ্বিতীয় বা তৃতীয় অঙ্কন **প্রণালীই সুবিধাজনক** হইয়া থাকে।]

সম্পাদ্য 4

একটি সরলরেখার বহিঃস্থ কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে ঐ সরলরেখার উপর লম্ব অঙ্কিত করিতে হইবে।

[*To draw the perpendicular to a given straight line from a given point outside it.* (Euc. 1-12)]

AB একটি সরলরেখা, C উহার বহিঃস্থ একটি বিন্দু। C বিন্দু হইতে AB-র উপর লম্ব অঙ্কিত করিতে হইবে।

চিত্র নং 28

অঙ্কন : C বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এরূপ ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি বৃত্তচাপ অঙ্কিত কর যেন উহারা AB-কে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে।

মনে কর, উহারা AB-কে D ও E বিন্দুতে ছেদ করিল।

D ও E বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া CE-র অর্ধেকের বেশী কোন ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি বৃত্তচাপ আঁক। উহারা যেন পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করিল। CP যোগ কর। CP রেখা AB-কে O বিন্দুতে ছেদ করিল। CO, ABর উপর লম্ব হইল।

প্রমাণ : CD, CE, PD, PE যোগ কর।

$\triangle$CPD ও $\triangle$CPEএর CD=CE (একই ব্যাসার্ধের সমান)

PD=PE (সমান বৃত্তের ব্যাসার্ধ), এবং CP সাধারণ বাহু,

$\therefore$ ঐ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম। $\therefore$ $\angle$PCD = $\angle$PCE.

আবার, $\triangle$COD ও $\triangle$COE-র CD=CE, CO সাধারণ বাহু,

এবং অন্তর্ভূত $\angle$OCD=অন্তর্ভূত $\angle$OCE ; $\therefore$ **ঐ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম।**

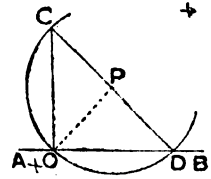
$\therefore$ $\angle$COD = $\angle$COE ; কিন্তু ইহারা সন্নিহিত কোণ হওয়ায় প্রত্যেকে এক সমকোণ। $\therefore$ CO, AB-র উপর লম্ব।

[**দ্রষ্টব্য :** (1) এখানে C-কে কেন্দ্র করিয়া এরূপ ব্যাসার্ধ লইয়া বৃত্তচাপ আঁকিতে হইবে, যেন চাপ দুইটি AB-কে ছেদ করে। অথবা AB-র যে পার্শ্বে C অবস্থিত, তাহার বিপরীত পার্শ্বে একটি বিন্দু (ধর Q) লইয়া তৎপরে C-কে কেন্দ্র ও CQ ব্যাসার্ধ লইয়া বৃত্তচাপ আঁকিলেও হইবে। কারণ, এক্ষেত্রে ঐ চাপ AB-কে দুইটি বিন্দুতে অবশ্যই ছেদ করিবে।

এস্থলে যদি AB হইতে C বিন্দুর লম্ব-দূরত্ব অপেক্ষা ছোট ব্যাসার্ধ লওয়া হয়, তবে অঙ্কিত বৃত্তচাপ ABকে ছেদ করিবে না।

(2) D ও E বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া বৃত্ত অঙ্কনের সময় ব্যাসার্ধটি $\frac{1}{2}$DE অপেক্ষা বৃহত্তর না হইলে চাপ দুইটি পরস্পর ছেদ করিবে না।]

(অন্য প্রণালী)

অঙ্কন : AB-র উপর সুবিধামত কোন বিন্দু D লইয়া CD যোগ কর। CDকে P বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর। P বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া PC ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ অঙ্কিত কর, উহা যেন ADকে O বিন্দুতে ছেদ করিল। CO যোগ কর। CO, AB-র উপর লম্ব হইল।

চিত্র নং 29

প্রমাণ : OP যোগ কর।

∵ $OP = PD$ (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ),

∴ $\angle POD = \angle PDO$;

আবার, ∵ $CP = OP$ (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ),

∴ $\angle COP = \angle OCP$,

∴ সমগ্র $\angle COD = \angle PDO + \angle OCP$ = দুই সমকোণের অর্ধেক
= এক সমকোণ।

∴ CO, AB-র উপর লম্ব।

প্রশ্নমালা 3

1. রুলার ও কম্পাসের সাহায্যে 90°, 45°, $22\frac{1}{2}^\circ$ পরিমাণ কোণ অঙ্কিত কর।

2. কোন সরলরেখা হইতে উহার বহিঃস্থ কোন বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় কর।

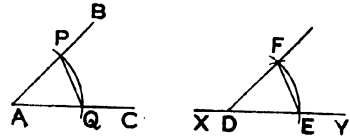
3. একটি ত্রিভুজের কোন বাহুর উপর এরূপ একটি বিন্দু নির্ণয় কর যেন উহা অপর বাহুদ্বয় হইতে সমদূরবর্তী হয়।

4. ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দু তিনটি হইতে সমদূরবর্তী একটি বিন্দু নির্ণয় কর।

সম্পাদ্য 5

কোন সরলরেখার একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে একটি নির্দিষ্ট কোণের সমান একটি কোণ অঙ্কিত করিতে হইবে।

[*At a given point in a given straight line to draw an angle equal to a given angle.* (Euc. 1-23)]

BAC একটি নির্দিষ্ট কোণ এবং XY একটি সরলরেখার উপর D একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। XY রেখার D বিন্দুতে BAC কোণের সমান একটি কোণ অঙ্কিত করিতে হইবে।

চিত্র নং 30

অঙ্কন : A বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া যে কোন ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ অঙ্কিত কর। উহা যেন AB ও AC বাহুকে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করিল।

D বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া AP-র সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ অঙ্কিত কর, উহা যেন XY রেখাকে E বিন্দুতে ছেদ করিল।

E বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া PQ ব্যাসার্ধ লইয়া আর একটি বৃত্তচাপ অঙ্কিত কর। এই চাপ যেন পূর্ব চাপটিকে F বিন্দুতে ছেদ করিল। DF যোগ কর।

এক্ষণে, FDE কোণটি BAC কোণের সমান হইল।

প্রমাণ : PQ ও EF যোগ কর।

$\triangle APQ$ ও $\triangle DEF$এর $AP = DF$ (সমান বৃত্তের ব্যাসার্ধ)

$AQ = DE$ (" " ")

এবং $PQ = EF$ (" " ")

$\therefore$ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম। $\therefore$ $\angle FDE = \angle PAQ = \angle BAC$.

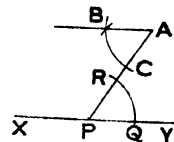
সম্পাদ্য 6

কোন নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান্তরাল একটি সরলরেখা অঙ্কিত করিতে হইবে।

[*Through a given point to draw a straight line parallel to a given straight line.*]

XY একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা এবং A একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। A বিন্দু দিয়া XY-এর সমান্তরাল একটি সরলরেখা অঙ্কিত করিতে হইবে।

চিত্র নং 31

অঙ্কন : XY-এর উপর একটি বিন্দু P লইয়া AP যোগ কর।

PA রেখায় A বিন্দুতে $\angle APY$এর সমান এবং একান্তর করিয়া $\angle BAP$ অঙ্কিত কর। [সম্পাদ্য 5 অনুসারে]

AB সরলরেখা XYএর সমান্তরাল হইল।

প্রমাণ : $\because$ $\angle BAP = \angle APY$ এবং ইহারা একান্তর কোণ,

$\therefore$ AB ও XY সমান্তরাল।

প্রশ্নমালা 4

1. কোন সরলরেখার একটি বিন্দুতে একটি নির্দিষ্ট কোণের সম্পূরক কোণ অঙ্কিত কর।

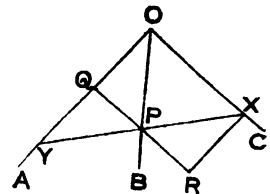
2. একটি $135°$ কোণ অঙ্কিত কর।

3. B কোণ অপেক্ষা A কোণ বৃহত্তর। একটি $\frac{1}{2}(A-B)$ কোণ আঁক।

4. $\angle A$ একটি নির্দিষ্ট কোণ। (i) $90°+\frac{A}{2}$ ও (ii) $90°-\frac{A}{2}$ কোণ দুইটি অঙ্কিত কর।

5. একটি সরলরেখার বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে এরূপ একটি সরলরেখা অঙ্কিত কর, যেন উহা ঐ সরলরেখার সহিত একটি নির্দিষ্ট কোণে নত থাকে।

6. তিনটি সরলরেখা একই বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। উহাদের এরূপ একটি ভেদক অঙ্কিত কর যেন প্রথম ও তৃতীয় সরলরেখা দ্বারা ছিন্ন অংশ দ্বিতীয় সরলরেখা দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

[**Hints :** OA, OB, OC সরলরেখাত্রয় O বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। দ্বিতীয় সরলরেখা OB-র উপর P একটি বিন্দু লও। $PQ \perp OA$ টান এবং QPকে R বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত কর, যেন $PR = PQ$ হয়।

$RX \parallel QO$ টান, RX যেন OCকে X বিন্দুতে ছেদ করিল। XP যোগ করিয়া XPকে বর্ধিত কর, উহা যেন OAকে Y বিন্দুতে ছেদ করিল। XY সরলরেখা উদ্দিষ্ট ভেদক হইল।

চিত্র নং 32

প্রমাণ সহজ [$\triangle PQY$ ও $\triangle PRX$ সর্বসম প্রমাণ কর।...]

তৃতীয় অধ্যায়

ত্রিভুজ অঙ্কন

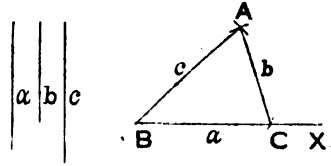
সম্পাদ্য 7

✓ 27/10

একটি ত্রিভুজের বাহু তিনটির দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে; ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

[*To construct a triangle having given its three sides.*
(Euc. 1-22)]

মনে কর, ত্রিভুজটির তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য a, b, c দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

চিত্র নং 33

অঙ্কন : BX একটি সরল-রেখা লইয়া উহা হইতে aর সমান BC অংশ ছেদ কর। Bকে কেন্দ্র করিয়া c-র সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ অঙ্কিত কর।

আবার, Cকে কেন্দ্র করিয়া b-র সমান ব্যাসার্ধ লইয়া আর একটি বৃত্তচাপ অঙ্কিত কর। এই চাপ দুইটি যেন A বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিল।

AB ও AC যোগ কর। △ABC নির্ণেয় ত্রিভুজ।

প্রমাণ : অঙ্কন অনুসারে BC$=a$, AC$=b$ এবং AB$=c$.

[**দ্রষ্টব্য :** (i) BX হইতে a-র সমান BC অংশ ছেদ করিবার জন্য Bকে কেন্দ্র করিয়া a ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ আঁকিবে। উহা BXকে C বিন্দুতে ছেদ করিলে BC$=a$ হইবে।

(ii) B ও C বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া BCর এক পার্শ্বে বৃত্তচাপ দুইটি আঁকা হইয়াছে। উহার বিপরীত পার্শ্বে ঐ চাপ দুইটি আঁকিয়া আর একটি নির্ণেয় ত্রিভুজ পাওয়া যায়।

(iii) তোমরা জান যে, ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর। অতএব, প্রদত্ত a, b, c দৈর্ঘ্য তিনটি এরূপ হওয়া আবশ্যক যে, উহাদের যে কোন দুইটির সমষ্টি যেন তৃতীয়টি অপেক্ষা বৃহত্তর হয়। যদি তাহা না হয়, তবে ত্রিভুজ অঙ্কন অসম্ভব হইবে।

(iv) **প্রচলিত প্রথা** অনুসারে ABC ত্রিভুজের A-কোণের বিপরীত বাহুকে a অক্ষর দ্বারা, B ও C কোণের বিপরীত বাহুকে যথাক্রমে b ও c অক্ষর দ্বারা সূচিত করিতে হয়। a, b, c বাহুর বিপরীত কোণকে অবশ্য যথাক্রমে ∠A, ∠B ও ∠C নাম দিতে হইবে।]

প্রশ্নমালা 5

1. 3, 4 ও 5 সেন্টিমিটার বাহুবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ আঁক।

2. 3, 4 ও 7 সেন্টিমিটার বাহুবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ আঁক। যদি অঙ্কন সম্ভব না হয়, তবে তাহার কারণ দেখাও।

3. 3, 3·5 ও 4 সেন্টিমিটার এই তিনটি দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে। দ্বিতীয় দৈর্ঘ্যটির উপর এরূপ দুইটি ত্রিভুজ আঁক, যেন তাহাদের বাহুগুলি ঐ দৈর্ঘ্য তিনটির সমান হয়।

4. AB সরলরেখার উপর একটি সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত কর।

5. $60°$, $30°$, $15°$, $75°$, $105°$, $150°$ মাপের এক একটি কোণ আঁক।

6. একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি এক ইঞ্চি এবং একটি বাহু 1·6 ইঞ্চি; ত্রিভুজটি আঁক।

7. একটি সমকোণকে সমান তিনভাগে বিভক্ত কর। [C. U.]

8. $45°$ কোণকে সমান তিন ভাগে বিভক্ত কর।

9. একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত করিয়া সরলরেখাটিকে সমান তিন ভাগে বিভক্ত কর।

[**Hints :** AB প্রদত্ত সরলরেখার উপর ABC সমবাহু ত্রিভুজ আঁক। ∠A ও ∠B-র সমদ্বিখণ্ডক টান, উহারা যেন O বিন্দুতে ছেদ করিল। OP ∥ CA এবং OQ ∥ CB আঁক, OP ও OQ যেন ABকে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করিল। AB সরলরেখা P ও Q বিন্দুতে সমান তিন ভাগে বিভক্ত হইল। ∠OPQ = অনুরূপ ∠A = $60°$. অনুরূপে △OPQ সমবাহু।

আবার, ∠OAP + ∠AOP = ∠OPQ = $60°$;

কিন্তু ∠OAP = $30°$ ∴ ∠AOP = $30°$, ∴ OP = AP;

অনুরূপে OQ = BQ. ∴ AP = PQ = BQ.]

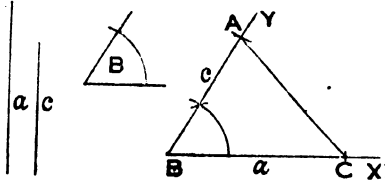
10. একটি ত্রিভুজের ভূমি 6 সে. মিটার এবং অপর বাহু দুইটি 3 সে. মি. ও 3·5 সে. মিটার; ত্রিভুজটি আঁক এবং মাপিয়া উহার উচ্চতা নির্ণয় কর।

[C. U. '20]

সম্পাদ্য 8

একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহু ও তাহাদের অন্তর্ভূত কোণ দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

[*To construct a triangle having given two sides and the included angle.*]

ত্রিভুজের দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য a ও c এবং উহাদের অন্তর্ভূত ∠B দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

চিত্র নং 34

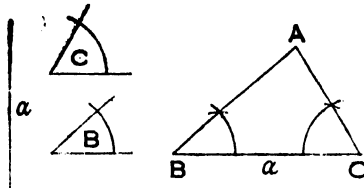
অঙ্কন : BX একটি সরলরেখা লইয়া উহা হইতে BC$=a$ কাটিয়া লও। BC-র B বিন্দুতে প্রদত্ত ∠B-র সমান করিয়া ∠CBY অঙ্কিত কর। BY হইতে c-র সমান BA অংশ কাটিয়া লও। AC যোগ কর। △ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল।

প্রমাণ : অঙ্কন অনুসারে BC$=a$, BA$=c$ এবং উহাদের অন্তর্ভূত ∠ABC$=$প্রদত্ত ∠B.

সম্পাদ্য 9

একটি ত্রিভুজের একটি বাহু ও উহার সংলগ্ন কোণ দুইটি দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

[*To construct a triangle having given a side and the angles adjacent to it.*]

ত্রিভুজের একটি বাহু a এবং ঐ বাহুর সংলগ্ন ∠B ও ∠C দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

চিত্র নং 35

অঙ্কন : a দৈর্ঘ্যের সমান BC একটি সরলরেখা লও। উহার B ও C বিন্দুতে একই দিকে যথাক্রমে প্রদত্ত ∠B ও ∠C-র সমান ∠CBA ও ∠BCA অঙ্কিত কর। উহাদের BA ও CA বাহু দুইটি যেন পরস্পর A বিন্দুতে ছেদ করিল। △ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল।

প্রমাণ : অঙ্কন অনুসারে BC$=a$ এবং BC বাহুর সংলগ্ন ∠ABC$=$∠B এবং ∠ACB$=$∠C.

সম্পাদ্য 10

একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহু ও তাহাদের একটির বিপরীত কোণ দেওয়া আছে; ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

[*To construct a triangle having given two sides and the angle opposite to one of them.*]

চিত্র নং 36

ত্রিভুজের দুইটি বাহু b ও c এবং b-র বিপরীত ∠B দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন: BX একটি সরলরেখা লও। BXএর B বিন্দুতে প্রদত্ত ∠B-র সমান করিয়া ∠XBY অঙ্কিত কর।

BY হইতে c-র সমান BA অংশ কাটিয়া লও।

A বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া b-র সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ অঙ্কিত কর, উহা যেন BXকে C ও C′ বিন্দুতে ছেদ করিল। AC ও AC′ যোগ কর।

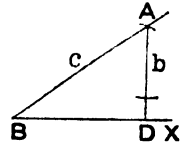
ABC ও ABC′ এই দুইটি ত্রিভুজই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল।

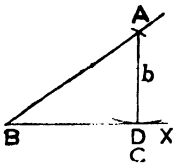
প্রমাণ: অঙ্কন অনুসারে △ABC-র AC=b, AB=c এবং AC বাহুর বিপরীত ∠ABC=প্রদত্ত ∠B.

আবার, △ABC′এর AC′=b, AB=c এবং ∠ABC′=∠B.

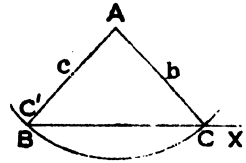
[**দ্রষ্টব্য:** এখানে ত্রিভুজের প্রদত্ত তিনটি অঙ্গ লইয়া দুইটি সমাধান পাওয়া গেল অর্থাৎ △ABC ও △ABC′ দুইটি ত্রিভুজ অঙ্কিত হইয়াছে, এইজন্য এই সমাধানকে **দ্ব্যর্থবোধক** (ambiguous case) বলে।

এখানে যে উপাত্ত (data) দেওয়া আছে তাহা হইতে বিবিধ সমাধান পাওয়া যাইতে পারে। পর-পৃষ্ঠায় সেইগুলি দেওয়া হইল।]

(1) যদি A হইতে BX-র উপর অঙ্কিত লম্ব অপেক্ষা b-দৈর্ঘ্য ক্ষুদ্রতর হয়, তবে কোন ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভব হইবে না। কারণ, b যদি AD লম্ব অপেক্ষা ছোট হয়, তবে Aকে কেন্দ্র করিয়া b ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্তচাপ BXকে ছেদ করিবে না, সুতরাং সেক্ষেত্রে **কোন ত্রিভুজই আঁকা যাইবে না**। অতএব, এরূপ ক্ষেত্রে b-র দৈর্ঘ্য যেন BX হইতে A বিন্দুর দূরত্ব অপেক্ষা ছোট না হয়।

চিত্র নং 37

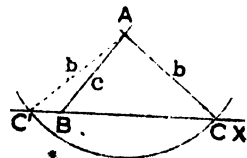
(2) যদি b=AD হয় অর্থাৎ যদি b-র দৈর্ঘ্য A হইতে BX-এর উপর অঙ্কিত লম্বের সমান হয়, তবে A-কে কেন্দ্র করিয়া b ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্তচাপ BX-এর সহিত কেবল একটি মাত্র বিন্দুতে (D বিন্দুতে) মিলিত হইবে।

চিত্র নং 38

এখানে, লক্ষ্য কর যে C ও C′ বিন্দু দুইটি D বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। অতএব, এক্ষেত্রে **একটি ত্রিভুজ** পাওয়া যাইবে এবং তাহা **সমকোণী** হইবে, কারণ, ∠D=1 সমকোণ।

(3) যদি $b=c$ হয়, তবে b ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্তচাপটি BXকে C বিন্দুতে ছেদ করিবে এবং B বিন্দু দিয়া যাইবে। এখানে দেখ, C′ বিন্দু B-র সহিত সমাপতিত হইয়াছে।

অতএব, এক্ষেত্রে **একটি ত্রিভুজ** অঙ্কিত হইবে এবং তাহার AB ও AC বাহুদ্বয় সমান বলিয়া **ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু** হইবে।

চিত্র নং 39

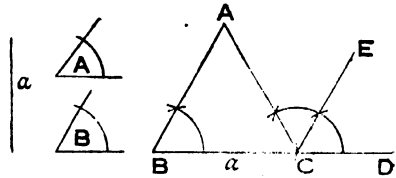
(4) যদি $b<c$ হয়, তবে দুইটি ত্রিভুজ পাওয়া যাইবে। সম্পাদ্য 10 দেখ।

(5) যদি $b>c$ হয়, তবে বৃত্তচাপটি BXকে C বিন্দুতে এবং CB-র বর্ধিতাংশকে C′ বিন্দুতে ছেদ করিবে। এখানে কিন্তু ABC′ ত্রিভুজটি গ্রাহ্য হইবে না; কারণ ∠ABC′ প্রদত্ত কোণের সমান না হইয়া তাহার সম্পূরক হইবে। অতএব, এক্ষেত্রে কেবল একটি মাত্র ত্রিভুজ (△ABC) অঙ্কন সম্ভব হইবে।

চিত্র নং 40

সম্পাদ্য 11

ত্রিভুজের দুইটি কোণ এবং উহাদের মধ্যে একটির বিপরীত বাহু দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি আঁকিতে হইবে।

[*To construct a triangle having given two angles and a side opposite to one of them.*] [C. U. '38, '40 ; D. B. '39]

কোন ত্রিভুজের ∠A ও ∠B দুইটি কোণ এবং A কোণের বিপরীত বাহু *a* দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকিতে হইবে।

চিত্র নং 41

অঙ্কন : যে কোন সরলরেখা BD লইয়া উহা হইতে BC = *a* কাটিয়া লও। C বিন্দুতে ∠DCE = ∠B এবং ∠ECA = ∠A আঁক। B বিন্দুতে ∠CBA = ∠B আঁক। BA যেন CAকে A বিন্দুতে ছেদ করিল। ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল।

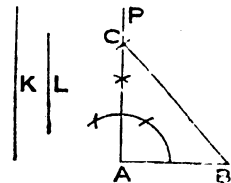
প্রমাণ : △ABC-এর বহিঃস্থ ∠ACD = ∠ABC + ∠BAC,

কিন্তু ∠ABC = ∠B = ∠DCE, ∴ ∠BAC = ∠ACE = ∠A, এবং BC = *a*.

সম্পাদ্য 12

কোন সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও অপর একটি বাহু প্রদত্ত আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

[*To construct a right-angled triangle having given the hypotenuse and a side.*]

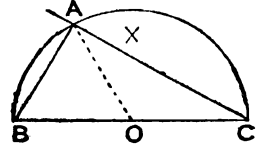
একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ K ও একটি বাহু L দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

চিত্র নং 42

অঙ্কন : L-এর সমান AB সরলরেখা লও। A বিন্দুতে ABর উপর AP লম্ব টান। Bকে কেন্দ্র করিয়া K-এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ আঁক, ইহা যেন APকে C বিন্দুতে ছেদ করিল। BC যোগ কর। △ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল।

প্রমাণ : অঙ্কন অনুসারে ∠BAC সমকোণ, AB = L এবং অতিভুজ BC = K.

[**দ্রষ্টব্য :** PAকে বর্ধিত করিয়া ABর অপর পার্শ্বে অনুরূপভাবে আর একটি সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কন করা যায়।]

অন্য প্রণালী

অঙ্কন : অতিভুজ K-এর সমান BC সরলরেখা লও ; উহাকে O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর। O বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া OB-র সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি অর্ধবৃত্ত অঙ্কিত কর। B-কে কেন্দ্র করিয়া L ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ অঙ্কিত কর, উহা যেন অর্ধবৃত্তের চাপকে A বিন্দুতে ছেদ করিল। AB ও AC যোগ কর।

ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল।

চিত্র নং 43

প্রমাণ : AO যোগ কর। ∵ OA=OB (ব্যাসার্ধ), ∴ ∠OAB=∠OBA

আবার, ∵ OA=OC (ব্যাসার্ধ), ∴ ∠OAC=∠OCA.

∴ সমগ্র ∠BAC=∠OBA+∠OCA=∠ABC+∠ACB

=দুই সমকোণের অর্ধেক=এক সমকোণ,

এবং অঙ্কন অনুসারে অতিভুজ BC=K এবং AB বাহু=L.

প্রশ্নমালা 6

1. △ABC-র $a=2$ সে. মি., $c=3$ সে. মি. এবং ∠B=30° ; ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

2. কোন ত্রিভুজের 1·5 ডেসি মিটার দীর্ঘ একটি বাহুর সংলগ্ন কোণ দুইটির পরিমাণ 60° ও 45° ; ত্রিভুজটি আঁক।

3. ABC ত্রিভুজের $a=3$ সেণ্টি মিটার, ∠B=45°, ∠A=75° ; ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

4. একটি ত্রিভুজের একটি বাহু=2·5 সে. মিটার এবং উহার সংলগ্ন কোণদ্বয়ের সমষ্টি 120° ; ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

5. এমন একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত কর, যাহার ভূমি 3·5 সে. মিটার এবং ভূমিসংলগ্ন কোণদ্বয়ের সমষ্টি 60°.

6. এরূপ একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ আঁক যেন তাহার ভূমি 2 ইঞ্চি এবং শীর্ষ হইতে ভূমির উপর লম্ব 3 ইঞ্চি হয়।

7. নিম্নের প্রদত্ত অঙ্গ-বিশিষ্ট সমকোণী ত্রিভুজগুলি অঙ্কিত কর :—

(i) সমকোণ-সংলগ্ন বাহু দুইটি 9 সে. মিটার ও 12 সে. মিটার ;

(ii) একটি বাহু=1·5″ এবং উহার সংলগ্ন একটি কোণ 30° ;

(iii) অতিভুজ = 3 সে. মিটার এবং উহার সংলগ্ন একটি কোণ 45° ;

(iv) একটি বাহু = 5 সে. মিটার ও উহার বিপরীত সূক্ষ্মকোণ 60° ;

(v) অতিভুজ = 3·5″ এবং সমকৌণিক বিন্দু হইতে অতিভুজের দূরত্ব = 1·5″ ;

(vi) একটি বাহু = 2″ এবং অতিভুজের সমদ্বিখণ্ডক মধ্যমা 1·5″.

8. নিম্নলিখিত উপাত্তগুলি লইয়া এক একটি ABC ত্রিভুজ অঙ্কিত কর :—

(i) $a = 3$ সে. মি., $b = 4$ সে. মি., $\angle A = 30^\circ$;

(ii) $a = 2·5$ সে. মিটার, $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 75^\circ$;

(iii) $a = 3''$, $c = 4''$ এবং $\angle C = \angle A + \angle B$.

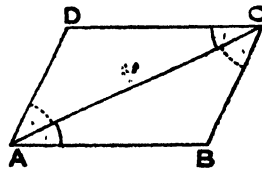
চতুর্থ অধ্যায়

6. ***সামান্তরিক সম্বন্ধীয় উপপাদ্য*** [নূতন পাঠ]

উপপাদ্য 17

সামান্তরিকের (1) বিপরীত বাহুগুলি পরস্পর সমান, (2) বিপরীত কোণগুলি পরস্পর সমান এবং (3) প্রত্যেক কর্ণ সামান্তরিককে দুইটি সর্বসম ত্রিভুজে বিভক্ত করে।

[*The opposite sides and angles of a parallelogram are equal and each diagonal bisects the parallelogram.*]

ABCD একটি সামান্তরিক এবং AC ইহার একটি কর্ণ। প্রমাণ করিতে হইবে যে, (1) AB = CD, AD = BC ; (2) ∠ABC = ∠ADC, ∠BAD = ∠BCD ; (3) AC ও BD কর্ণদ্বয় প্রত্যেকে সামান্তরিকটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে অর্থাৎ △ABC ও △ADC সর্বসম এবং △ABD ও △BCD সর্বসম।

চিত্র নং 44

প্রমাণঃ ∵ AB ও CD সমান্তরাল এবং AC ইহাদের ছেদক,

∴ ∠BAC = একান্তর ∠ACD.

আবার, ∵ BC ও AD সমান্তরাল এবং AC উহাদের ছেদক,

∴ ∠ACB = একান্তর ∠DAC.

এক্ষণে, $\triangle ABC$ ও $\triangle ADC$-র $\angle BAC = \angle ACD$, $\angle ACB = \angle DAC$,
এবং AC সাধারণ বাহু ; ∴ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম।

∴ $AB = CD$, $BC = AD$······(1), $\angle ABC = \angle ADC$···(2)

এবং কর্ণ AC সামান্তরিককে দুইটি সর্বসম ত্রিভুজে বিভক্ত করিয়াছে।
অনুরূপে BD কর্ণও সামান্তরিককে দুইটি সর্বসম ত্রিভুজে বিভক্ত করে।······(3)

আবার, ∵ $\angle BAC = \angle ACD$, এবং $\angle DAC = \angle ACB$,

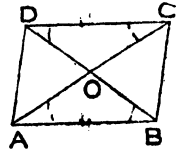
∴ সমগ্র $\angle BAD =$ সমগ্র $\angle BCD$······(2).

উপপাদ্য 18

সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

[*The diagonals of a parallelogram bisect each other.*]

চিত্র নং 45

ABCD সামান্তরিকের AC ও BD কর্ণ দুইটি পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে, $AO = CO$ এবং $BO = DO$.

প্রমাণ ঃ ∵ $AB \parallel CD$ এবং AC ইহাদের ছেদক,

∴ $\angle BAC =$ একান্তর $\angle ACD$.

আবার, ∵ $AB \parallel CD$ এবং BD ইহাদের ছেদক,

∴ $\angle ABD =$ একান্তর $\angle BDC$.

এক্ষণে, $\triangle AOB$ ও $\triangle COD$-র

$\angle CAB = \angle OCD$, $\angle OBA = \angle ODC$, এবং $AB = CD$,

∴ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম। ∴ $AO = CO$ এবং $BO = DO$.

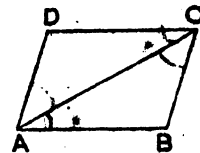
উপপাদ্য 19

যে চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলি পরস্পর সমান, তাহা একটি সামান্তরিক।

[*A quadrilateral is a parallelogram, if both pairs of its opposite sides are equal.*]

চিত্র নং 46

ABCD চতুর্ভুজের $AB = CD$ এবং $BC = AD$.

প্রমাণ করিতে হইবে যে, ABCD একটি সামান্তরিক। AC যোগ কর।

প্রমাণ ঃ $\triangle ABC$ ও $\triangle ADC$-র

$AB = CD$, $BC = AD$ এবং AC সাধারণ বাহু, $\therefore$ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম।

$\therefore \quad \angle BAC = \angle ACD$ এবং $\angle ACB = \angle DAC$.

এক্ষণে, $\because \quad \angle BAC = \angle ACD$ এবং ইহারা একান্তর কোণ,

$\therefore \quad AB$ ও CD সমান্তরাল।

আবার, $\because \quad \angle ACB = \angle DAC$ এবং ইহারা একান্তর কোণ,

$\therefore \quad BC$ ও AD সমান্তরাল। এক্ষণে, $\because \quad AB \parallel CD$ এবং $BC \parallel AD$,

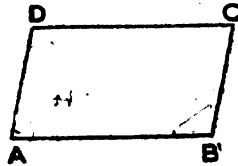
$\therefore \quad ABCD$ একটি সামান্তরিক।

উপপাদ্য 20

যে চতুর্ভুজের বিপরীত কোণগুলি সমান, তাহা একটি সামান্তরিক।

[*A quadrilateral is a parallelogram if its opposite angles are equal.*]

$ABCD$ চতুর্ভুজের $\angle A = \angle C$ এবং $\angle B = \angle D$.

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $ABCD$ একটি সামান্তরিক।

চিত্র নং 47

প্রমাণ ঃ কোন চতুর্ভুজের চারিটি কোণের সমষ্টি $= 4$ সমকোণ।

$\because$ এখানে $\angle A = \angle C$ এবং $\angle B = \angle D$,

$\therefore \quad \angle A + \angle B = \angle C + \angle D =$ চতুর্ভুজের কোণ চারিটির অর্ধেক

$= 2$ সমকোণ,

$\therefore$ $AD \parallel BC$ ($\because$ ABর একই পার্শ্বের অন্তঃকোণদ্বয়ের সমষ্টি 2 সমকোণ)।

আবার, $\because \quad \angle A = \angle C$ এবং $\angle D = \angle B$.

$\therefore$ $\angle A + \angle D = \angle C + \angle B =$ চতুর্ভুজের কোণ চারিটির অর্ধেক $= 2$ সমকোণ,

$\therefore \quad AB \parallel CD$.

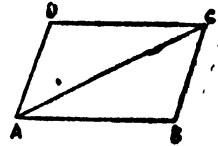
এক্ষণে, $\because \quad AB \parallel CD$ এবং $AD \parallel BC$, $\therefore$ $ABCD$ একটি সামান্তরিক।

H উপপাদ্য 21 6|10 LL 13/5

যে চতুর্ভুজের দুইটি বিপরীত বাহু সমান ও সমান্তরাল, তাহা একটি সামান্তরিক।

[*A quadrilateral is a parallelogram, if one pair of its opposite sides are equal and parallel.*]

ABCD চতুর্ভুজের AB ও CD বাহু পরস্পর সমান ও সমান্তরাল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, ABCD একটি সামান্তরিক।

চিত্র নং 48

AC যোগ কর।

প্রমাণঃ ∵ AB ∥ CD এবং AC ইহাদের ছেদক,

∴ ∠BAC = একান্তর ∠ACD.

এখন, △ABC ও △ACD-র AB = CD, AC সাধারণ বাহু

এবং অন্তর্ভূত ∠BAC = অন্তর্ভূত ∠ACD, ∴ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম।

∴ ∠ACB = ∠DAC, কিন্তু ইহারা একান্তর কোণ,

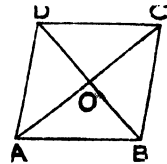
∴ AD ও BC সমান্তরাল।

∵ AB ∥ CD এবং AD ∥ BC, ∴ ABCD একটি সামান্তরিক।

H উপপাদ্য 22 18/5

কোন চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় পরস্পর সমদ্বিখণ্ডিত হইলে, তাহা একটি সামান্তরিক হইবে।

[*A quadrilateral is a parallelogram, if its diagonals bisect each other.*]

ABCD চতুর্ভুজের AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইয়াছে (অর্থাৎ AO = CO এবং BO = DO)।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, ABCD একটি সামান্তরিক।

চিত্র নং 49

প্রমাণ: △AOB ও △COD-র AO = CO, BO = DO (স্বীকার)

এবং ∠AOB = বিপ্রতীপ ∠COD, ∴ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম।

∴ AB=CD, এবং ∠OAB=∠OCD, কিন্তু ইহারা একান্তর কোণ,

∴ AB ∥ CD, ∴ AB ও CD বিপরীত বাহুদ্বয় সমান ও সমান্তরাল,

∴ ABCD একটি সামান্তরিক।

বিবিধ উদাহরণ 1

উদা. 1. প্রমাণ কর যে, রম্বস একটি সামান্তরিক। [C. U. '23]

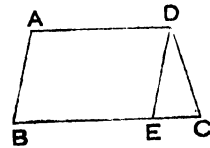
ABCD একটি রম্বস [চিত্র আঁকিয়া লও]

প্রমাণ করিতে হইবে যে, ABCD একটি সামান্তরিক।

প্রমাণ ঃ ∵ রম্বসের চারিটি বাহু সমান, ∴ উহার বিপরীত বাহুগুলিও পরস্পর সমান, ∴ উহা একটি সামান্তরিক [উপ. 19]

উদা. 2. সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়মের ভূমিস্থ কোণগুলি পরস্পর সমান। মনে কর, ABCD একটি সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়াম। ইহার AD ∥ BC.

প্রমাণ করিতে হইবে যে, উহার ভূমিস্থ ∠B ও ∠C পরস্পর সমান।

অঙ্কন ঃ DE ∥ AB টান, উহা যেন BCকে E বিন্দুতে ছেদ করিল।

চিত্র নং 50

প্রমাণ ঃ ∵ AD ∥ BE (স্বীকার),

এবং AB ∥ DE (অঙ্কন), ∴ ABED একটি সামান্তরিক।

∴ AB=DE ; কিন্তু AB=DC (∵ ট্রাপিজিয়মটি সমদ্বিবাহু,

∴ উহার তির্যক বাহুদ্বয় সমান)

∴ DE=DC, ∴ ∠DCE=∠DEC=অনুরূপ ∠ABC (∵ AB ∥ DE)।

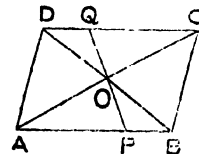
উদা. 3. কোন সামান্তরিকের কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়া যে কোন সরলরেখা টানিলে উহা সামান্তরিকটিকে সমান দুই অংশে বিভক্ত করে।

ABCD সামান্তরিকের কর্ণ AC ও BD পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। O বিন্দু দিয়া দুইটি বিপরীত বাহু পর্যন্ত যে কোন সরলরেখা POQ টানা হইয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

ক্ষেত্র APQD=ক্ষেত্র PBCQ.

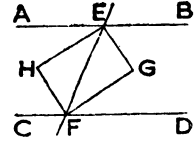
চিত্র নং 51

প্রমাণ ঃ △AOP ও △COQএর ∠AOP=বিপ্রতীপ ∠COQ, ∠OAP=একান্তর ∠OCQ এবং AO=CO (∵ সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পর সমদ্বিখণ্ডিত হয়), ∴ △AOP ও △COQ সর্বসম।

অনুরূপে ΔDOQ ও ΔPOB সর্বসম ; আবার, $\Delta AOD \equiv \Delta BOC$,

$\therefore \quad \Delta AOP + \Delta DOQ + \Delta AOD = \Delta COQ + \Delta POB + \Delta BOC$,

$\therefore$ ক্ষেত্র APQD = ক্ষেত্র PBCQ.

উদা. 4. দুইটি সমান্তরাল সরলরেখা ও উহাদের একটি ভেদকের অন্তর্ভূত কোণগুলির সমদ্বিখণ্ডকগুলি একটি আয়তক্ষেত্র উৎপন্ন করে।

EF ছেদক AB ও CD সমান্তরাল রেখাদ্বয়কে E ও F বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। EG ও EH, E বিন্দুস্থ অন্তঃকোণ দুইটিকে এবং FH ও FG, F বিন্দুস্থ অন্তঃকোণ দুইটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে EGFH একটি আয়তক্ষেত্র।

চিত্র নং 52

প্রমাণ : $\angle AEF$ = একান্তর $\angle EFD$,

সুতরাং ইহাদের অর্ধেকগুলিও সমান।

$\therefore \quad \angle HEF = \angle EFG$, কিন্তু ইহারা একান্তর কোণ, $\therefore$ HE ∥ FG.

অনুরূপে, HF ∥ EG. অতএব, HEGF একটি সামান্তরিক।

আবার, $\angle HEG = \frac{1}{2}(\angle AEF + \angle BEF)$ = দুই সমকোণের অর্ধেক

= 1 সমকোণ।

এক্ষণে HEGF সামান্তরিকের একটি কোণ সমকোণ বলিয়া ইহার সব কোণই সমকোণ, সুতরাং ইহা একটি আয়তক্ষেত্র।

প্রশ্নমালা 7

1. সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় সমান হইলে উহা একটি আয়তক্ষেত্র হইবে।

[C. U. '24]

2. সামান্তরিকের কোন বাহু-সংলগ্ন কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডক দুইটির অন্তর্ভূত কোণটি সমকোণ।

3. সামান্তরিকের যে কোন বিপরীত বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু সংযোজক রেখা উহাকে দুইটি সামান্তরিকে বিভক্ত করে।

4. কোন সামান্তরিকের কোণগুলির সমদ্বিখণ্ডকগুলি দ্বারা উৎপন্ন চতুর্ভুজটি একটি আয়তক্ষেত্র হইবে।

5. P, Q, R, S যথাক্রমে ABCD আয়তক্ষেত্রের বাহুগুলির মধ্যবিন্দু। প্রমাণ কর যে, PQRS একটি রম্বস।

6. দুইটি সমান্তরাল সরলরেখার ব্যবধান সতত সমান।

7. সামান্তরিকের কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়া উহার দুই বাহু পর্যন্ত অঙ্কিত যে কোন সরলরেখা ঐ বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়। [C. U. '31]

8. বর্গক্ষেত্রের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে। [C. U. '22]

9. রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পর সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

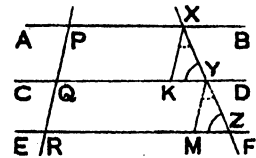
10. AB বাহুর উপর ABCD ও ABPQ দুইটি সামান্তরিক। প্রমাণ কর যে, CDQP একটি সামান্তরিক।

11. $\triangle$ABC ও $\triangle$XYZ-এর AB ও BC বাহু যথাক্রমে XY ও YZ বাহুর সমান ও সমান্তরাল হইলে, AC ও XZ সমান ও সমান্তরাল হইবে। [P. U.]

উপপাদ্য 23

তিন বা ততোধিক সমান্তরাল সরলরেখা কোন ভেদক হইতে সমান সমান অংশ ছিন্ন করিলে, উহারা অপর যে কোন ভেদক হইতেও সমান সমান অংশ ছিন্ন করিবে।

[*If three or more parallel straight lines make equal intercepts on any transversal, they make equal tntercepts on any other transversal.*]

AB, CD ও EF তিনটি পরস্পর সমান্তরাল সরলরেখা PQR ভেদক হইতে PQ ও QR দুইটি সমান অংশ ছিন্ন করিয়াছে এবং উহারা XYZ ছেদক হইতে XY ও YZ দুই অংশ ছিন্ন করিয়াছে।

চিত্র নং 53

প্রমাণ করিতে হইবে যে, XY=YZ.

অঙ্কন : X ও Y বিন্দু হইতে PQRএর সমান্তরাল করিয়া যথাক্রমে XK ও YM সরলরেখা টান। উহারা যেন যথাক্রমে CDকে K বিন্দুতে এবং EF-কে M বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ : $\because$ অঙ্কন অনুসারে PQKX ও QRMY এক একটি সামন্তরিক,
$\therefore$ XK=PQ এবং YM=QR, কিন্তু PQ=QR (স্বীকার), $\therefore$ XK=YM.
আবার, $\because$ XK ও YM প্রত্যেক PQRএর সমান্তরাল, $\therefore$ XK $\parallel$ YM.

এক্ষণে ΔXYK ও ΔYZM-এর,

$\angle XYK$ = অনুরূপ $\angle YZM$ ($\because CD \parallel EF$),

$\angle KXY$ = অনুরূপ $\angle MYZ$ ($\because XK \parallel YM$),

এবং $XK = YM$ (প্রমাণিত), $\therefore$ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম। $\therefore$ $XY = YZ$.

উপপাদ্য 24

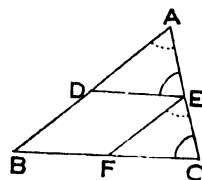
ত্রিভুজের একটি বাহুর মধ্যবিন্দু হইতে অপর একটি বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা টানিলে উহা ত্রিভুজের তৃতীয় বাহুকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

[*The straight line drawn through the middle point of one side of a triangle parallel to another side bisects the third side.*]

ABC ত্রিভুজের AB বাহুর মধ্যবিন্দু D হইতে BC বাহুর সমান্তরাল করিয়া অঙ্কিত DE সরলরেখা ACকে E বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

চিত্র নং 54

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $AE = CE$.

অঙ্কন : E বিন্দু হইতে $EF \parallel AB$ টান, উহা যেন BCকে F বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ : $\because$ $DE \parallel BF$ এবং $DB \parallel EF$, $\therefore$ BDEF একটি সামান্তরিক ; $\therefore$ $EF = BD = AD$ ($\because$ ABর মধ্যবিন্দু D)।

এক্ষণে, ΔADE ও ΔEFCএর $AD = EF$ (প্রমাণিত ,)

$\angle AED$ = অনুরূপ $\angle ECF$ ($\because ED \parallel BC$)

এবং $\angle DAE$ = অনুরূপ $\angle FEC$ ($\because EF \parallel AB$),

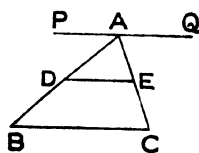
$\therefore$ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম। $\therefore$ $AE = CE$.

সহজ বিকল্প প্রমাণ

ABC ত্রিভুজের AB-র মধ্যবিন্দু D এবং BC-র সমান্তরাল করিয়া অঙ্কিত DE সরলরেখা ACকে E বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

চিত্র নং 55

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $AE = CE$.

অঙ্কন : A বিন্দুর মধ্য দিয়া BC-র সমান্তরাল PAQ সরলরেখা টান।

প্রমাণ : $\because$ $DE \parallel BC$ এবং $PAQ \parallel BC$, $\therefore$ $DE \parallel PAQ$.

অতএব, PAQ, DE ও BC সমান্তরাল রেখা তিনটির ছেদক AB ও AC.

এক্ষণে, $\because$ $AD = BD$ (স্বীকার), $\therefore$ $AE = CE$ (উপ. 23)।

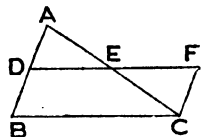
উপপাদ্য 25

ত্রিভুজের যে কোন দুইটি বাহুর মধ্যবিন্দু সংযোজক সরলরেখা তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল ও অর্ধেক হইবে।

[*The straight line joining the middle points of two sides of a triangle is parallel to and half of the third side.*]

ABC একটি ত্রিভুজ। D ও E যথাক্রমে AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু। DE যোগ করা হইল।

চিত্র নং 56

প্রমাণ করিতে হইবে যে, DE সরলরেখা BC বাহুর সমান্তরাল ও উহার অর্ধেক।

অঙ্কন : DEকে বর্ধিত করিয়া বর্ধিত অংশ হইতে DE-র সমান EF কাটিয়া লও এবং CF যোগ কর।

প্রমাণ : $\triangle$ADE ও $\triangle$CEFএর AE=CE (স্বীকার),

DE=EF (অঙ্কন) এবং $\angle$AED=বিপ্রতীপ $\angle$CEF,

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

$\therefore$ AD=CF, এবং $\angle$DAE=$\angle$ECF, কিন্তু ইহারা একান্তর কোণ,

$\therefore$ AD $\parallel$ CF, অর্থাৎ AB $\parallel$ CF.

আবার, AD=BD ($\because$ D, AB-র মধ্যবিন্দু), $\therefore$ BD=CF.

$\therefore$ BD ও CF সমান ও সমান্তরাল।

$\therefore$ DBCF একটি সামান্তরিক, সুতরাং DF ও BC সমান ও সমান্তরাল।

$\therefore$ DE $\parallel$ BC এবং DE=$\frac{1}{2}$DF=$\frac{1}{2}$BC.

অতএব, DE, BC বাহুর সমান্তরাল ও অর্ধেক।

বিবিধ উদাহরণ 2

উদা. 1. কোন চতুর্ভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দুগুলি পর পর যোগ করিলে একটি সামান্তরিক উৎপন্ন হয়।

ABCD একটি চতুর্ভুজ। P, Q, R, S যথাক্রমে AB, AD, DC ও BC বাহুর মধ্যবিন্দু। PQ, QR, RS, SP যোগ করা হইল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে PQRS একটি সামান্তরিক।

প্রমাণ : AC যোগ কর।

$\triangle$ADCর AD বাহুর মধ্যবিন্দু Q এবং DC বাহুর মধ্যবিন্দু R যোগ করা হইয়াছে,

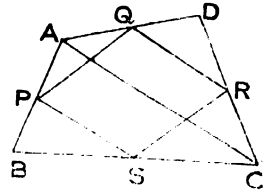
∴ QR, ACর সহিত সমান্তরাল ও উহার অর্ধেক।

অনুরূপে PS, ACর সহিত সমান্তরাল ও ACর অর্ধেক।

∴ QR ও PS সমান ও সমান্তরাল।

∴ PQ ও RS সমান ও সমান্তরাল।

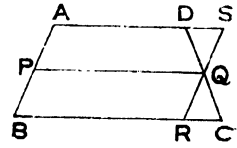
অতএব PQRS একটি সামান্তরিক।

চিত্র নং 57

উদা. 2. কোন ট্রাপিজিয়মের তির্যক বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দুদ্বয় সংযোজক সরলরেখা উহার সমান্তরাল বাহু দুইটির সমান্তরাল এবং উহাদের সমষ্টির অর্ধেক হইবে। [C. U. '41]

ABCD ট্রাপিজিয়মের AD ∥ BC এবং AB ও DC-র মধ্যবিন্দু P ও Q যোগ করা হইয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, PQ ∥ AD ও BC, এবং $PQ = \frac{1}{2}(AD + BC)$.

Q বিন্দু দিয়া ABর সমান্তরাল করিয়া একটি রেখা টান, উহা যেন BCকে R বিন্দুতে এবং ADর বর্ধিতাংশকে S বিন্দুতে ছেদ করিল।

চিত্র নং 58

প্রমাণ ঃ △DQS ও △RQC সর্বসম, কারণ, DQ = QC.

∠SDQ = একান্তর ∠QCR এবং ∠DQS = বিপ্রতীপ ∠RQC,

∴ DS = RC এবং SQ = RQ.

এক্ষণে ABRS একটি সামান্তরিক বলিয়া AB = RS.

∴ $\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}RS$ অর্থাৎ AP = SQ.

এখন AP ও SQ সমান ও সমান্তরাল বলিয়া, AS ও PQ সমান ও সমান্তরাল।

অতএব, AD ও BCর সহিত PQ সমান্তরাল হইল।

আবার, PQ = AS = BR, ∴ $PQ = \frac{1}{2}(BR + AS) = \frac{1}{2}(BR + DS + AD)$
$= \frac{1}{2}(BR + RC + AD) = \frac{1}{2}(BC + AD)$.

প্রশ্নমালা 8

1. কোন সমকোণী ত্রিভুজের সমকৌণিক বিন্দু ও অতিভুজের মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখাটি অতিভুজের অর্ধেক। [C. U. ; P.U. ; D.B.]

2. ত্রিভুজের কোন শীর্ষ হইতে বিপরীত বাহু পর্যন্ত অঙ্কিত সরলরেখা অপর দুই বাহুর মধ্যবিন্দু-সংযোজক সরলরেখা দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হইবে।

3. কোন সমকোণী ত্রিভুজের একটি সূক্ষ্মকোণ অপর সূক্ষ্মকোণটির দ্বিগুণ হইলে অতিভুজটি ক্ষুদ্রতম বাহুর দ্বিগুণ হইবে। [C. U. '45]

4. ত্রিভুজের যে কোন দুইটি বাহুর মধ্যবিন্দু-সংযোজক সরলরেখা ও অপর বাহুর সমদ্বিখণ্ডক মধ্যমা পরস্পর সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

5. ত্রিভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দুগুলি যোগ করিলে তিনটি সামান্তরিক ও চারিটি সর্বসম ত্রিভুজ উৎপন্ন হইবে।

6. কোন চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলির মধ্যবিন্দু-সংযোজক সরলরেখা দুইটি পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

7. AB সরলরেখার মধ্যবিন্দু O এবং XY অপর একটি সরলরেখা। প্রমাণ কর যে, XY-এর উপর AO ও BO-র অভিক্ষেপ দুইটি সমান হইবে।

8. সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমিস্থ কোন বিন্দু হইতে সমান বাহু দুইটির উপর অঙ্কিত লম্বদ্বয়ের সমষ্টি ভূমির যে কোন প্রান্তবিন্দু হইতে বিপরীত বাহুর উপর লম্বের সমান। [D. B. '40]

9. কোন সমবাহু ত্রিভুজের অন্তঃস্থিত কোন বিন্দু হইতে উহার বাহুগুলির উপর লম্বত্রয়ের সমষ্টি ত্রিভুজটির যে কোন শীর্ষ হইতে বিপরীত বাহুর উপর লম্বের সমান।

10. ট্রাপিজিয়মের তির্যক বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু-সংযোজক সরলরেখা কর্ণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডক।

11. সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমির বর্ধিতাংশের কোন বিন্দু হইতে অপর বাহুদ্বয়ের উপর অঙ্কিত লম্বদ্বয়ের অন্তর ধ্রুবক।

12. ABCD সামান্তরিকের P ও Q যথাক্রমে AD ও BC-র মধ্যবিন্দু। প্রমাণ কর যে AQ ও CP, BDকে সমান তিনভাগে বিভক্ত করে।

13. সামান্তরিকের দুইটি বিপরীত শীর্ষ হইতে বহিঃস্থ কোন সরলরেখার উপর অঙ্কিত লম্বদ্বয়ের সমষ্টি উহার অপর দুইটি বিপরীত শীর্ষ হইতে অঙ্কিত লম্বদ্বয়ের সমষ্টির সমান হইবে।

সম্পাদ্য 13

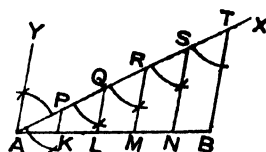
একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে কতিপয় সমান অংশে বিভক্ত করিতে হইবে।

[*To divide a given straight line into any number of equal parts.*]

[**প্রথম প্রণালী**]

AB একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা। মনে কর, ইহাকে পাঁচটি সমান অংশে বিভক্ত করিতে হইবে।

অঙ্কন : AB রেখার A বিন্দুতে BAX যে-কোন একটি কোণ অঙ্কিত কর। AX হইতে যে কোন দৈর্ঘ্যের পাঁচটি সমান অংশ AP, PQ, QR, RS ও ST কাটিয়া লও। TB যোগ কর।

চিত্র নং 59

S, R, Q, P হইতে TB-র সমান্তরাল যথাক্রমে SN, RM, QL, PK সরলরেখা টান। উহারা যেন ABকে যথাক্রমে N, M, L, K বিন্দুতে ছেদ করিল। এক্ষণে, AB, সরলরেখা K, L, M, N বিন্দুতে সমান পাঁচ অংশে বিভক্ত হইল।

প্রমাণ ঃ AY ∥ BT টান।

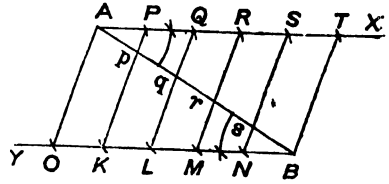
∵ AY, PK, QL, RM, SN, TB সমান্তরাল রেখাগুলি AX ভেদক হইতে পাঁচটি সমান অংশ ছেদ করিয়াছে,

∴ উহারা AB ভেদক হইতেও পাঁচটি সমান অংশ ছেদ করিয়াছে।

অতএব, AB সরলরেখা K, L, M ও N বিন্দুতে পাঁচটি সমান অংশে বিভক্ত হইয়াছে।

[দ্বিতীয় প্রণালী]

মনে কর, AB সরলরেখাকে পাঁচটি সমান অংশে বিভক্ত করিতে হইবে।

অঙ্কন ঃ A বিন্দুতে যে-কোন একটি কোণ BAX অঙ্কিত কর এবং B বিন্দু হইতে XA-র সমান্তরাল BY সরলরেখা টান। AX হইতে যে-কোন দৈর্ঘ্যের AP, PQ, QR, RS ও ST পাঁচটি সমান অংশ কাটিয়া লও এবং BY হইতে ঐ দৈর্ঘ্যের BN, NM, ML, LK ও KO পাঁচটি সমান অংশ কাটিয়া লও। PK, QL, RM ও SN যোগ কর, ইহারা যেন ABকে যথাক্রমে p, q, r ও s বিন্দুতে ছেদ করিল।

চিত্র নং 60

এক্ষণে, AB সরলরেখা p, q, r ও s বিন্দুতে পাঁচটি সমান অংশে বিভক্ত হইল। AO এবং BT যোগ কর।

প্রমাণ ঃ ∵ অঙ্কন অনুসারে AP এবং OK সমান ও সমান্তরাল,

∴ AO ও PK সমান ও সমান্তরাল।

অনুরূপে, PK ∥ QL, QL ∥ RM, RM ∥ SN, এবং SN ∥ TB.

অতএব, AO, PK, QL, RM, SN ও TB পরস্পর সমান্তরাল এবং উহারা ATকে সমান পাঁচ ভাগে বিভক্ত করিয়াছে।

∴ উহারা ABকে p, q, r, s বিন্দুতে সমান পাঁচ ভাগে বিভক্ত করিয়াছে।

পঞ্চম অধ্যায়

II. চতুর্ভুজ অঙ্কন

তোমরা দেখিয়াছ যে, একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করিতে হইলে তিনটি নিরপেক্ষ উপাত্ত আবশ্যক হয়।

ত্রিভুজের তিনটি বাহু দেওয়া থাকিলে ত্রিভুজটি অঙ্কন করা যায়। কিন্তু চতুর্ভুজের চারিটি বাহু দেওয়া থাকিলে চতুর্ভুজটি অঙ্কন করা যায় না।

চতুর্ভুজ অঙ্কনের জন্য কিন্তু পাঁচটি নিরপেক্ষ উপাত্তের প্রয়োজন হয়।

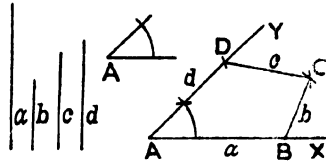
সম্পাদ্য 14

কোন চতুর্ভুজের চারিটি বাহুর দৈর্ঘ্য ও একটি কোণ দেওয়া আছে ; চতুর্ভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

[*To construct a quadrilateral having given its four sides and an angle.*]

কোন চতুর্ভুজের চারিটি বাহুর দৈর্ঘ্য a, b, c, d এবং মনে কর a ও d এর অন্তর্ভূত কোণ A দেওয়া আছে। চতুর্ভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে।

চিত্র নং 61

অঙ্কন ঃ AX যে-কোন একটি সরলরেখা লও এবং উহা হইতে a-র সমান AB অংশ কাটিয়া লও।

A বিন্দুতে প্রদত্ত ∠A-র সমান XAY কোণ আঁক এবং AY হইতে d-র সমান AD অংশ কাটিয়া লও।

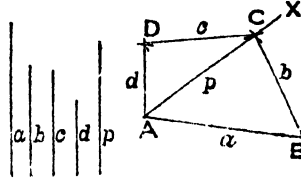
B ও Dকে কেন্দ্র করিয়া যথাক্রমে b ও c ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি বৃত্তচাপ আঁক। উহারা যেন পরস্পর C বিন্দুতে ছেদ করিল। BC ও DC যোগ কর।

ABCD উদ্দিষ্ট চতুর্ভুজ হইল। কারণ, অঙ্কন অনুসারে AB$=a$, BC$=b$, CD$=c$, AD$=d$ এবং a ও dএর অন্তর্গত কোণ BAD$=$প্রদত্ত ∠A.

সম্পাদ্য 15

কোন চতুর্ভুজের চারিটি বাহু এবং একটি কর্ণ দেওয়া আছে; চতুর্ভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

[*To construct a quadrilateral having given its four sides and a diagonal.*]

কোন চতুর্ভুজের চারিটি বাহুর দৈর্ঘ্য a, b, c, d এবং একটি কর্ণের দৈর্ঘ্য p দেওয়া আছে। চতুর্ভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

চিত্র নং 62

অঙ্কন: AX যে-কোন একটি সরলরেখা লইয়া উহা হইতে p-র সমান AC অংশ ছেদ কর।

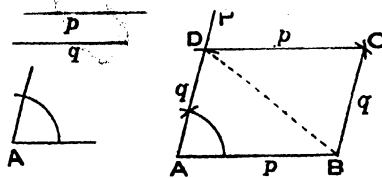
A ও Cকে কেন্দ্র করিয়া যথাক্রমে a ও b ব্যাসার্ধ লইয়া ACর এক পার্শ্বে দুইটি বৃত্তচাপ আঁক; উহারা যেন পরস্পর B বিন্দুতে ছেদ করিল।

আবার, A ও Cকে কেন্দ্র করিয়া এবং যথাক্রমে d ও c ব্যাসার্ধ লইয়া AC-র অপর পার্শ্বে দুইটি বৃত্তচাপ আঁক; উহারা যেন পরস্পর D বিন্দুতে ছেদ করিল।

AB ও CB এবং AD ও CD যোগ কর। ABCD উদ্দিষ্ট চতুর্ভুজ হইল; কারণ, অঙ্কন অনুসারে উহার বাহুগুলি প্রদত্ত বাহুগুলির সমান এবং উহার কর্ণ $AC=p$.

সম্পাদ্য 16

কোন সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু ও উহাদের অন্তর্ভূত কোণ দেওয়া আছে; সামান্তরিকটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

[*To construct a parallelogram having given two adjacent sides and the included angle.*]

চিত্র নং 63

p ও q কোন সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু এবং উহাদের অন্তর্ভূত A কোণ দেওয়া আছে। সামান্তরিকটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন : pএর সমান AB একটি সরলরেখা লও। উহার A বিন্দুতে ∠A-র সমান ∠BAP আঁক এবং AP হইতে qএর সমান AD অংশ ছেদ কর।

B ও Dকে কেন্দ্র করিয়া যথাক্রমে q ও p ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি বৃত্তচাপ আঁক, উহারা যেন, পরস্পর C বিন্দুতে ছেদ করিল। BC ও DC যোগ কর। ABCD উদ্দিষ্ট সামান্তরিক হইল।

প্রমাণ : BD যোগ কর। △ABD ও △BCD-র AB$=p=$CD, AD$=q=$BC, এবং BD সাধারণ বাহু, ∴ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম।

∴ ∠ABD= ∠BDC, এবং ইহারা একান্তর কোণ, ∴ AB ∥ CD.

∵ AB ও CD সমান ও সমান্তরাল, ∴ ABCD একটি সামান্তরিক এবং ইহার AB$=p$, AD$=q$ এবং অন্তর্ভূক্ত ∠BAD=প্রদত্ত ∠A.

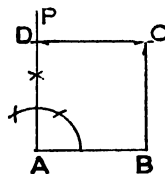
✓ সম্পাদ্য 17

কোন নির্দিষ্ট বাহুর উপর একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইবে।

[*To construct a square on a given side.*]

AB একটি নির্দিষ্ট বাহু, উহার উপর একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইবে।

চিত্র নং 64

অঙ্কন : AB বাহুর উপর A বিন্দুতে AP লম্ব অঙ্কিত কর। AP হইতে A--র সমান AD অংশ কাটিয়া লও।

B ও Dকে কেন্দ্র করিয়া AB ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি বৃত্তচাপ অঙ্কিত কর, উহারা যেন পরস্পর C বিন্দুতে ছেদ করিল।

BC ও DC যোগ কর।

ABCD নির্ণেয় বর্গক্ষেত্র হইল।

প্রমাণ : অঙ্কন অনুসারে ABCD চতুর্ভুজের বাহুগুলি পরস্পর সমান, সুতরাং ABCD একটি সামান্তরিক।

আবার, ইহার একটি কোণ অর্থাৎ ∠BAD সমকোণ বলিয়া ইহা একটি বর্গক্ষেত্র।

[**দ্রষ্টব্য :** (1) চতুর্ভুজের প্রদত্ত বাহুগুলির যে-কোন তিনটির সমষ্টি অপরটি অপেক্ষা বৃহত্তর না হইলে অঙ্কন সম্ভব হইবে না।

(2) সম্পাদ্য 15-তে যে-কোন দুই বাহুর সমষ্টি প্রদত্ত কর্ণ অপেক্ষা বৃহত্তর না হইলে অঙ্কন অসম্ভব হইবে।

(3) পূর্বে বলা হইয়াছে যে, কোন চতুর্ভুজ অঙ্কনের জন্য পাঁচটি স্বতন্ত্র বা নিরপেক্ষ উপাত্ত প্রদত্ত হওয়া আবশ্যক ; কিন্তু সম্পাদ্য 16-তে মাত্র তিনটি এবং সম্পাদ্য 17-তে মাত্র একটি উপাত্ত দেওয়া আছে। ইহার কারণ এই যে, সম্পাদ্য 16-র ক্ষেত্রে সামান্তরিকের বিপরীত বাহু পরস্পর সমান হয় বলিয়া দুইটি বাহু দেওয়া থাকিলেই চারিটি বাহু জানা হয়।

আর, বর্গক্ষেত্রের বাহুগুলি সমান ও কোণগুলির প্রত্যেকটি সমকোণ হয় বলিয়া উহার একটি বাহু জানা থাকিলেই পাঁচটি উপাত্ত জানা হয়।]

প্রশ্নমালা 9

1. নিম্নে প্রদত্ত উপাত্তগুলি হইতে চতুর্ভুজ অঙ্কিত কর :—

(*a*) $a=4\cdot5$ সে. মি., $b=3\cdot6$ সে. মি., $c=6\cdot4$ সে. মি.,

$d=5\cdot3$ সে. মি. এবং $\angle B=60°$.

(*b*) তিনটি বাহু ও দুইটি কর্ণ। (*c*) তিনটি বাহু এবং তাহাদের অন্তর্ভূত দুইটি কোণ। (*d*) একটি বাহু, ঐ বাহু-সংলগ্ন কোণদ্বয় এবং দুইটি কর্ণ। (*e*) চারিটি বাহু এবং দুইটি বিপরীত বাহুর অন্তর্ভূত কোণ।

2. একটি সামান্তরিক অঙ্কিত কর, যাহার

(i) দুইটি বাহু যথাক্রমে 1·5″ ও 2·4″ এবং উহাদের অন্তর্ভূত কোণ 30°.

(ii) একটি বাহু=3·5 সে. মি. এবং কর্ণদ্বয় 4 সে. মি. ও 5 সে. মি.

(iii) একটি বাহু ·6″, একটি কর্ণ 1·5″ এবং উহাদের অন্তর্ভূত কোণ 45°.

(iv) দুইটি কর্ণ 2″ ও 1·6″ এবং উহাদের অন্তর্ভূত কোণ 30°.

(v) দুইটি কর্ণ ও একটি বাহু প্রদত্ত আছে।

3. ABCD আয়তক্ষেত্র অঙ্কিত কর যাহার AC কর্ণ=2·5″ এবং $\angle ACB=60°$.

4. একটি বাহু ও একটি কর্ণ দেওয়া আছে, আয়তক্ষেত্রটি অঙ্কিত কর।

5. একটি রম্বস অঙ্কিত কর, যাহার

(*a*) দুইটি কর্ণের দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে। (*b*) একটি বাহু=1·5 ডেসি মি. এবং একটি কোণ=30°. (*c*) পরিসীমা ও একটি কোণ দেওয়া আছে।

6. 3·2 সেন্টিমিটার বাহুর উপর একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর।

7. 2·4 সেন্টিমিটার কর্ণবিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর।

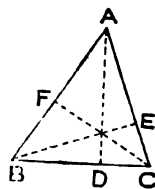
---

7. ক্ষেত্রফল (Area)

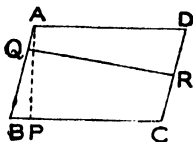
উচ্চতা বা **উন্নতি** (Altitude)

ত্রিভুজের কোন বাহুকে ভূমি (base) ধরিলে উহার বিপরীত শীর্ষবিন্দু হইতে ঐ বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বকে **ত্রিভুজটির উচ্চতা** বলে।

পূর্বে বলা হইয়াছে যে, ত্রিভুজের যে-কোন বাহুকে ভূমি ধরা যায়। অতএব, ত্রিভুজের উচ্চতা তিনটি হইতে পারে।

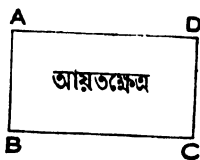
পার্শ্বের চিত্রে AD, BE ও CF যথাক্রমে BC, AC ও AB বাহুর উপর লম্ব। অতএব, ভূমি অনুসারে AD, BE, CF হইল ত্রিভুজটির তিনটি উচ্চতা।

চিত্র নং 65

সামান্তরিকের একটি বাহুকে ভূমি ধরিলে ভূমির বিপরীত বাহুর যে-কোন বিন্দু হইতে ভূমির উপর অঙ্কিত লম্বকে ঐ **সামান্তরিকের উচ্চতা** বলে।

পার্শ্বের চিত্রে ABCD একটি সামান্তরিক। উহার BC বাহুকে ভূমি ধরিয়া বিপরীত বাহু AD-র A বিন্দু হইতে $AP \perp BC$ টানা হইয়াছে। অতএব AP ঐ সামান্তরিকের একটি উচ্চতা।

চিত্র নং 66

অনুরূপে, CD বাহুকে ভূমি ধরিয়া বিপরীত বাহু AB-র যে কোন বিন্দু Q হইতে CD-র উপর QR লম্ব টানায় QR ঐ সামান্তরিকটির আর একটি উচ্চতা হইয়াছে। সামান্তরিকের উচ্চতা দুইটি।

তোমরা জান আয়তক্ষেত্রের কোণগুলি সমকোণ, সুতরাং ABCD আয়তক্ষেত্রের AB বাহু BC-র উপর লম্ব। অতএব, AB বা DC উহার উচ্চতা।

আবার, DCকে ভূমি ধরিলে AD বা BC উচ্চতা হইবে।

চিত্র নং 67

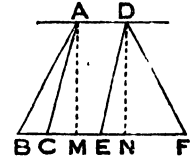
আয়তক্ষেত্রের বৃহত্তর বাহুটিকে উহার দৈর্ঘ্য এবং ক্ষুদ্রতর বাহুটিকে প্রস্থ বলে। তোমরা জান, আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ = ভূমি × উচ্চতা।

8. যে সকল ত্রিভুজের ভূমিগুলি একটি সরলরেখার উপর অবস্থিত এবং শীর্ষবিন্দুগুলি ঐ সরলরেখার সমান্তরাল অপর একটি সরলরেখার উপর

অবস্থিত, সেই ত্রিভুজগুলিকে ঐ একই সমান্তরাল সরল রেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত বলা হয়।

যে সকল সামান্তরিকের ভূমি একটি সরলরেখার উপর এবং ভূমির বিপরীত বাহু ঐ সরলরেখার সমান্তরাল অপর একটি সরলরেখার উপর থাকে, তাহারা ঐ একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত বলা হয়।

9. দুইটি সমান্তরাল সরলরেখার মধ্যে অবস্থিত ত্রিভুজগুলির উচ্চতা সমান।

পার্শ্বের চিত্রে ABC ও DEF ত্রিভুজ দুইটি AD ও BF সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত। AM ও DN যথাক্রমে A ও D হইতে BF-এর উপর লম্ব। অতএব AM ও DN যথাক্রমে ABC ও DEF ত্রিভুজের উচ্চতা।

চিত্র নং 68

AM ও DN একই রেখার উপর লম্ব বলিয়া উহারা সমান্তরাল। আবার, AD ॥ BF, সুতরাং AMND একটি আয়তক্ষেত্র।

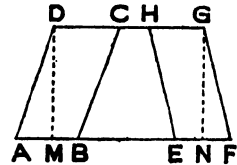
∴ AM = DN, অর্থাৎ ত্রিভুজদ্বয়ের উচ্চতা সমান।

বিপরীতক্রমে, যে সকল ত্রিভুজের উচ্চতা সমান তাহাদিগকে দুইটি সমান্তরাল সরলরেখার মধ্যে স্থাপিত করা যায়।

মনে কর, △ABC ও △DEF-এর উচ্চতা AM ও DN পরস্পর সমান। উহাদিগকে কোন একটি সরলরেখা BF-এর উপর স্থাপন করিয়া AD যোগ করা হইল।

AM ও DN একই BF রেখার উপর লম্ব বলিয়া পরস্পর সমান্তরাল। আবার, AM = DN (স্বীকার)। ∴ AD ॥ BF.

10. দুইটি সমান্তরাল সরলরেখার মধ্যে অবস্থিত সামান্তরিকগুলির উচ্চতা সমান।

পার্শ্বের চিত্রে ABCD ও EFGH সামান্তরিক দুইটি AF ও DG এই দুইটি সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত এবং DM ও GN উহাদের উচ্চতা অর্থাৎ DM ও GN, AF-এর উপর লম্ব।

চিত্র নং 69

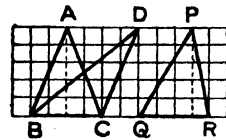
এক্ষণে, DM ও GN উভয়ই AF-এর উপর লম্ব বলিয়া উহারা পরস্পর সমান্তরাল। আবার, DG ॥ AF (স্বীকার),

∴ DMNG একটি সামান্তরিক, ∴ DM = GN.

বিপরীতক্রমে, যে সকল সামান্তরিকের উচ্চতা সমান, তাহাদিগকে দুইটি সমান্তরাল সরলরেখার মধ্যে স্থাপন করা যায়। [প্রমাণ সহজ]

11. কতিপয় জ্যামিতিক প্রতিজ্ঞার পরীক্ষামূলক প্রমাণ।

তোমরা ছক কাগজের ব্যবহার শিখিয়াছ। ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের এক একটি বাহুর পরিমাণ $\frac{1}{10}$ ইঞ্চি বা ·1 ইঞ্চি হইয়া থাকে। এই ছক কাগজ সেন্টিমিটার বা মিলিমিটার মাপেও হইতে পারে।

ছক কাগজের সাহায্যে আমরা এখানে কতিপয় জ্যামিতিক প্রতিজ্ঞার সত্যতা পরীক্ষা করিব।

চিত্র নং 70

পরীক্ষা 1. একই (বা সমান সমান) ভূমির উপর এবং একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত (বা একই উচ্চতাবিশিষ্ট) ত্রিভুজগুলির ক্ষেত্রফল সমান।

উপরের চিত্রে △ABC ও △DBC একই BC ভূমির উপর এবং ADP ও BCR সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত।

আর, PQR ত্রিভুজটিও ঐ একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত এবং উহার ভূমি QR অপর ত্রিভুজদ্বয়ের ভূমি BC-র সমান।

ত্রিভুজগুলি একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত বলিয়া উহাদের উচ্চতা সমান।

এখানে পরীক্ষা দ্বারা প্রমাণ করিতে হইবে যে, ঐ ত্রিভুজগুলির ক্ষেত্রফল সমান।

পরীক্ষা : এক্ষণে, ABC, DBC ও PQR ত্রিভুজগুলির অন্তর্গত ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রগুলির সংখ্যা গণনা করিয়া দেখা যায় যে প্রত্যেক ক্ষেত্রে ঐ সংখ্যা দশ, সুতরাং ত্রিভুজ তিনটির ক্ষেত্রফল সমান।

[**দ্রষ্টব্য :** (i) বর্গক্ষেত্রের সংখ্যা গণনায় দেখা যায় কতকগুলি পূর্ণ বর্গক্ষেত্র এবং কতকগুলি বর্গক্ষেত্রের অংশ ঐ ত্রিভুজের অন্তর্গত। এখানে দেখ যে, এক পার্শ্বের পর পর দুইটি অংশ মিলিয়া একটি পূর্ণ ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের সমান ধরা যায়।

(ii) এই ভাবে ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রগুলি গণিয়া ক্ষেত্রফল নির্ণয় সঠিক হওয়া কঠিন। সেজন্য ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের অন্য প্রণালী পরবর্তী পৃষ্ঠায় দেখ।

(iii) উপরের পরীক্ষায় দেখা গেল প্রত্যেক ত্রিভুজের অন্তর্গত বর্গক্ষেত্রগুলির সংখ্যা 10, সুতরাং ঐ ছকের একটি ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রকে ক্ষেত্রফলের একক ধরিলে নির্ণীত ক্ষেত্রফল হইল 10 বর্গ একক।

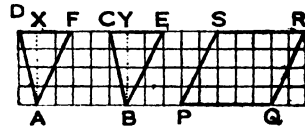
আবার দেখ, ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুকে দৈর্ঘ্য একক ধরিলে প্রত্যেক ত্রিভুজের ভূমি=4 দৈর্ঘ্য একক এবং উচ্চতা=5 দৈর্ঘ্য একক।

$\therefore$ ভূমি $\times$ উচ্চতা $= 4 \times 5$ বা 20 বর্গ একক।

$\therefore$ $\frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা $= (\frac{1}{2} \times 20)$ বা 10 বর্গ একক।

অতএব, **ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা**।]

পরীক্ষা 2. একই (বা সমান সমান) ভূমির উপর এবং একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত (বা একই উচ্চতাবিশিষ্ট) সামান্তরিকগুলির ক্ষেত্রফল সমান।

D X F C Y E S R
A B P Q

চিত্র নং 71

পার্শ্বের চিত্রে ছক কাগজে অঙ্কিত ABCD ও ABEF সামান্তরিক দুইটি একই ভূমি AB-র উপর এবং AQ ও DR সমান্তরাল সরল রেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত।

আর, PQRS সামান্তরিকটিও AQ ও DR-এর মধ্যে অবস্থিত এবং উহার ভূমি PQ=AB.

সামান্তরিকগুলি একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত বলিয়া উহাদের উচ্চতা সমান।

এখানে পরীক্ষা দ্বারা প্রমাণ করিতে হইবে যে, ঐ সামান্তরিক তিনটির ক্ষেত্রফল সমান।

পরীক্ষা : ABCD, ABEF ও PQRS সামান্তরিকগুলির প্রত্যেকটির অন্তর্গত ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গগুলির সংখ্যা 20.

অতএব উহাদের ক্ষেত্রফল সমান। এখানে ক্ষুদ্রতম একটি বর্গক্ষেত্রকে ক্ষেত্রফলের একক ধরিলে প্রত্যেক সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল হইল 20 বর্গ একক।

[**দ্রষ্টব্য :** মনে কর AX, ABCD সামান্তরিকের উচ্চতা। এখানে দেখা যায় AX=4 দৈর্ঘ্য একক এবং AB=5 দৈর্ঘ্য একক (ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুকে দৈর্ঘ্য একক ধরিয়া)।

অতএব, ভূমি $\times$ উচ্চতা $= 5 \times 4$ বা 20 বর্গ একক।

$\therefore$ **সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল = ভূমি $\times$ উচ্চতা**]]

(অন্য প্রণালীতে পরীক্ষা)

71নং চিত্রে AQ-এর উপর AX ও BY লম্ব টানিয়া ABYX আয়তক্ষেত্রটি আঁক। ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুকে দৈর্ঘ্য একক ধর। মনে কর, ছকে একটি বাহুর দৈর্ঘ্য $= \frac{1}{10}$ ইঞ্চি বা ·1 ইঞ্চি।' চিত্রে দেখা যায় যে,

সামান্তরিক ABCD $= \triangle$ADX $+$ আয়ত ABYX $- \triangle$BCY $\cdots(1)$

এক্ষণে, $\triangle ADX = \frac{1}{2}$ DX.X $= \frac{1}{2} \times {\cdot}1'' \times {\cdot}4'' = {\cdot}02$ বর্গ ইঞ্চি,

আয়ত ABYX $=$ AB.AX $= {\cdot}5'' \times {\cdot}4'' = {\cdot}2$ বর্গ ইঞ্চি,

এবং $\triangle BCY = \frac{1}{2}CY.BY = \frac{1}{2} \times {\cdot}1'' \times {\cdot}4'' = {\cdot}02$ বর্গ ইঞ্চি।

অতএব, (1) হইতে পাই সামান্তরিক ABCD $= ({\cdot}2 + {\cdot}02 - {\cdot}02)$ ব. ই.
$= {\cdot}2$ বর্গ ইঞ্চি।

অনুরূপে ABEF সামান্তরিক $= \triangle BEY + \square ABYX - \triangle AFX$

$= (\frac{1}{2} \times EY.BY + AB.AX - \frac{1}{2} \times FX.AX)$

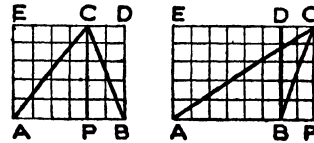
$= (\frac{1}{2} \times {\cdot}2'' \times {\cdot}4'' + {\cdot}5'' \times {\cdot}4'' - \frac{1}{2} \times {\cdot}2'' \times {\cdot}4'') = {\cdot}2$ বর্গ ইঞ্চি।

$\therefore$ ABCD ও ABEF সামান্তরিকদ্বয়ের ক্ষেত্রফল সমান।

অনুরূপে দেখা যায় যে, PQRS সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলও ·2 বর্গ ইঞ্চি।

$\therefore$ সামান্তরিক তিনটির ক্ষেত্রফল সমান হইল।

পরীক্ষা 3. একটি ত্রিভুজ ও একটি আয়তক্ষেত্র একই ভূমির উপর এবং একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত হইলে, ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল আয়তের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক হইবে।

ছক কাগজে একই ভূমি AB-র উপর একই AB ও ED সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে $\triangle$ABC ও আয়ত ABDE আঁকা হইল। একই

চিত্র নং 72

সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত বলিয়া উহাদের উচ্চতা একই। মনে কর, ছকে একটি ক্ষুদ্রতম বাহু $= 1$ সেণ্টি মিটার;

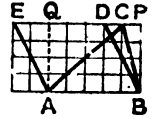
এখন AB-র বা বর্ধিত AB-র উপর CP লম্ব টান, CP হইল উহাদের উচ্চতা। এক্ষণে চিত্রে $\triangle ABC = \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা

$= \frac{1}{2} \times AB \times CP = \frac{1}{2} \times 6$ সে. মি. $\times 5$ সে. মি. $= 15$ বর্গ সে মি.।

আয়ত ABDE $=$ ভূমি $\times$ উচ্চতা $= 6$ সে. মি. $\times 5$ সে. মি. $= 30$ বর্গ সে. মি.।

অতএব, দেখা গেল যে, উভয় চিত্রেই ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল ABDE আয়তক্ষেত্রের অর্ধেক।

পরীক্ষা 4. একটি ত্রিভুজ ও একটি সামান্তরিক একই ভূমির উপর এবং একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত হইলে, ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক হইবে।

ছক কাগজে AB ভূমির উপর এবং AB ও EP সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে $\triangle$ABC ও সামান্তরিক ABDE আঁকা হইল।

চিত্র নং 73

AB-র উপর AQ ও BP লম্ব টানিয়া ABPQ আয়তটি আঁক।

এক্ষণে, ইহারা একই AB ও EP সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত বলিয়া ইহাদের উচ্চতা একই। $\because$ AQ$\perp$AB, $\therefore$ AQ হইল উহাদের উচ্চতা।

সামান্তরিক ABDE ও আয়ত ABPQ একই AB ভূমির উপর ও একই AB ও EP সমান্তরাল সরল রেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত বলিয়া উহাদের ক্ষেত্রফল সমান। [পরীক্ষা 2এ প্রমাণিত]

আবার, আয়তের ক্ষেত্রফল = ভূমি $\times$ উচ্চতা।

চিত্রে ভূমি AB = 5 দৈর্ঘ্য একক এবং উচ্চতা AQ = 4 দৈর্ঘ্য একক.

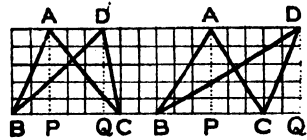
$\therefore$ সামান্তরিক ABDE = 5×4 বর্গ একক = 20 বর্গ একক

এবং $\triangle$ ABC = $\frac{1}{2}$AB.AQ = $\frac{1}{2} \times 5 \times 4$ বর্গ একক = 10 বর্গ একক।

$\therefore$ ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল ABDE সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক।

[**দ্রষ্টব্য :** উপরে বর্ণিত পরীক্ষাগুলিতে আয়তক্ষেত্রগুলির অন্তর্গত ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রগুলি গণিয়া দেখিলে সিদ্ধান্তগুলিতে উপনীত হওয়া যায়।]

পরীক্ষা 5. একই ভূমির উপর একই পার্শ্বে অবস্থিত দুইটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল সমান হইলে, উহারা একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত থাকিবে।

ছক কাগজে একই BC ভূমির উপর একই পার্শ্বে ABC ও DBC দুইটি সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ত্রিভুজ আঁকা আছে। BC-র উপর AP ও DQ লম্ব টান।

চিত্র নং 74

একই সরলরেখার উপর লম্ব বলিয়া ইহারা পরস্পর সমান্তরাল হইয়াছে।

এক্ষণে মাপিয়া দেখা যায় যে AP=DQ (প্রত্যেকটি=5 দৈর্ঘ্য একক)। অতএব AP ও DQ সমান ও সমান্তরাল হইল।

∴ APQD একটি সামান্তরিক, ∴ AD ∥ BC.

অন্য প্রকারে দেখ

(i) ছক কাগজে চিত্রগুলি আঁকিয়া ত্রিকোণী সাহায্যে মাপিয়া দেখা যায় যে, AD ও BC সমান্তরাল। অতএব, সিদ্ধান্তটি প্রমাণিত হইল।

(ii) আবার দেখ, ছক কাগজে দেখা যায় যে BC সরলরেখা হইতে AD সরলরেখার ব্যবধান (বা দূরত্ব) সর্বত্র সমান। অতএব AD ও BC সমান্তরাল।

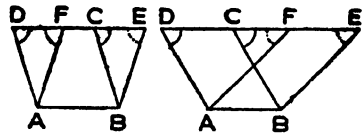
উপপাদ্য 26

একই ভূমির উপর এবং একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত সামান্তরিকগুলির ক্ষেত্রফল পরস্পর সমান।

[*Parallelograms on the same base and between the same parallels are equal in area.*] (Euc. 1. '35)

ABCD ও ABEF যে কোন দুইটি সামান্তরিক একই ভূমি AB-র উপর এবং AB ও DE সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

সামান্তরিক ABCD=সামান্তরিক ABEF.

চিত্র নং 75

প্রমাণ: △AFD ও △BCE-এর

∠ADF=অনুরূপ ∠BCE (∵ AD ∥ BC),

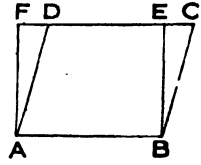
∠AFD=অনুরূপ ∠BEC (∵ AF ∥ BE),

এবং AD=BC (সামান্তরিকের বিপরীত বাহুদ্বয়);

∴ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম, সুতরাং উহাদের ক্ষেত্রফলও সমান।

∴ চতুর্ভুজ ABED−△BCE=চতুর্ভুজ ABED−△AFD,

∴ ABCD সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল=ABEF সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল।

12. সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল। সামান্তরিক ABCD ও আয়তক্ষেত্র ABEF একই ভূমি AB-র উপর এবং AB ও EF সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত হইলে, উহাদের ক্ষেত্রফল সমান হইবে। (উপ. 26)।

কিন্তু ABEF আয়তের ক্ষেত্রফল = AB × AF
= ভূমি × উচ্চতা

∴ **সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল = ভূমি × উচ্চতা**

চিত্র নং 76

[পরীক্ষা 2 দেখ]

অনুসিদ্ধান্ত 1. সমান সমান (বা একই) উচ্চতাবিশিষ্ট এবং একই ভূমির উপর অবস্থিত সামান্তরিকগুলির ক্ষেত্রফল পরস্পর সমান। [C. U. '40]

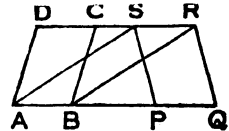
[Parallelograms on the same base and of equal altitudes are equal in area.

প্রমাণ : ∵ সামান্তরিকগুলির উচ্চতা সমান (বা একই),
∴ উহারা দুই সমান্তরাল সরলরেখার মধ্যে অবস্থিত। এক্ষণে উপপাদ্য 26-এর ন্যায় প্রমাণ কর।

[**দ্রষ্টব্য :** ঐ সামান্তরিকগুলি যদি একই সরলরেখার উপর অবস্থিত না থাকে, তবে তাহাদিগকে কোন একটি সরলরেখার উপর একই পার্শ্বে স্থাপন করিয়া লইবে।]

অনুসিদ্ধান্ত 2. সমান সমান ভূমির উপর এবং একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত সামান্তরিকগুলির ক্ষেত্রফল সমান।

[Parallelograms on equal bases and between the same parallels are equal in area.]

উপরিপাতনের দ্বারা সামান্তরিকগুলিকে একই ভূমিবিশিষ্ট করিয়া লইবে এবং তৎপরে উপপাদ্য 26-এর ন্যায় প্রমাণ করিবে।

চিত্র নং 77

অন্য প্রণালী : মনে কর, ABCD ও PQRS সামান্তরিক দুইটি AQ ও DR সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত এবং উহাদের AB ও PQ ভূমিদ্বয় পরস্পর সমান। AS ও BR যোগ কর।

প্রমাণ : AB = PQ (স্বীকার) = SR,

∴ AB ও SR পরস্পর সমান ও সমান্তরাল। ∴ ABRS একটি সামান্তরিক।

আবার, ∵ ABCD ও ABRS সামান্তরিক দুইটি একই AB ভূমির উপর এবং AB ও DR সমান্তরাল সরল রেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত,

∴ সামান্তরিক ABCD=সামান্তরিক ABRS.

অনুরূপে, SR ভূমির উপর এবং SR ও AQ সমান্তরাল সরল রেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত ABRS ও PQRS সামান্তরিক দুইটি পরস্পর সমান।

∴ সামান্তরিক ABCD=সামান্তরিক PQRS.

অনুসিদ্ধান্ত 3. সমান সমান উচ্চতাবিশিষ্ট এবং সমান সমান ভূমির উপর অবস্থিত সামান্তরিকগুলির ক্ষেত্রফল সমান।

[Parallelograms on equal bases and of equal altitudes are equal in area.]

উপরিপাতনের দ্বারা দুইটি সামান্তরিককে একই ভূমিবিশিষ্ট করিয়া লইবে। উহাদের উচ্চতা সমান বলিয়া উহারা তখন একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত হইবে। এক্ষণে, উপপাদ্য 26-এর ন্যায় প্রমাণ হইবে।

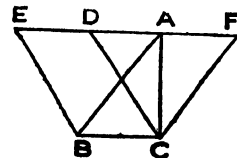
উপপাদ্য 27

একটি ত্রিভুজ ও একটি সামান্তরিক একই ভূমির উপর এবং একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত হইলে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক হইবে।

[*If a triangle and a parallelogram stand on the same base and are between the same parallels, the area of the triangle is half the area of the parallelogram.*]

ABC ত্রিভুজ ও BCDE সামান্তরিক একই ভূমি BC-র উপর এবং একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয় BC ও EF-এর মধ্যে অবস্থিত।

চিত্র নং 78

প্রমাণ করিতে হইবে যে, △ABCর ক্ষেত্রফল BCDE সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক।

অঙ্কন : BA-র সমান্তরাল CF সরলরেখা টান, উহা যেন EFকে F বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ : ∵ BC ∥ AF (স্বীকার) এবং AB ∥ CF (অঙ্কন)

∴ ABCF একটি সামান্তরিক এবং AC ইহার কর্ণ।

∵ সামান্তরিকের কর্ণ সামান্তরিককে সমদ্বিখণ্ডিত করে,

∴ $\triangle ABC = \frac{1}{2}$ সামান্তরিক ABCF.

আবার, BCDE ও ABCF সামান্তরিক দুইটি একই ভূমি BCর উপর এবং BC ও EF সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত,

∴ সামান্তরিক ABCF = সামান্তরিক BCDE.

∴ $\triangle ABC = \frac{1}{2}$ সামান্তরিক BCDE.

[**দ্রষ্টব্য :** পরীক্ষা 4 দেখ]

অনুসিদ্ধান্ত 1. একটি ত্রিভুজ ও একটি সামান্তরিক একই ভূমির উপর অবস্থিত এবং একই উচ্চতাবিশিষ্ট হইলে, ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক হইবে।

[উহারা একই উচ্চতাবিশিষ্ট বলিয়া একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত হইবে। এক্ষণে উপপাদ্য 27-এর মত প্রমাণ কর।]

অনুসিদ্ধান্ত 2. একটি ত্রিভুজ ও একটি সামান্তরিক সমান সমান ভূমির উপর এবং একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত হইলে, ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক হইবে।

[প্রথমে উপরিপাতনের দ্বারা উহাদিগকে একই ভূমিবিশিষ্ট করিয়া তৎপরে উপপাদ্য 27-এর ন্যায় প্রমাণ করিবে।]

অনুসিদ্ধান্ত 3. একটি ত্রিভুজ ও একটি সামান্তরিক সমান সমান ভূমির উপর অবস্থিত এবং সমান সমান উচ্চতাবিশিষ্ট হইলে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক হইবে।

[উপরিপাতনের দ্বারা প্রথমে উহাদিগকে একই ভূমিবিশিষ্ট করিবে। উহাদের উচ্চতা সমান বলিয়া তখন উহারা একই সমান্তরাল সরল রেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত হইবে। তৎপরে উপপাদ্য 27-এর ন্যায় প্রমাণ করিবে।]

13. ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয়

পূর্বে পরীক্ষা 2-এ দেখান হইয়াছে যে, সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল = ভূমি × উচ্চতা

∴ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}$ × ভূমি × উচ্চতা।

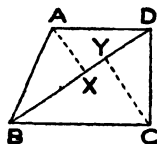
14. চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয়

ABCD চতুর্ভুজের একটি কর্ণ BD.

BDর উপর AX ও CY লম্ব টানা হইল।

এক্ষণে, চতুর্ভুজ ABCD $= \triangle ABD + \triangle BCD$

$= \frac{1}{2}.BD.AX + \frac{1}{2}.BD.CY$

$= \frac{1}{2}BD\ (AX + CY)$,

চিত্র নং 79

অর্থাৎ চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ একটি কর্ণ $\times$ ঐ কর্ণের উপর বিপরীত শীর্ষদ্বয় হইতে অঙ্কিত লম্বদ্বয়ের সমষ্টি।

[**দ্রষ্টব্য ঃ** AX ও CY লম্ব দুইটিকে কর্ণ BD সম্পর্কে offsets বলে।]

15. ট্রাপিজিয়মের ক্ষেত্রফল নির্ণয়

ABCD ট্রাপিজিয়মের AD ও BC সমান্তরাল। AC যোগ কর। A হইতে BC-র উপর AX লম্ব এবং C হইতে বর্ধিত AD-র উপর CY লম্ব টান।

অঙ্কন অনুসারে AXCY একটি আয়ত হইল।

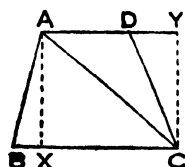
$\therefore$ AX=CY.

এক্ষণে, ABCD ট্রাপিজিয়ম $= \triangle ABC + \triangle ACD$

চিত্র নং 80

$= \frac{1}{2}BC.AX + \frac{1}{2}AD.CY$

$= \frac{1}{2}BC.AX + \frac{1}{2}AD.AX = \frac{1}{2}(BC + AD).AX$

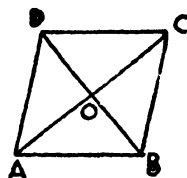
$\therefore$ ট্রাপিজিয়মের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}$ সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমষ্টি $\times$ উচ্চতা।

16. রম্বসের ক্ষেত্রফল নির্ণয়

পূর্বে প্রমাণিত হইয়াছে যে, রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে লম্বভাবে ছেদ করে।

$\therefore$ ABCD রম্বসের ক্ষেত্রফল $= \triangle ABC + \triangle ACD$

$= \frac{1}{2}AC.BO + \frac{1}{2}AC.DO$

$= \frac{1}{2}AC.(BO + DO) = \frac{1}{2}AC.BD$

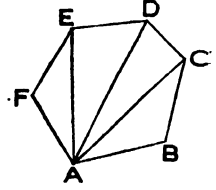
$\therefore$ রম্বসের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}$ কর্ণদ্বয়ের গুণফল।

চিত্র নং 81

[**দ্রষ্টব্য ঃ** বর্গক্ষেত্রের কর্ণদ্বয়ও পরস্পরকে লম্বভাবে ছেদ করে এবং ঐ কর্ণদ্বয় সমান। $\therefore$ বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}$ কর্ণদ্বয়ের গুণফল $= \frac{1}{2}$(কর্ণ $)^2$

আবার, বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $=$ (একটি বাহু$)^2$.]

17. বহুভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয়

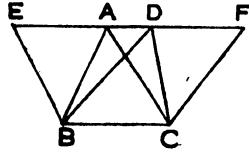
যে কোন বহুভুজকে তাহার একটি কৌণিক বিন্দু হইতে কর্ণ টানিয়া কতিপয় ত্রিভুজে বিভক্ত করা যায়। পার্শ্বের চিত্র নং 82 দেখ।

ঐ ত্রিভুজগুলির ক্ষেত্রফলগুলির সমষ্টি হইবে ঐ বহুভুজটির ক্ষেত্রফল।

চিত্র নং 82

উপপাদ্য 28

একই ভূমির উপর এবং একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত ত্রিভুজগুলির ক্ষেত্রফল পরস্পর সমান।

[*Triangles on the same base and between the same parallels are equal in area.*]

ABC ও DBC ত্রিভুজ দুইটি একই BC ভূমির উপর এবং একই AD ও BC সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

△ABC-র ক্ষেত্রফল = △DBC-র ক্ষেত্রফল।

চিত্র নং 83

অঙ্কন : B হইতে CA-র সমান্তরাল BE এবং C হইতে BD-র সমান্তরাল CF টান। উহারা যেন AD-র বর্ধিতাংশকে যথাক্রমে E ও F বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ : অঙ্কন অনুসারে ACBE ও BCFD সামান্তরিক এবং উহারা একই BC ভূমির উপর এবং BC ও EF সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত,

∴ সামান্তরিক ACBE = সামান্তরিক BCFD ;

কিন্তু △ABC = $\frac{1}{2}$ সামান্তরিক ACBE,

এবং △DBC = $\frac{1}{2}$ সামান্তরিক BCFD ; ∴ △ABC = △DBC.

[**দ্রষ্টব্য :** পরীক্ষা 1 দেখ।]

অনুসিদ্ধান্ত 1. একই ভূমির উপর এবং একই উচ্চতাবিশিষ্ট ত্রিভুজগুলির ক্ষেত্রফল পরস্পর সমান।

[**Triangles on the same base and of the same altitude are equal in area.**]

উহাদের একই উচ্চতা বলিয়া উহারা একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত। ∴ উহাদের ক্ষেত্রফল সমান (উপ. 28)।

অনুসিদ্ধান্ত 2. সমান সমান ভূমির উপর এবং একই সমান্তরাল সরল-রেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত ত্রিভুজগুলির ক্ষেত্রফল পরস্পর সমান। [C. U. '42]

[Triangles on equal bases and between the same parallels are equal in area.]

উপরিপাতন দ্বারা ইহা প্রমাণ কর।

অনুসিদ্ধান্ত 3. সমান সমান ভূমির উপর অবস্থিত এবং সমান সমান উচ্চতাবিশিষ্ট ত্রিভুজগুলির ক্ষেত্রফল পরস্পর সমান। [C. U. '46]

[Triangles on equal bases and of equal altitudes are equal in area.]

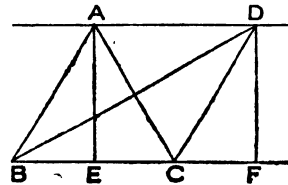
উপরিপাতনের দ্বারা একটি ত্রিভুজকে অপরটির উপর এরূপে স্থাপন কর যেন উহাদের ভূমিদ্বয় সমাপতিত হয়। উহাদের উচ্চতা সমান বলিয়া উহারা একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে থাকিবে। ∴ উহাদের ক্ষেত্রফল সমান (উপ 28).

উপপাদ্য 29

একই ভূমির উপর ও উহার একই পার্শ্বে অবস্থিত এবং সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ত্রিভুজগুলি একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত হইবে।

[*Equal triangles on the same base and on the same side of it are between the same parallels.*]

ABC ও DBC ত্রিভুজ দুইটি একই BC ভূমির উপর ও ইহার একই পার্শ্বে অবস্থিত এবং ত্রিভুজ দুইটির ক্ষেত্রফল সমান।

চিত্র নং 84

প্রমাণ করিতে হইবে যে, ত্রিভুজ দুইটি একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত অর্থাৎ AD ও BC পরস্পর সমান্তরাল।

অঙ্কন : AD যোগ কর এবং A ও D বিন্দু হইতে BC-র উপর AE ও DF লম্ব টান।

প্রমাণ : $\triangle ABC = \frac{1}{2}$ BC.AE [∵ AE উহার উচ্চতা]

এবং $\triangle DBC = \frac{1}{2}$ BC.DF [∵ DF উহার উচ্চতা]

কিন্তু $\triangle ABC = \triangle DBC$ (স্বীকার),

∴ $\frac{1}{2}$ BC.AE $= \frac{1}{2}$ BC.DF, ∴ AE = DF.

আবার, ∵ AE ও DF একই সরলরেখার উপর লম্ব, ∴ AE ∥ DF

∴ AE ও DF পরস্পর সমান ও সমান্তরাল।

অতএব, AD ও BC পরস্পর সমান্তরাল।

বিবিধ উদাহরণ 3

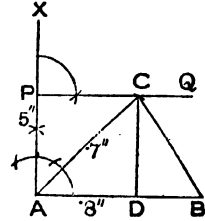
উদা. 1. একটি ত্রিভুজের ভূমি ·8 ইঞ্চি, অপর একটি বাহু ·7 ইঞ্চি এবং ক্ষেত্রফল ·2 বর্গ ইঞ্চি। ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

$\because$ $\frac{1}{2}$ ভূমি $\times$ উচ্চতা $=$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল,

$\therefore$ এখানে $\frac{1}{2}\times$ ·8 ই. $\times$ উচ্চতা $=$ ·2 বর্গ ইঞ্চি,

বা, ·4ই. $\times$ উচ্চতা $=$ ·2 বর্গ ইঞ্চি

$\therefore$ উচ্চতা $=\frac{\cdot 2}{\cdot 4}$ ইঞ্চি $=$ ·5 ইঞ্চি।

চিত্র নং 85

অঙ্কন: ·8 ইঞ্চি দীর্ঘ AB সরলরেখা লও। A বিন্দুতে AX⊥AB টান এবং AX হইতে ·5 ইঞ্চির সমান AP কাটিয়া লও। PQ ∥ AB টান এবং Aকে কেন্দ্র করিয়া ·7 ইঞ্চি ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ আঁক, উহা যেন PQকে C বিন্দুতে ছেদ করিল। AC ও BC যোগ কর। এক্ষণে ABC নির্ণেয় ত্রিভুজ হইল।

প্রমাণ: CD⊥AB টান, CD হইল △ABC-র উচ্চতা।

AB-র উপর AP ও CD লম্ব বলিয়া উহারা সমান্তরাল।

স্থতরাং APCD একটি সামান্তরিক। $\therefore$ CD $=$ AP $=$ ·5 ইঞ্চি।

আর, অঙ্কন অনুসারে AB $=$ ·8″ এবং AC $=$ ·7″.

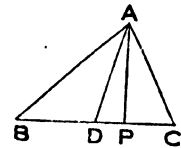
উদা. 2. ত্রিভুজের যে কোন মধ্যমা ত্রিভুজটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

[D. B. '48]

ABC ত্রিভুজের একটি মধ্যমা AD.

প্রমাণ করিতে হইবে যে △ABD $=$ △ACD.

চিত্র নং 86

প্রমাণ: AP⊥BC টান। AP হইল △ABD ও △ACDর উচ্চতা। $\because$ AD মধ্যমা, $\therefore$ BD $=$ DC:

এক্ষণে, যেহেতু ঐ ত্রিভুজ দুইটি সমান ভূমি ও একই উচ্চতাবিশিষ্ট, $\therefore$ উহাদের ক্ষেত্রফল সমান।

উদা. 3. কোন চতুর্ভুজ যদি উহার প্রত্যেক কর্ণদ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হয়, তবে উহা একটি সামান্তরিক হইবে।

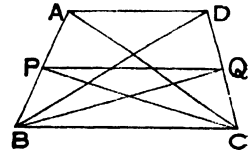
মনে কর, ABCD চতুর্ভুজ AC ও BD কর্ণদ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হইয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে ABCD একটি সামান্তরিক।

প্রমাণ: △ABC $=$ △DBC (স্বীকার) এবং উহারা একই ভূমির উপর একই পার্শ্বে অবস্থিত, $\therefore$ AD ∥ BC. অনুরূপে AB ∥ DC ;

$\therefore$ ABCD একটি সামান্তরিক।

উদা. 4. কোন ট্রাপিজিয়মের তির্যক বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু সংযোজক সরলরেখা উহার প্রত্যেক সমান্তরাল বাহুর সহিত সমান্তরাল। [C. U. 1936]

ABCD ট্রাপিজিয়মের AD ∥ BC তির্যক বাহু AB ও CD-র মধ্যবিন্দু P ও Q যোগ করা হইয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে PQ, AD ও BC-র সহিত সমান্তরাল। AC, PC, BD ও BQ যোগ কর।

চিত্র নং 87

প্রমাণ: ΔABC ও ΔBDC একই ভূমি BC র উপর এবং BC ও AD এই দুই সমান্তরাল সরলরেখার মধ্যে অবস্থিত,

$\therefore \Delta ABC = \Delta BDC$.

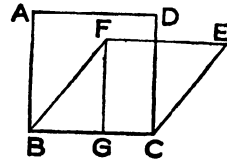
আবার, AB-র মধ্যবিন্দু P, $\therefore \Delta BPC = \frac{1}{2}\Delta ABC$.

Q, DC-র মধ্যবিন্দু বলিয়া $\Delta BQC = \frac{1}{2}\Delta BDC$.

$\therefore \Delta PBC = \Delta BQC$, এবং উহারা একই BC ভূমির উপর একই পার্শ্বে অবস্থিত। $\therefore PQ \parallel BC$.

আবার, $\because AD \parallel BC$, $\therefore$ PQ, BC ও AD উভয়ের সহিত সমান্তরাল।

উদা. 5. একটি বর্গক্ষেত্র এবং একটি রম্বস একই ভূমির উপর অবস্থিত হইলে কোন্‌টির ক্ষেত্রফল বৃহত্তর হইবে তাহা কারণসহ নির্ণয় কর। [C. U. '40]

মনে কর, ABCD বর্গক্ষেত্র ও BCEF রম্বস একই ভূমি BC-র উপর দণ্ডায়মান। কাহার ক্ষেত্রফল অধিক তাহা নির্ণয় করিতে হইবে। BCর-উপর FG লম্ব টান।

রম্বস ও বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = ভূমি × উচ্চতা। চিত্র নং 88

$\therefore$ ABCD বর্গক্ষেত্র $= BC.AB$, এবং রম্বস BCEF $= BC.FG$.

এখন $\angle G$ সমকোণ বলিয়া অতিভুজ $BF > FG$; কিন্তু $BF = BC = AB$.

$\therefore AB > FG$. $\therefore BC.AB > BC.FG$.

অতএব বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল রম্বসের ক্ষেত্রফল অপেক্ষা বৃহত্তর।

উদা. 6. প্রমাণ কর যে, কোন রম্বসের ক্ষেত্রফল উহার কর্ণদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের অর্ধেক। [C. U '29, '45]

ABCD রম্বসের AC ও BD কর্ণদ্বয় O বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ করিতে হইবে যে, রম্বস ABCD $= \frac{1}{2}AC.BD$.

প্রমাণ : রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পর লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত হয়,

$\therefore$ $\triangle ABD = \frac{1}{2}BD.AO$. অনুরূপে $\triangle BCD = \frac{1}{2}BD.CO$,

$\therefore$ রম্বস $ABCD = \triangle ABD + \triangle BCD = \frac{1}{2}BD.AO + \frac{1}{2}BD.CO$

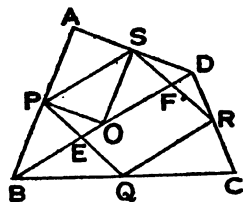
$$= \frac{1}{2}BD(AO + CO) = \frac{1}{2}BD.AC.$$

উদা. 7. কোন চতুর্ভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দুগুলি ক্রমান্বয়ে যোগ করিলে উৎপন্ন সামান্তরিকটি ঐ চতুর্ভুজের অর্ধেক হইবে।

চিত্র নং 89

ABCD চতুর্ভুজের P, Q, R, S যথাক্রমে AB, BC, CD, DA বাহুর মধ্যবিন্দু। মধ্যবিন্দুগুলি যথাক্রমে যোগ করিয়া PQRS সামান্তরিক হইল। প্রমাণ করিতে হইবে যে,

সামান্তরিক $PQRS = \frac{1}{2}$ চতুর্ভুজ ABCD.

BD-র মধ্যবিন্দু O লও। PO, SO যোগ কর। PQ ও SR, BDকে যথাক্রমে E ও F বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ : $\triangle ABD$-র বাহুগুলির মধ্যবিন্দু P, O, S যোগ করিয়া POS ত্রিভুজ হইয়াছে, $\therefore$ $\triangle POS = \frac{1}{4}\triangle ABD$.

আবার, $\because$ $PS \parallel EF$, $\therefore$ $\triangle POS = \frac{1}{2}$ সামান্তরিক PEFS (একই PS ভূমির উপর ও দুই সমান্তরাল সরলরেখা PS ও EF-এর মধ্যে অবস্থিত বলিয়া)

$\therefore$ সামান্তরিক $PEFS = \frac{1}{2}\triangle ABD$.

অনুরূপে প্রমাণ করা যায় যে, সামান্তরিক $QEFR = \frac{1}{2}\triangle BCD$.

$\therefore$ সমগ্র সামান্তরিক $PQRS = \frac{1}{2}$ চতুর্ভুজ ABCD.

প্রশ্নমালা 10

1. একটি নির্দিষ্ট আয়তের ভূমির উপর এবং উহার সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট এরূপ একটি সামান্তরিক অঙ্কিত কর যেন তাহার একটি কোণ 60° হয়।

2. একটি ত্রিভুজের ভূমি 1", অপর একটি বাহু 1·3" এবং ক্ষেত্রফল 2·4 বর্গ ইঞ্চি ; ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

3. একটি ত্রিভুজের ভূমি 1·6 সে. মি., ক্ষেত্রফল 1·2 বর্গ সে. মি. এবং একটি ভূমিসংলগ্ন কোণ 30° ; ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

4. একটি ত্রিভুজকে পাঁচটি সমান অংশে বিভক্ত কর।

5. কোন ত্রিভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দুগুলি সংযুক্ত করিলে ত্রিভুজটি চারিটি সমান ত্রিভুজে বিভক্ত হইবে।

6. একটি সমকোণী ত্রিভুজকে দুইটি সমান সমদ্বিবাহু ত্রিভুজে বিভক্ত কর।

7. ABCD চতুর্ভুজের AC কর্ণ BD কর্ণকে সমদ্বিখণ্ডিত করিল। প্রমাণ কর যে AC, চতুর্ভুজটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে। [B. U. '24]

8. $\triangle$ABC-র AB বাহুর মধ্যবিন্দু R এবং AC-র উপর P যে-কোন একটি বিন্দু। BPকে S পর্যন্ত বর্ধিত করায় $\triangle$RPS ও $\triangle$RCP-র ক্ষেত্রফল সমান হইল। প্রমাণ কর যে, SC ও AB সমান্তরাল। [B. U. '32]

9. একটি বর্গক্ষেত্রকে এরূপ চারি অংশে বিভক্ত কর যেন অংশ চারিটি হইতে দুইটি সমান বর্গক্ষেত্র গঠন করা যায়। [C. U. '32]

10. একটি আয়তক্ষেত্রের সমান এবং উহার কোন বাহুর সমান বাহুবিশিষ্ট একটি রম্বস অঙ্কিত কর। (কেবলমাত্র অঙ্কন চিহ্নগুলি দাও)। [C. U. '33]

11. প্রমাণ কর যে, কোন সরলরেখার উপর বর্গ উহার অর্ধাংশের উপর বর্গের চারিগুণ।

12. একটি সামান্তরিক উহার কোন কর্ণের মধ্যবিন্দু দিয়া অঙ্কিত যে কোন সরলরেখা দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

13. যে কোন ট্রাপিজিয়ম উহার সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু সংযোজক সরলরেখা দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

14. ABCD সামান্তরিকের AC কর্ণের উপর O একটি বিন্দু। OB, OD যোগ করিয়া প্রমাণ কর যে, AOB ও AOD ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল সমান।

15. কোন সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় উহাকে যে চারিটি ত্রিভুজে বিভক্ত করে তাহাদের ক্ষেত্রফল পরস্পর সমান।

16. কোন ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহুর মধ্যবিন্দু সংযোজক সরলরেখা উহার তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল। [W. B. S. F. '53 ; C. U. '17]

17. কোন ট্রাপিজিয়মের একটি তির্যক বাহুর মধ্যবিন্দুর সহিত বিপরীত বাহুর প্রান্তদ্বয় যোগ করিলে উৎপন্ন ত্রিভুজটি ট্রাপিজিয়মের অর্ধেক হইবে।

18. ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু B এবং D ও E যথাক্রমে AB ও BC বাহুর মধ্যবিন্দু। যদি AE ও CD পরস্পর F বিন্দুতে ছেদ করে, তবে প্রমাণ কর যে, $\triangle$BDE$=3\triangle$DEF. [C. U. 1866]

19. ABCD সামান্তরিকের DC ও AD বাহুর উপর যথাক্রমে X ও Y দুইটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে, ABX ও BYC ত্রিভুজদ্বয়ের ক্ষেত্রফল সমান।

[C. U. '47]

20. ABCD সামান্তরিকের অভ্যন্তরে O যে-কোন একটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে, $\triangle AOB + \triangle COD =$ সামান্তরিকের অর্ধেক। [C. U. '30]

21. যদি একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহু অপর একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহুর সমান হয় এবং ঐ বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণ দুইটি পরস্পর সম্পূরক হয়, তবে ত্রিভুজ দুইটি সমান হইবে।

22. কোন চতুর্ভুজের একটি কর্ণ যদি চতুর্ভুজটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে, তবে উহা অপর কর্ণকেও সমদ্বিখণ্ডিত করিবে।

23. একই BC ভূমির উপর উহার একই পার্শ্বে অবস্থিত ABC ও DBC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল সমান। ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ হইলে প্রমাণ কর যে, উহার পরিসীমা $\triangle DBC$-র পরিসীমা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

24. কোন নির্দিষ্ট সামান্তরিকের ভূমির উপর উহার সমান একটি রম্বস অঙ্কিত কর। কখন ঐরূপ অঙ্কন অসম্ভব হয়? [C. U. '35]

25. কোন ত্রিভুজের ভূমির উপর ঐ ত্রিভুজের সমান একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ আঁক।

26. কোন সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমিসংলগ্ন কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় বিপরীত বাহু দুইটিকে D ও E বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে, DE সরলরেখা ভূমির সমান্তরাল। [P. U.]

27. ABC ত্রিভুজের AB বাহুর উপর P একটি বিন্দু। P বিন্দু দিয়া BC-র সমান ও সমান্তরাল করিয়া PQR সরলরেখা টানা হইল এবং উহা ACকে Q বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে, $\triangle AQR = \triangle BPQ$. [B. U. '22]

28. X ও Y যথাক্রমে ABC ত্রিভুজের AB ও BC বাহুর মধ্যবিন্দু। প্রমাণ কর যে, $\triangle AXY = \frac{1}{4} \triangle ABC$.

29. সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমির উপরিস্থিত কোন বিন্দু হইতে উহার সমান বাহু দুইটির উপর অঙ্কিত লম্বদ্বয়ের সমষ্টি ভূমির যে কোন প্রান্ত হইতে বিপরীত বাহুর উপর লম্বের সমান হইবে। [D. B. '40]

$\triangle ABC$-র $AB = AC$, এবং BC ভূমির উপর P যে-কোন বিন্দু। P হইতে AB ও AC-র উপর যথাক্রমে PQ ও PR লম্ব এবং B হইতে AC-র উপর BS লম্ব টানা হইয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে $PQ + PR = BS$. AP যোগ কর।

প্রমাণ : ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}$ ভূমি $\times$ উচ্চতা। $\therefore \triangle APB=\frac{1}{2}AB.PQ$ $=\frac{1}{2}AC.PQ$, $\triangle APC=\frac{1}{2}AC.PR$. আবার, $\triangle ABC=\frac{1}{2}AC.BS$.

একণে, $\because \triangle APB+\triangle APC=\triangle ABC$, $\therefore \frac{1}{2}AC.PQ+\frac{1}{2}AC.PR$ $=\frac{1}{2}AB.BS$, বা, $\frac{1}{2}AC(PQ+PR)=\frac{1}{2}AC.BS$ $\therefore PQ+PR=BS$.

30. কোন সমবাহু ত্রিভুজের অন্তঃস্থিত কোন বিন্দু হইতে উহার বাহুগুলির উপর লম্বত্রয়ের সমষ্টি ত্রিভুজটির যে কোন শীর্ষ হইতে বিপরীত বাহুর উপর লম্বের সমান।

31. রম্বসের অভ্যন্তরস্থ যে-কোন বিন্দু হইতে উহার বাহুগুলির দূরত্বের সমষ্টি ধ্রুবক।

[**Hints :** ঐ দূরত্ব চারিটির সমষ্টি রম্বসের উচ্চতার দ্বিগুণ দেখাও।...]

32. একই ভূমির উপর উহার দুই বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত দুই সমান ত্রিভুজের শীর্ষ বিন্দুদ্বয় সংযোজক সরলরেখাটি ভূমি দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

33. রম্বসের ক্ষেত্রফল উহার কর্ণদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তের অর্ধেক।

34. যদি দুইটি ত্রিভুজের উচ্চতা সমান কিন্তু ভূমিদ্বয় অসমান হয়, তবে বৃহত্তর ভূমিবিশিষ্ট ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল বৃহত্তর হইবে।

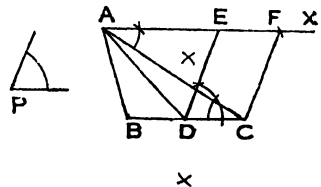
35. যে চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় চতুর্ভুজটিকে চারিটি সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ত্রিভুজে বিভক্ত করে তাহা একটি সামান্তরিক।

সম্পাদ্য 18

এমন একটি সামান্তরিক অঙ্কিত করিতে হইবে যাহার ক্ষেত্রফল একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের সমান এবং একটি কোণ কোন নির্দিষ্ট কোণের সমান হইবে।

[*To construct a parallelogram equal in area to a given triangle and having an angle equal to a given angle.*]

ABC একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজ এবং $\angle P$ একটি নির্দিষ্ট কোণ।

ABC ত্রিভুজের সমান ক্ষেত্রফল-বিশিষ্ট এমন একটি সামান্তরিক অঙ্কিত করিতে হইবে যাহার একটি কোণ P-কোণের সমান হইবে।

চিত্র নং 90

অঙ্কন : BCকে D বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর। D বিন্দুতে ∠P-র সমান করিয়া ∠CDE অঙ্কিত কর। A বিন্দু হইতে BC-র সমান্তরাল AX টান, উহা যেন DEকে E বিন্দুতে ছেদ করিল। EX হইতে DC-র সমান EF অংশ ছেদ করিয়া CF যোগ কর। CDEF উদ্দিষ্ট সামান্তরিক হইল।

প্রমাণ : AD যোগ কর।

∵ DC ও EF সমান ও সমান্তরাল, ∴ CDEF একটি সামান্তরিক।

△ACD ও সামান্তরিক CDEF একই DC ভূমির উপর এবং DC ও AF সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত, ∴ সামান্তরিক CDEF=2△ACD.

আবার, ∵ ABC ত্রিভুজের AD একটি মধ্যমা,

∴ △ABD=△ACD, ∴ △ABC=2△ACD.

∴ সামান্তরিক CDEF=△ABC এবং উহার ∠CDE=∠P.

∴ CDEF উদ্দিষ্ট সামান্তরিক।

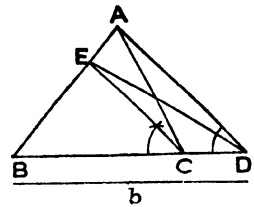
[**দ্রষ্টব্য :** যদি কোন ত্রিভুজের সমান আয়তক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হয়, তবে D বিন্দুতে CDE কোণটি সমকোণ আঁকিবে।]

বিবিধ উদাহরণ 4

উদা. 1. কোন নির্দিষ্ট ভূমির উপর একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত কর।

ABC একটি ত্রিভুজ এবং b একটি সরলরেখা। bর সমান ভূমির উপর △ABC-র সমান একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

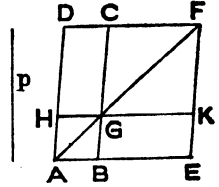
চিত্র নং 91

BC বা বর্ধিত BC হইতে bর সমান BD অংশ কাটিয়া লও। AD যোগ কর। C বিন্দু হইতে DA-র সমান্তরাল করিয়া CE রেখা টান। CE যেন BA বা উহার বর্ধিতাংশকে E বিন্দুতে ছেদ করিল। ED যোগ কর। EBD নির্ণেয় ত্রিভুজ হইল।

প্রমাণ : △ACE=△ECD (একই EC ভূমির উপর ও EC, AD সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত বলিয়া),

∴ △BDE=△ABC, এবং ইহার BD=b.

উদা. 2. একটি নির্দিষ্ট সামান্তরিকের সহিত সমক্ষেত্রফলবিশিষ্ট এমন একটি সামান্তরিক অঙ্কিত কর যেন তাহার একটি বাহু একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান হয়।

ABCD একটি নির্দিষ্ট সামান্তরিক এবং P একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা। ঐ প্রদত্ত সামান্তরিকের সমান এরূপ একটি সামান্তরিক আঁকিতে হইবে যাহার একটি বাহু P-র সমান হইবে।

চিত্র নং 92

অঙ্কন : ABকে E পর্যন্ত বর্ধিত কর, যেন AE=P হয়। AEFD সামান্তরিকটি অঙ্কিত কর। AF যোগ কর, উহা যেন BCকে G বিন্দুতে ছেদ করিল। G বিন্দু দিয়া AE-র সমান্তরাল HGK সরলরেখা টান, উহা যেন AD ও EFকে যথাক্রমে H ও K বিন্দুতে ছেদ করিল। AEKH উদ্দিষ্ট সামান্তরিক হইল।

প্রমাণ : অঙ্কন অনুসারে ABGH, CFKG, BGKE, GCDH ও AEKH এক একটি সামান্তরিক।

∵ AEFD সামান্তরিকের কর্ণ AF, ∴ $\triangle AEF = \triangle ADF \cdots (1)$

অনুরূপে, $\triangle ABG = \triangle AGH$, এবং $\triangle GKF = \triangle GCF$,

∴ $\triangle AGB + \triangle GKF = \triangle AGH + \triangle GCF \cdots (2)$

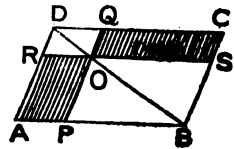
এক্ষণে, (1) হইতে (2) বিয়োগ করিলে

সামান্তরিক BEKG= সামান্তরিক GCDH হয়।

এই দুই সমান পক্ষে সামান্তরিক ABGH যোগ করিলে সামান্তরিক AEKH=সামান্তরিক ABCD হয়, এবং ইহার AE=P.

অতএব, AEKH উদ্দিষ্ট সামান্তরিক।

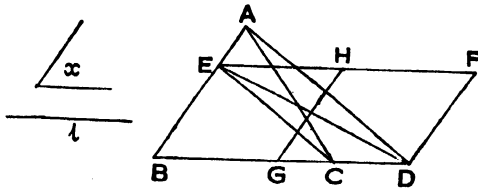
[**দ্রষ্টব্য :** ABCD একটি সামান্তরিক। উহার একটি কর্ণ BD-র উপর O যে-কোন একটি বিন্দু। O বিন্দুর মধ্য দিয়া সামান্তরিকের বিপরীত বাহুগুলি পর্যন্ত প্রসারিত PQ ও RS সরলরেখা যথাক্রমে BC ও AB-র সমান্তরাল করিয়া টানা হইল। ইহাতে প্রদত্ত সামান্তরিকটি চারিটি সামান্তরিকে বিভক্ত হইল।

চিত্র নং 93

চিত্রে দেখ RQ ও PS সামান্তরিকদ্বয়ের কর্ণদ্বয় BD কর্ণের সহিত মিলিত

হইয়াছে। উহাদিগকে কর্ণের পার্শ্ববর্তী সামান্তরিক (Parallelograms about the diagonal) বলা হয়। আর, AO এবং CO সামান্তরিক দুইটিকে RQ ও PS সামান্তরিকের পূরক (complements) বলে।

কোন সামান্তরিককে ABCD এইরূপ চারিটি অক্ষর (কৌণিক বিন্দুর নাম) দ্বারা সূচিত করা হয়। আবার সংক্ষেপে উহাকে AC বা BD সামান্তরিকও বলা যায়।]

উদা. ৪. একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট এরূপ একটি সামান্তরিক অঙ্কিত কর যেন তাহার একটি বাহু ও একটি কোণ যথাক্রমে কোন নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্য ও কোণের সমান হয়।

এমন একটি সামান্তরিক আঁকিতে হইবে যাহার ক্ষেত্রফল $=\triangle ABC$, একটি বাহু $=l$ এবং একটি কোণ $=\angle x$.

চিত্র নং 94

অঙ্কন : BCকে D পর্যন্ত বর্ধিত কর, যেন $BD=2l$ হয়। AD যোগ কর। CE ∥ DA টান, CE যেন ABকে E বিন্দুতে ছেদ করিল। EF ∥ BD টান। BDর মধ্যবিন্দু Gতে $\angle DGH=\angle x$ আঁক। GH যেন EFকে H বিন্দুতে ছেদ করিল। DF ∥ GH টান, উহা যেন EFকে F বিন্দুতে ছেদ করিল। FDGH উদ্দিষ্ট সামান্তরিক হইল।

প্রমাণ : ED যোগ কর। $\triangle ECD=\triangle AEC$ (কারণ, উহারা একই EC ভূমির উপর এবং EC ও AD সমান্তরাল সরল রেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত)।

$\therefore \quad \triangle BED=\triangle ABC.$

$\because$ HF ∥ GD এবং GH ∥ DF, $\therefore$ FDGH একটি সামান্তরিক।

সামান্তরিক FDGH ও $\triangle BED$ দুই সমান্তরাল সরলরেখার মধ্যে অবস্থিত এবং সামান্তরিকটির ভূমি GD, ত্রিভুজের ভূমি BD-র অর্ধেক।

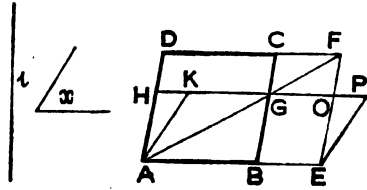
$\therefore$ সামান্তরিক $FDGH=\triangle BED=\triangle ABC$,

এবং উহার $\angle HGD=\angle x$ এবং ভূমি $GD=\frac{1}{2}.BD=l$.

উদা. 4. একটি নির্দিষ্ট সামান্তরিকের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট এরূপ একটি সামান্তরিক অঙ্কিত কর যাহার একটি বাহু ও একটি কোণ একটি নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্য ও নির্দিষ্ট কোণের সমান হইবে। [C. U. '44]

ABCD সামান্তরিকের সমান এমন একটি সামান্তরিক আঁকিতে হইবে যাহার একটি বাহু $= l$ এবং একটি কোণ $= \angle x$ হইবে।

অঙ্কন : AB বা বর্ধিত AB হইতে lএর সমান AE কাটিয়া লও। EF ‖ AD টান, উহা DCকে F বিন্দুতে ছেদ করিল।

AF যোগ কর, উহা BCকে G বিন্দুতে ছেদ করিল। G বিন্দুর মধ্য দিয়া HGO ‖ AE টান, উহা যেন ADকে H বিন্দুতে এবং EFকে O বিন্দুতে ছেদ করিল। A বিন্দুতে $\angle EAK = \angle x$ আঁক,

চিত্র নং 95

AK যেন HOকে K বিন্দুতে ছেদ করিল। EP ‖ AK টান। EP যেন বর্ধিত HOকে P বিন্দুতে ছেদ করিল। এখন AKPE উদ্দিষ্ট সামান্তরিক হইল।

প্রমাণ ঃ অঙ্কন অনুসারে CGOF, ABGH, BEOG, AEFD, AKPE ও DCGH ক্ষেত্রগুলি সামান্তরিক। একটি সামান্তরিক উহার কর্ণ দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

∴ $\triangle ADF = \triangle AFE$, $\triangle CFG = \triangle FOG$, $\triangle AGH = \triangle ABG$.

∴ $\triangle ADF - \triangle CFG - \triangle AGH = \triangle AEF - \triangle FOG - \triangle ABG$,

∴ সামান্তরিক DCGH = সামান্তরিক BEOG,

∴ সামান্তরিক ABCD = সামান্তরিক AEOH.

এখন সামান্তরিক AEPK = সামান্তরিক AEOH (∵ ভূমি ও উচ্চতা সমান)

= সামান্তরিক ABCD.

আবার, AEPK সামান্তরিকের $\angle KAE = \angle x$ এবং বাহু $AE = l$.

প্রশ্নমালা 11

1. একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সমান একটি আয়তক্ষেত্র অঙ্কিত কর।

2. প্রমাণ কর যে, দুইটি পূরক সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল পরস্পর সমান।

3. কোন নির্দিষ্ট সামান্তরিকের সমান এবং একটি নির্দিষ্ট কোণবিশিষ্ট একটি সামান্তরিক অঙ্কিত কর।

4. কোন নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সমান এবং কোন নির্দিষ্ট উচ্চতাবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত কর।

5. একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সমান করিয়া কোন নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর একটি আয়তক্ষেত্র অঙ্কিত কর। [C. U. '49]

6. একটি নির্দিষ্ট আয়তক্ষেত্রের আয়তনের সমান এরূপ একটি ABCD সামান্তরিক অঙ্কিত কর যেন তাহার AB ও AD বাহুদ্বয় দুইটি নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান হয়। [C. U. '49]

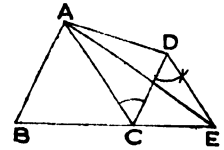
7. একটি প্রদত্ত ত্রিভুজের সমান এরূপ একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত কর যাহার শীর্ষবিন্দু নির্দিষ্ট এবং যাহার ভূমি প্রদত্ত ত্রিভুজের ভূমির সহিত একরেখীয়।

8. কোন নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সমান করিয়া একটি নির্দিষ্ট ভূমির উপর এরূপ একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত কর যাহার একটি ভূমিসংলগ্ন কোণ একটি নির্দিষ্ট কোণের সমান হইবে।

সম্পাদ্য 19

কোন নির্দিষ্ট চতুর্ভুজের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

[*To construct a triangle equal in area to a given quadrilateral.*]

ABCD একটি নির্দিষ্ট চতুর্ভুজ। ইহার সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

চিত্র নং 96

অঙ্কন: AC যোগ কর। D বিন্দু হইতে AC-র সমান্তরাল একটি সরলরেখা টান, উহা যেন বর্ধিত BC-কে E বিন্দুতে ছেদ করিল। AE যোগ কর। ΔABE উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল।

প্রমাণ: ACE ও ACD ত্রিভুজ দুইটি একই AC ভূমির উপর এবং একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয় AC ও DE-র মধ্যে অবস্থিত।

$\therefore$ $\Delta ACE = \Delta ACD$, $\therefore$ $\Delta ACE + \Delta ABC = \Delta ACD + \Delta ABC$,

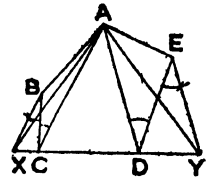
$\therefore$ $\Delta ABE =$ চতুর্ভুজ ABCD.

দ্রষ্টব্য: উপরের প্রণালীতে যে কোন বহুভুজের বাহুসংখ্যা ক্রমশঃ একটি করিয়া কমাইয়া ঐ বহুভুজের সমান একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করা যায়। মনে কর,

কোন বহুভুজের সমান একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

[*To draw a triangle equal in area to a given polygon.*]

চিত্র নং 97

ABCDE একটি বহুভুজ। B ও E হইতে যথাক্রমে AC ও AD-র সমান্তরাল করিয়া BX ও EY দুইটি সরলরেখা টান। উহারা যেন CD-র বর্ধিত অংশকে যথাক্রমে X ও Y বিন্দুতে ছেদ করিল। AX ও AY যোগ কর।

ΔAXY উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল।

প্রমাণ : $\Delta ACX = \Delta ABC$ (একই AC ভূমির উপর এবং একই AC ও BX সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত বলিয়া)।

অনুরূপে $\Delta ADY = \Delta ADE$.

$\therefore \quad \Delta ACX + \Delta ADY = \Delta ABC + \Delta ADE$.

উভয়পক্ষে ΔACD যোগ করিয়া পাই

$\Delta ACX + \Delta ACD + \Delta ADY = \Delta ABC + \Delta ACD + \Delta ADE$.

$\therefore \quad \Delta AXY =$ বহুভুজ ABCDE.

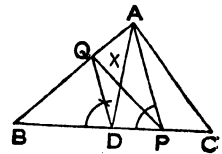
সম্পাদ্য 20

ত্রিভুজের একটি বাহুর উপরিস্থিত কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে সরল রেখা টানিয়া ত্রিভুজটিকে সমান দুই অংশে বিভক্ত করিতে হইবে।

[*To bisect a triangle by a straight line drawn from a given point on one of its sides.*]

চিত্র নং 98

ABC ত্রিভুজের BC বাহুর উপর P একটি নির্দিষ্ট বিন্দু।

P বিন্দু হইতে সরলরেখা টানিয়া ত্রিভুজটিকে সমান দুই অংশে বিভক্ত করিতে হইবে।

অঙ্কন : AP যোগ কর এবং BCকে D বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর।

DQ ∥ PA টান, DQ যেন ABকে Q বিন্দুতে ছেদ করিল। PQ যোগ কর।

PQ সরলরেখা ΔABCকে সমদ্বিখণ্ডিত করিল।

প্রমাণ : AD যোগ কর।

∵ AD, ABC ত্রিভুজের মধ্যমা, ∴ $\triangle ABD = \frac{1}{2}\triangle ABC$.

এক্ষণে, $\triangle PDQ$ ও $\triangle ADQ$ একই ভূমি DQএর উপর এবং DQ ও AP সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত, ∴ $\triangle PDQ = \triangle ADQ$.

∴ $\triangle PDQ + \triangle BDQ = \triangle ADQ + \triangle BDQ$.

∴ $\triangle BPQ = \triangle ABD = \frac{1}{2}\triangle ABC$.

∴ PQ সরলরেখা $\triangle ABC$কে সমান দুই অংশে বিভক্ত করিয়াছে।

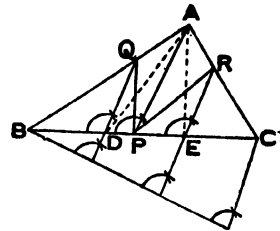
সম্পাদ্য 21

একটি ত্রিভুজের যে কোন বাহুস্থিত একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে দুইটি সরলরেখা টানিয়া ত্রিভুজটিকে সমান তিন ভাগে বিভক্ত করিতে হইবে।

[*To trisect a triangle by two st. lines drawn from a given point on one of its sides.*]

চিত্র নং 99

ABC ত্রিভুজের BC বাহুর উপর P একটি নির্দিষ্ট বিন্দু।

P বিন্দু হইতে দুইটি সরলরেখা টানিয়া ত্রিভুজটিকে সমান তিন ভাগে বিভক্ত করিতে হইবে।

অঙ্কন : BCকে D ও E বিন্দুতে সমান তিন অংশে বিভক্ত কর। AP যোগ কর।

D ও E বিন্দুতে PA-র সমান্তরাল দুইটি সরলরেখা টান, উহারা যেন AB ও ACকে যথাক্রমে Q ও R বিন্দুতে ছেদ করিল। PQ ও PR যোগ কর।

PQ ও PR সরলরেখা $\triangle ABC$কে সমান তিন ভাগে বিভক্ত করিল।

প্রমাণ : AD ও AE যোগ কর।

∵ $\triangle ABD$, $\triangle ADE$ ও $\triangle AEC$ সমান সমান ভূমির উপর অবস্থিত এবং একই উচ্চতাবিশিষ্ট, ∴ তাহাদের ক্ষেত্রফল সমান।

∴ $\triangle ABD = \triangle AEC = \frac{1}{3}\triangle ABC$. ∵ $\triangle DPQ$ ও $\triangle AQD$ একই DQ ভূমির উপর এবং AP ও DQ সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত,

∴ $\triangle DPQ = \triangle AQD$. ∴ $\triangle DPQ + \triangle BDQ = \triangle AQD + \triangle BDQ$.

∴ $\triangle BPQ = \triangle ABD = \frac{1}{3}\triangle ABC$. অনুরূপে $\triangle CPR = \triangle AEC = \frac{1}{3}\triangle ABC$.

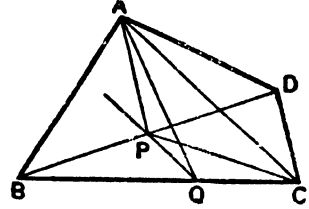
অতএব, অবশিষ্ট অংশ $AQPR = \frac{1}{3}\triangle ABC$.

∴ PQ ও PR সরলরেখা দুইটি $\triangle ABC$কে সমান তিন ভাগে বিভক্ত করিয়াছে।

সম্পাদ্য 22

চতুর্ভুজের কোন কৌণিক বিন্দু হইতে সরলরেখা টানিয়া চতুর্ভুজটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

[*To bisect a quadrilateral by a straight line drawn from an angular point.*]

ABCD একটি চতুর্ভুজ। মনে কর, A কৌণিক বিন্দু হইতে সরলরেখা টানিয়া উহাকে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

চিত্র নং 100

অঙ্কন : AC ও BD যোগ কর।

BDকে P বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর এবং ACর সহিত সমান্তরাল করিয়া PQ রেখা টান, উহা যেন BCকে Q বিন্দুতে ছেদ করিল। AQ যোগ কর।

AQ সরলরেখা চতুর্ভুজ ABCDকে সমদ্বিখণ্ডিত করিল।

প্রমাণ : AP, CP যোগ কর।

∵ AP, $\triangle$ABDর মধ্যমা, ∴ $\triangle APD = \frac{1}{2}\triangle ABD$.

অনুরূপে, $\triangle PCD = \frac{1}{2}\triangle BCD$. ∴ চতুর্ভুজ APCD $= \frac{1}{2}$ চতুর্ভুজ ABCD.

আবার, $\triangle$APC ও $\triangle$AQC একই ভূমি ACর উপর এবং PQ, AC এই দুই সমান্তরাল সরলরেখার মধ্যে অবস্থিত বলিয়া উহাদের ক্ষেত্রফল সমান।

উভয়ের সহিত $\triangle$ADC যোগ কর।

এখন চতুর্ভুজ APCD = চতুর্ভুজ AQCD হইল।

∴ AQCD চতুর্ভুজ $= \frac{1}{2}$ চতুর্ভুজ ABCD.

অতএব, AQ রেখা চতুর্ভুজ ABCDকে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে।

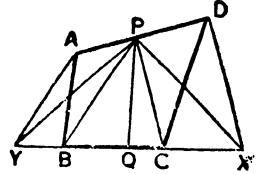
বিবিধ উদাহরণ 5

উদা. 1. চতুর্ভুজের কোন বাহুর উপরিস্থ একটি বিন্দু হইতে একটি সরলরেখা টানিয়া চতুর্ভুজটিকে সমদ্বিখণ্ডিত কর। [C. U. '41, '49]

ABCD চতুর্ভুজের AD বাহুর উপর P একটি বিন্দু। P হইতে সরলরেখা টানিয়া চতুর্ভুজটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে। PB ও PC যোগ কর। A হইতে PBর সমান্তরাল AY এবং D হইতে PCর সমান্তরাল DX টান। AY ও DX যেন BCর বর্ধিতাংশকে Y ও X বিন্দুতে ছেদ করিল। PX ও PY যোগ কর।

YXকে Q বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর। PQ যোগ কর। PQ রেখা ABCD চতুর্ভুজকে সমদ্বিখণ্ডিত করিল।

প্রমাণ: ∵ PQ, $\triangle$PYX-এর মধ্যমা, ∴ $\triangle PYQ = \triangle PXQ$.

আবার, একই BP ভূমির উপর এবং BP, AY সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত বলিয়া $\triangle APB = \triangle BPY$. উভয়পক্ষে $\triangle$PBQ যোগ করিলে চতুর্ভুজ $APQB = \triangle PYQ$ হইল।

অনুরূপে দেখান যায় যে, চতুর্ভুজ $PDCQ = \triangle PQX$.

চিত্র নং 101

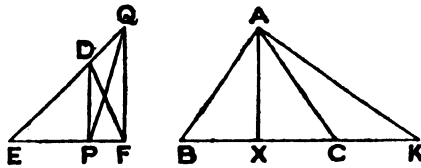
∴ চতুর্ভুজ APQB = চতুর্ভুজ PDCQ,

∴ ABCD চতুর্ভুজ PQ সরলরেখা দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হইয়াছে।

উদা. 2. দুইটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সমষ্টির সমান একটি ত্রিভুজ আঁক।

ABC ও DEF ত্রিভুজদ্বয়ের সমষ্টির সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ আঁকিতে হইবে।

মনে কর, $\triangle ABC > \triangle DEF$ এবং AX ও DP যথাক্রমে উহাদের উচ্চতা।

অঙ্কন: $\triangle$DEF-এর সমান ও AX উচ্চতাবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ আঁক। মনে কর, EPQ ঐ ত্রিভুজ। BCকে K বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত কর যেন $CK = EP$ হয়। AK যোগ কর। $\triangle$ABK উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল।

চিত্র নং 102

প্রমাণ: $\triangle$ACK ও $\triangle$EPQএর ভূমি CK = ভূমি EP এবং উভয়েরই উচ্চতা AX-এর সমান। ∴ $\triangle ACK = \triangle EPQ$.

∴ $\triangle ABK = \triangle ABC + \triangle ACK = \triangle ABC + \triangle EPQ = \triangle ABC + \triangle DEF$.

[**দ্রষ্টব্য:** যদি দুইটি ত্রিভুজের অন্তরফলের সমান ত্রিভুজ আঁকিতে হয়, তবে BC হইতে EPর সমান BK অংশ কাটিয়া লইয়া AK যোগ করিলে উদ্দিষ্ট ACK ত্রিভুজ পাইবে।]

প্রশ্নমালা 12

1. একটি ত্রিভুজের কোন বাহুস্থিত একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে সরলরেখা টানিয়া ত্রিভুজটির চতুর্থাংশ, পঞ্চমাংশ বা যে-কোন অংশ কাটিয়া লইবার প্রণালী দেখাও।

2. কোন ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দু হইতে সরলরেখা টানিয়া ত্রিভুজটির $\frac{2}{7}$ অংশ ছেদ কর।

3. ত্রিভুজের কোন বাহুস্থিত একটি বিন্দু হইতে সরলরেখা টানিয়া ত্রিভুজটিকে 2 : 5 অনুপাতে বিভক্ত কর।

4. কোন ঋজুরৈখিক ক্ষেত্রের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত কর। [C. U. '39]

5. একটি সামান্তরিকের অভ্যন্তরস্থ কোন বিন্দু দিয়া একটি সরলরেখা টানিয়া সামান্তরিকটিকে সমদ্বিখণ্ডিত কর।

6. একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া সরলরেখা টানিয়া একটি নির্দিষ্ট সামান্তরিককে সমদ্বিখণ্ডিত কর।

7. কোন বহুভুজের সমান করিয়া একটি আয়তক্ষেত্র অঙ্কিত কর।

8. একটি বহুভুজের সমান ও একটি নির্দিষ্ট কোণবিশিষ্ট একটি সামান্তরিক অঙ্কিত কর।

9. দুইটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের অন্তরফলের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত কর।

10. দুইটি চতুর্ভুজের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট এমন একটি সামান্তরিক অঙ্কিত কর যাহার একটি কোণ 30° হইবে।

11. একটি ত্রিভুজের সমান এমন একটি আয়তক্ষেত্র অঙ্কিত কর যাহার একটি বাহু নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের সমান হইবে।

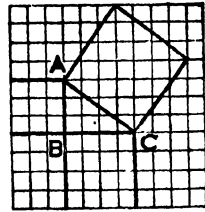
12. সামান্তরিকের একটি শীর্ষ হইতে দুইটি সরলরেখা টানিয়া উহাকে সমত্রিখণ্ডিত কর।

---

18. ছক কাগজের সাহায্যে ক্ষেত্রফল সম্বন্ধীয় পরীক্ষা প্রণালী পূর্বে দেখান হইয়াছে। এখানে উহার সাহায্যে একটি বিশেষ জ্যামিতিক উপপাদ্যের সত্যতা সম্বন্ধে পরীক্ষা করা হইতেছে।

এই উপপাদ্যটি গ্রীস দেশীয় পণ্ডিত পীথাগোরাস কর্তৃক আবিষ্কৃত হয়। এইজন্য ইহাকে 'পীথাগোরাসের উপপাদ্য' (Pythagoras' Theorem) বলা হয়।

উপপাদ্যটি হইল—"কোন সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র উহার অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টির সমান।"

পরীক্ষা : ছক কাগজের উপর ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ আঁকা হইল। উহার B কোণ সমকোণ। AB = 3 দৈর্ঘ্য একক এবং BC = 4 দৈর্ঘ্য একক। ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর দৈর্ঘ্যকে দৈর্ঘ্য একক ধরা হইল। এক্ষণে AB ও BCর উপর বর্গক্ষেত্রগুলি দেখ।

চিত্র নং 103

AB বাহুর উপর যে বর্গক্ষেত্র তাহা 9টি ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের সমষ্টি এবং BCর উপর বর্গক্ষেত্রটি এইরূপ 16টি ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের সমষ্টি। সুতরাং ঐ দুই বাহুর উপর বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টি হইল (9 + 16) বা 25 বর্গ একক।

এখন ছক কাগজের উপর অতিভুজ ACর সমান একটি সরলরেখা লইয়া উহার উপর বর্গক্ষেত্রটি দেখ। দেখা যায় যে, ঐ বর্গক্ষেত্রটি 25টি ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের সমষ্টি, অর্থাৎ 25 বর্গ একক।

অতএব, অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র অপর বাহুদ্বয়ের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টির সমান হইল।

উপপাদ্য 30

সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র উহার অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টির সমান।

[*The square on the hypotenuse of a right-angled triangle is equal to the sum of the squares on the other two sides.*]

[Euc. 1. '47]

ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ, ইহার BAC কোণটি সমকোণ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

অঙ্কন: AB, AC ও BCর উপর যথাক্রমে ABDE, ACFG ও BCHK বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর।

চিত্র নং 104

A বিন্দু হইতে BKর সমান্তরাল AL সরলরেখা টান, উহা যেন BCকে O বিন্দুতে এবং KHকে L বিন্দুতে ছেদ করিল। CD ও AK যোগ কর।

প্রমাণ: ∠BAC ও ∠BAE প্রত্যেকটি সমকোণ এবং উহারা সন্নিহিত কোণ।

∴ AC ও AE এক সরলরেখায় অবস্থিত।

এখন, ∠ABD = ∠CBK (∵ প্রত্যেকে সমকোণ)

∴ ∠ABD + ∠ABC = ∠ABC + ∠CBK, ∴ ∠DBC = ∠ABK.

এক্ষণে, △DBC ও △ABK-এর BD = AB, BC = BK,

এবং অন্তর্ভূর্ত ∠DBC = অন্তর্ভূর্ত ∠ABK, ∴ △DBC ≅ △ABK.

এখন, বর্গক্ষেত্র BE ও △DBC একই ভূমি BDর উপর এবং একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয় BD ও CE-র মধ্যে অবস্থিত, ∴ বর্গক্ষেত্র BE = 2△DBC.

আবার, আয়ত BKLO ও △ABK একই ভূমি BK-র উপর এবং একই BK ও AL সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত,

∴ আয়ত BKLO = 2△ABK = 2△DBC,

∴ আয়ত BKLO = বর্গক্ষেত্র ABDE.

অনুরূপে BF ও AH যোগ করিয়া প্রমাণ করা যায় যে,

আয়ত CHLO = বর্গক্ষেত্র ACFG.

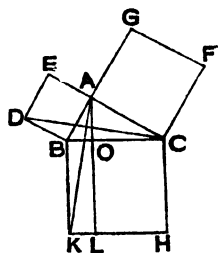
∴ আয়ত BKLO + আয়ত CHLO = বর্গক্ষেত্র BE + বর্গক্ষেত্র CG.

∴ বর্গক্ষেত্র BH = বর্গক্ষেত্র BE + বর্গক্ষেত্র CG, অর্থাৎ $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

[**দ্রষ্টব্য:** তোমরা জান যে, ABC ত্রিভুজের AB, AC ও BC বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে c, b ও a দ্বারা সূচিত হয়। অতএব, উপপাদ্য 30 অনুসারে $a^2 = b^2 + c^2$, সুতরাং সমকোণী ত্রিভুজের দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য জানা থাকিলে $a^2 = b^2 + c^2$ হইতে তৃতীয় বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করা যাইবে।]

অনুসিদ্ধান্ত: উপপাদ্য 30 হইতে নিম্নের অনুসিদ্ধান্তগুলি পাওয়া যায়। ঐ ABC ত্রিভুজের ∠A সমকোণ এবং BCর উপর AO লম্ব হইলে

(1) $AB^2 = BO.BC$ (অর্থাৎ BO ও BC বাহুদ্বারা গঠিত আয়তক্ষেত্র)

(2) $AC^2 = CO.BC$.

প্রমাণ : উপপাদ্য 30এ প্রমাণিত হইয়াছে যে,

(1) বর্গক্ষেত্র BE = আয়তক্ষেত্র BKLO,

$\therefore$ $AB^2 = BO.BK = BO.BC$ [$\because$ $BK = BC$]

(2) অনুরূপে, বর্গক্ষেত্র CG = আয়তক্ষেত্র CHLO,

অর্থাৎ $AC^2 = CO.CH = CO.BC$.

19. ছক কাগজে ABC একটি ত্রিভুজ আঁক যাহার $BC = 5$ দৈর্ঘ্য একক, $AB = 4$ দৈর্ঘ্য একক এবং $AC = 3$ দৈর্ঘ্য একক। এখানে $BC^2 = 5^2$ বা 25 বর্গ একক, $AB^2 = 4^2$ বা 16 বর্গ একক এবং $AC^2 = 3^2$ বা 9 বর্গ একক।
$\therefore$ $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

এক্ষণে BAC কোণটি মাপিয়া দেখ উহা একটি সমকোণ হইয়াছে।

অতএব, সিদ্ধান্ত হইল যে, "কোন ত্রিভুজের একটি বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গ অপর বাহুদ্বয়ের উপর অঙ্কিত বর্গদ্বয়ের সমষ্টির সমান হইলে, শেষোক্ত বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণটি সমকোণ হইবে।"

ইহা **পীথাগোরাসের উপপাদ্যের বিপরীত উপপাদ্য** হইল।

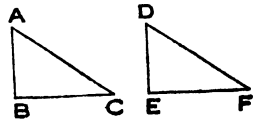
উপপাদ্য 31

কোন ত্রিভুজের একটি বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র উহার অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টির সমান হইলে শেষোক্ত বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণটি সমকোণ হইবে।

[*If the square on one side of a triangle is equal to the sum of the squares on the other two sides, the angle contained by these two sides is a right angle.*]

ABC একটি ত্রিভুজ, ইহার

$AC^2 = AB^2 + BC^2$.

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\angle ABC$ = এক সমকোণ।

চিত্র নং 105

অঙ্কন : BCর সমান EF সরলরেখা লও।

EF-এর উপর ABর সমান করিয়া ED লম্ব টান। DF যোগ কর।

প্রমাণ : $\because$ $AB = DE$ এবং $BC = EF$,

$\therefore$ $AB^2 + BC^2 = DE^2 + EF^2 = DF^2$ ($\because$ $\angle DEF$ সমকোণ);

কিন্তু $AB^2 + BC^2 = AC^2$ (স্বীকার), $\therefore$ $AC^2 = DF^2$, $\therefore$ $AC = DF$.

এখন, $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$এর $AB=DE$, $BC=EF$ এবং $AC=DF$,

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। $\therefore$ $\angle ABC = \angle DEF =$ এক সমকোণ।

[**দ্রষ্টব্য:** এই উপপাদ্য হইতে সমকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলির দৈর্ঘ্য নির্ণয়ের সংকেত পাওয়া যায়।

তোমরা জান $(x^2+y^2)^2=(x^2-y^2)^2+(2xy)^2$, ইহা একটি অভেদ। এখানে দেখা যাইতেছে x^2+y^2, x^2-y^2 ও $2xy$ রাশি তিনটি এরূপ যে একটি রাশির বর্গ অপর দুইটি রাশির বর্গের সমষ্টির সমান হইয়াছে।

অতএব **নিয়ম** হইল :—যে কোন দুইটি সংখ্যার বর্গের সমষ্টি, উহাদের বর্গের অন্তর এবং উহাদের গুণফলের দ্বিগুণ একটি সমকোণী ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের পরিমাণ হইবে।

আবার দেখ, উপরের অভেদে y-এর মান 1 করিয়া পাওয়া যায় $(x^2+1)^2=(x^2-1)^2+(2x)^2$, সুতরাং x^2+1, x^2-1 ও $2x$ কোন ত্রিভুজের বাহুগুলির মান হইলে উহা একটি সমকোণী ত্রিভুজ হইবে।

অতএব, **নিয়ম** হইল :—যে কোন সংখ্যার (i) বর্গ$+1$, (ii) বর্গ-1 এবং (iii) ঐ সংখ্যার দ্বিগুণ একটি সমকোণী ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের পরিমাণ হইবে।]

বিবিধ উদাহরণ 6

উদা. 1. 35 ফুট ও 50 ফুট উচ্চ দুইটি স্তম্ভের মধ্যে দূরত্ব 20 ফুট, উহাদের শীর্ষ দুইটির দূরত্ব নির্ণয় কর।

মনে কর, AP ও BQ স্তম্ভদ্বয় যথাক্রমে $35'$ ও $50'$ উচ্চ এবং উহাদের দূরত্ব $AB=20'$. PQএর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করিতে হইবে। $PR \perp BQ$ টান।

$\because$ $ABRP$ একটি আয়তক্ষেত্র, $\therefore$ $PR=AB=20'$.

আবার, $QR=BQ-BR=BQ-AP=50'-35'=15'$.

চিত্র নং 106

এখন, $\because$ $\angle PRQ$ সমকোণ,

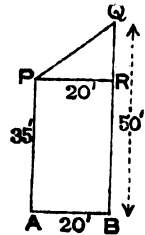
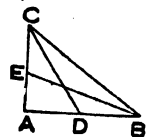
$\therefore$ $PQ^2=PR^2+QR^2=(20)^2$ ব. ফু. $+(15)^2$ ব. ফু. $=625$ বর্গফুট,

$\therefore$ $PQ=\sqrt{625}$ ফুট $=25$ ফুট।

উদা. 2. কোন সমকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণদ্বয় হইতে অঙ্কিত মধ্যমাদ্বয়ের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র দুইটির সমষ্টির চারিগুণ উহার অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের পাঁচ গুণ হইবে। [D. B. '40]

$\triangle ABC$র $\angle A$ সমকোণ। D ও E যথাক্রমে AB ও ACর মধ্যবিন্দু।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $4(BE^2+CD^2)=5BC^2$.

CD ও BE যোগ কর।

চিত্র নং 107

প্রমাণ : $\because$ $\angle A$ সমকোণ,

$\therefore$ $BE^2=AE^2+AB^2$ এবং $CD^2=AC^2+AD^2$.

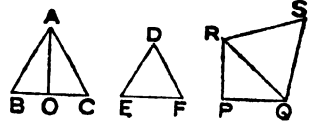
$\therefore$ $4(BE^2+CD^2)=4AE^2+4AB^2+4AC^2+4AD^2$

$=(2AE)^2+4(AB^2+AC^2)+(2AD)^2=AC^2+4BC^2+AB^2$

($\because$ $2AE=AC$, $2AD=AB$ এবং $BC^2=AB^2+AC^2$)

$=4BC^2+BC^2=5BC^2$.

উদা. 3. দুইটি সমবাহু ত্রিভুজের সমষ্টির সমান একটি সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কন কর।

ABC ও DEF দুইটি সমবাহু ত্রিভুজ। এমন একটি সমবাহু ত্রিভুজ আঁকিতে হইবে যাহার ক্ষেত্রফল$=\triangle ABC+\triangle DEF$ হইবে।

চিত্র নং 108

অঙ্কন : $PQ=BC$ লও এবং $PR\perp PQ$ টান, যেন $PR=EF$ হয়। RQ যোগ কর। RQএর উপর RQS সমবাহু ত্রিভুজ আঁক। ইহাই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল।

প্রমাণ : $AO\perp BC$ টানা হইল। এখন AO, $\triangle ABC$র উচ্চতা হইল এবং উহা BCকে সমদ্বিখণ্ডিত করিল। $AO^2=AB^2-BO^2=AB^2-(\frac{1}{2}AB)^2$ $=AB^2-\frac{1}{4}AB^2=\frac{3}{4}AB^2$, $\therefore$ $AO=\frac{\sqrt{3}}{2}AB$.

সুতরাং দেখা গেল সমবাহু ত্রিভুজের উচ্চতা$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times$ভূমি

$\therefore$ যে কোন সমবাহু ত্রিভুজের কালি$=\frac{1}{2}$ ভূমি$\times\frac{\sqrt{3}}{2}$ ভূমি$=\frac{\sqrt{3}}{4}$(ভূমি)^2.

এখন $\triangle RQS=\frac{\sqrt{3}}{4}\times$(ভূমি)$^2=\frac{\sqrt{3}}{4}RQ^2=\frac{\sqrt{3}}{4}(PQ^2+RP^2)$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}PQ^2+\frac{\sqrt{3}}{4}RP^2=\frac{\sqrt{3}}{4}BC^2+\frac{\sqrt{3}}{4}EF^2=\triangle ABC+\triangle DEF.$

প্রশ্নমালা 13

1. একটি রাস্তার এক প্রান্ত হইতে একটি 15 মিটার দীর্ঘ মই অপর প্রান্তে অবস্থিত একটি প্রাচীর গাত্রে 12 মিটার উর্ধ্বে লাগান আছে। রাস্তাটির পরিসর কত ?

2. একই স্থান হইতে এক ব্যক্তি ঠিক উত্তর দিকে 8 কিলো মিটার এবং অপর এক ব্যক্তি ঠিক পূর্বদিকে 6 কিলো মিটার গেল। তখন উহাদের মধ্যে ব্যবধান কত ?

3. 50 মিটার দীর্ঘ একটি মই রাস্তার উপর হইতে একপ্রান্তে অবস্থিত একটি বাড়ীর 48 মিটার উর্ধ্বে একটি জানালায় লাগান আছে। উহাকে ঘুরাইয়া দেওয়ায় অপর প্রান্তীয় একটি প্রাচীরগাত্রে 40 মিটার উর্ধ্বে ঠেকিল। রাস্তাটির পরিসর কত ?

4. যে বর্গক্ষেত্রের বাহু 8 ডেসি মিটার, তাহার কর্ণের দৈর্ঘ্য কত ?

5. একটি রম্বসের কর্ণদ্বয়ের দৈর্ঘ্য 18 সে. মিটার ও 24 সে. মিটার, উহার বাহুর দৈর্ঘ্য কত ?

6. একটি সমবাহু ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য এক ফুট, উহার উচ্চতা ও ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

7. দুইটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের সমষ্টির সমান একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর।

8. তিনটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের সমষ্টির সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর।

9. দুইটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের অন্তরফলের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর।

10. যে চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় পরস্পর সমকোণে ছেদ করে, তাহার দুইটি বিপরীত বাহুর বর্গের সমষ্টি অপর দুইটি বিপরীত বাহুর বর্গের সমষ্টির সমান হয়। [G. U. '53]

11. ABC ত্রিভুজের $\angle A$ সমকোণ। AB ও AC-র উপর P ও Q যথাক্রমে দুইটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে, $PC^2 + QB^2 = BC^2 + PQ^2$. [A. U.]

12. সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হইতে বিপরীত বাহুর লম্বদূরত্বের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের চারি গুণ, উহার যে কোন বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের তিন গুণ হইবে। [C. U. '33]

13. ABC ত্রিভুজে P ও Q যথাক্রমে AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু এবং BQ ও PC পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর যে, BOC ত্রিভুজটি APOQ চতুর্ভুজের সমান। [D. U. '27]

14. আয়তক্ষেত্রের বাহুগুলির উপর বর্গগুলির সমষ্টি উহার কর্ণদ্বয়ের উপর বর্গ দুইটির সমষ্টির সমান।

15. কোন সমকোণী ত্রিভুজের একটি সূক্ষ্মকোণ অপরটির দ্বিগুণ। প্রমাণ কর যে, সমকোণসংলগ্ন বাহুদ্বয়ের মধ্যে বৃহত্তরটির উপর বর্গ ক্ষুদ্রতর বাহুর উপর বর্গের তিন গুণ।

16. কোন ত্রিভুজের দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 9 ও 12 ইঞ্চি এবং উহাদের অন্তর্ভূ‘ত কোণটি অপর কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান। উহার তৃতীয় বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। (উত্তর=15 ই.) [C. U. 1878]

17. ABC ত্রিভুজের অন্তঃস্থ O একটি বিন্দু এবং O হইতে OX, OY ও OZ যথাক্রমে BC, CA ও AB বাহুর উপর লম্ব। প্রমাণ কর যে $AZ^2+BX^2+CY^2=AY^2+CX^2+BZ^2$. [C. U.]

18. রম্বসের বাহুগুলির উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রগুলির সমষ্টি উহার কর্ণদ্বয়ের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টির সমান।

19. ABCD আয়তক্ষেত্রের অন্তঃস্থ P বিন্দুর সহিত A, B, C, D যোগ করিয়া প্রমাণ কর যে, $PA^2+PC^2=PB^2+PD^2$. [C. U. '21]

20. ABC ত্রিভুজের A কোণটি সমকোণ এবং BCর উপর AO লম্ব। প্রমাণ কর যে, $AO^2=BO.CO$.

21. ত্রিভুজের দুইটি বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের অন্তরফল তৃতীয় বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের সমান হইলে, ত্রিভুজটি সমকোণী হইবে।

22. $\triangle$ABCর A হইতে BC-র উপর AD লম্ব ; যদি $AD^2=BD.CD$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে ত্রিভুজটি সমকোণী। [W. B. S. F. '56]

23. কোন ত্রিভুজের বাহুগুলির দৈর্ঘ্যের অনুপাত $\sqrt{3}:2:1$ হইলে ত্রিভুজটি সমকোণী হইবে।

24. কোন ত্রিভুজের দুইটি বাহু যথাক্রমে 15 ও 6 ইঞ্চি এবং উহাদের অন্তর্ভূ‘ত কোণটি 60° ; উহার তৃতীয় বাহুর দৈর্ঘ্য আসন্ন ইঞ্চিতে নির্ণয় কর। [C. U. '20]

20. *ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য হইতে ক্ষেত্রফল নির্ণয়*

ABC একটি ত্রিভুজ।

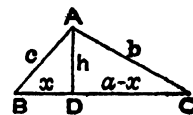
ইহার BC, CA ও AB বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a, b ও c একক।

BCর উপর AD লম্ব টানা হইয়াছে।

সুতরাং AD হইল ত্রিভুজটির উচ্চতা ;

ADর দৈর্ঘ্য h একক ধরা হইল।

মনে কর, $BD=x$ একক,

সুতরাং $CD=a-x$ একক।

চিত্র নং 109

$\because$ $\angle ADB$ একটি সমকোণ,

$\therefore$ $AD^2=AB^2-BD^2$, $\therefore$ $h^2=c^2-x^2 \cdots(1)$

আবার $\triangle$ADC হইতে $h^2=b^2-(a-x)^2 \cdots\cdots(2)$

$\therefore \quad c^2-x^2=b^2-(a-x)^2=b^2-a^2-x^2+2ax,$

$\therefore \quad 2ax=a^2-b^2+c^2, \quad \therefore \quad x=\frac{a^2-b^2+c^2}{2a}.$

এক্ষণে, (1) হইতে পাই $h^2=c^2-x^2=c^2-\left(\frac{a^2-b^2+c^2}{2a}\right)^2$

$=c^2-\frac{(a^2-b^2+c^2)^2}{4a^2}=\frac{4a^2c^2-(a^2-b^2+c^2)^2}{4a^2}$

$=\frac{\{(a+c)^2-b^2\}\{b^2-(a-c)^2\}}{4a^2}$

$=\frac{(a+b+c)(a-b+c)(b+a-c)(b+c-a)}{4a^2}.$

এক্ষণে যদি ত্রিভুজের পরিসীমা $2s$ দ্বারা সূচিত করা হয়,

তবে $2s=a+b+c$, সুতরাং $a-b+c=2s-2b=2(s-b)$,

$b+a-c=2(s-c)$ এবং $b+c-a=2(s-a)$.

$\therefore \quad h^2=\frac{2s.2(s-b).2(s-c).2(s-a)}{4a^2}=\frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{a^2}$

$\therefore \quad h=\frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{a}$

$\therefore$ **ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল** $=\frac{1}{2}$ভূমি $\times$ উচ্চতা $=\frac{1}{2}$BC $\times h=\frac{1}{2}\times ah$

$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$

সম্পাদ্য 28

কোন নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের দুই গুণ, তিন গুণ, চারি গুণ ইত্যাদি ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইবে।

[*To construct a square twice, thrice, four times, etc, a given square.*]

মনে কর, প্রদত্ত বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য l একক। ইহার দুইগুণ, তিনগুণ ইত্যাদি পরিমাণ বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইবে।

চিত্র নং 110

অঙ্কন: OX একটি সরলরেখা লইয়া OY⊥OX টান। OX ও OY হইতে lএর সমান যথাক্রমে OQ ও OP অংশ ছেদ কর। PQ যোগ কর।

PQএর সমান করিয়া OX হইতে OR অংশ ছেদ করিয়া PR যোগ কর।

PR-এর সমান করিয়া OX হইতে OS অংশ ছেদ করিয়া PS যোগ কর।

এক্ষণে, PQ, PR ও PS-এর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র প্রদত্ত বর্গক্ষেত্রের (অর্থাৎ l^2এর) যথাক্রমে দুই গুণ, তিন গুণ ও চারি গুণ হইবে।

প্রমাণ : $\because$ $\angle O$ সমকোণ, $\therefore$ $PQ^2 = OP^2 + OQ^2 = l^2 + l^2 = 2l^2$.

$PR^2 = OP^2 + OR^2 = OP^2 + PQ^2$ [$\because$ $OR = PQ$ (অঙ্কন)]

$= l^2 + 2l^2 = 3l^2$.

$PS^2 = OP^2 + OS^2 = OP^2 + PR^2$ [$\because$ $OS = PR$ (অঙ্কন)]

$= l^2 + 3l^2 = 4l^2$.

এই প্রণালীতে প্রদত্ত বর্গক্ষেত্রটির যে-কোন গুণ ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত করা যায়।

প্রশ্নমালা 14

1. একটি বর্গক্ষেত্রের পাঁচ গুণ একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর।

2. 2 সেণ্টিমিটার দীর্ঘ সরলরেখার উপর একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত করিয়া তাহার সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত কর।

3. $\sqrt{2}$ সেণ্টিমিটার পরিমাণ একটি সরলরেখা অঙ্কিত কর।

4. একটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের অর্ধেক একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর।

5. একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে এরূপ দুই অংশে বিভক্ত কর যেন ঐ অংশদ্বয়ের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র দুইটির সমষ্টি একটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের সমান হয়।

AB প্রদত্ত সরলরেখা এবং a প্রদত্ত বর্গক্ষেত্রের বাহু। ABকে এমন দুই খণ্ডে বিভক্ত করিতে হইবে যেন তাহাদের বর্গের সমষ্টি $= a^2$ হয়।

চিত্র নং 111

অঙ্কন : B বিন্দুতে $\angle ABO = 45^\circ$ আঁক। Aকে কেন্দ্র করিয়া a ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ আঁক, উহা যেন BOকে O বিন্দুতে ছেদ করিল।

$OD \perp AB$ টান। AB রেখা এখন D বিন্দুতে উদ্দিষ্টরূপে বিভক্ত হইল।

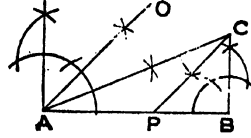
প্রমাণ : $\angle D=1$ সমকোণ, এবং $\angle DBO=45^\circ$,

$\therefore \quad \angle BOD=45^\circ=\angle DBO, \ \therefore \ DO=DB.$

$\because \quad \angle ADO=1$ সমকোণ, $\therefore \ AO^2=AD^2+DO^2=AD^2+BD^2.$

$\therefore \quad AD^2+BD^2=a^2 \quad [\because \ AO=a]$

6. একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে এরূপ দুই অংশে বিভক্ত কর যেন এক অংশের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র অপর অংশের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের দ্বিগুণ হয়।

AB একটি প্রদত্ত সরলরেখা। উহাকে P বিন্দুতে এরূপে বিভক্ত করিতে হইবে যেন $AP^2=2BP^2$ হয়। ABর A বিন্দুতে একটি সমকোণ আঁকিয়া উহাকে AO দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত কর। $\angle OAB$কে AC দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত কর।

এখন $\angle CAB=22\frac{1}{2}$ ডিগ্রী হইল।

চিত্র নং 112

B বিন্দুতে ABর উপর BC লম্ব টান। BC যেন ACকে C বিন্দুতে ছেদ করিল। C বিন্দুতে $\angle ACP=\angle CAP$ আঁক, CP যেন ABকে P বিন্দুতে ছেদ করিল।

এখন P বিন্দুতে AB উদ্দিষ্টরূপে বিভক্ত হইল।

প্রমাণ : ΔAPCর বহিঃস্থ $\angle CPB=\angle CAP+\angle ACP=45^\circ$,

$\therefore \quad \angle PCB=45^\circ=\angle CPB, \quad \therefore \quad PB=BC.$

আবার, $\angle B$ সমকোণ বলিয়া, $PC^2=PB^2+BC^2=2PB^2$

$\therefore \quad AP^2=2PB^2 \ (\because \ \angle CAP=\angle ACP, \ \therefore \ AP=CP).$

7. কোন নির্দিষ্ট সরলরেখাকে এরূপ দুই অংশে বিভক্ত কর যেন এক অংশের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র অপরাংশের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের তিনগুণ হয়।

AB সরলরেখাকে P বিন্দুতে এরূপে বিভক্ত করিতে হইবে যেন $AP^2=3BP^2$ হয়। B বিন্দুতে $\angle ABC=45^\circ$ আঁক এবং A বিন্দুতে $\angle BAC=30^\circ$ আঁক। BC ও AC পরস্পর C বিন্দুতে ছেদ করিল। C হইতে ABর উপর CP লম্ব টান। এখন AB রেখা P বিন্দুতে উদ্দিষ্টরূপে বিভক্ত হইল।

প্রমাণ : $\because \angle P=1$ সমকোণ, এবং $\angle B=45^\circ$,

$\therefore \quad \angle PCB=45^\circ=\angle B, \quad \therefore \quad CP=PB.$

আবার, $\angle A=30^\circ, \quad \therefore \quad \angle ACP=60^\circ, \quad \therefore \quad AC=2PC.$

এখন $AP^2=AC^2-PC^2=(2PC)^2-PC^2=4PC^2-PC^2$

$=3PC^2=3BP^2,$

8. একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে এরূপ দুই অংশে বিভক্ত কর যেন ঐ অংশদ্বয়ের উপর অঙ্কিত বর্গদ্বয়ের অন্তরফল একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর অঙ্কিত বর্গের সমান হয়। [C. U. 1885]

মনে কর, AB প্রদত্ত সরলরেখা এবং l প্রদত্ত বর্গক্ষেত্রের বাহু। ABকে এমন দুই ভাগে বিভক্ত করিতে হইবে, যেন তাহাদের বর্গের অন্তর$=l^2$ হয়।

$AC \perp AB$ টান এবং $AC=l$ কর। BC যোগ কর। C বিন্দুতে $\angle B$র সমান করিয়া BCD কোণ আঁক, CD যেন ABকে D বিন্দুতে ছেদ করিল। এখন AB, D বিন্দুতে উদ্দিষ্টরূপে বিভক্ত হইল।

প্রমাণ: $\because \quad \angle B=\angle BCD, \quad \therefore \quad BD=CD.$

এক্ষণে, $CD^2=AD^2+AC^2$ ($\because$ $\angle A$ সমকোণ)

$\therefore \quad AC^2=CD^2-AD^2=BD^2-AD^2$

$\therefore \quad l^2=BD^2-AD^2 \; (\because \; l=AC).$

9. কোন বর্গক্ষেত্রের কর্ণ ও একটি বাহুর সমষ্টি দেওয়া আছে ; বর্গক্ষেত্রটি অঙ্কিত কর।

10. 6, 8 ও 10 সেন্টিমিটার বাহুবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [উঃ$=$24 বর্গ সে. মি.]

অষ্টম অধ্যায়

21. সঞ্চারপথ (Locus)

একটি বিন্দু যদি কোন নির্দিষ্ট সর্ত অনুসারে চলিতে থাকে, তবে সে যে পথে (অর্থাৎ রেখায়) চলে তাহাকে ঐ বিন্দুর **সঞ্চারপথ** বলে।

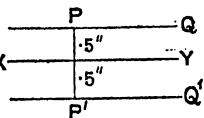
কোন বিন্দুর সঞ্চারপথ অবশ্যই একটি রেখা হইবে। উহা সরলরেখা বা বক্ররেখা হইতে পারে।

দৃষ্টান্ত: (1) যদি একটি বিন্দু দিক পরিবর্তন না করিয়া একই নির্দিষ্ট দিকে চলিতে থাকে, তবে উহার সঞ্চারপথ একটি সরলরেখা হইবে।

(2) একটি বিন্দু যদি অপর একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে সতত সমদূরবর্তী থাকিয়া বিচরণ করে, তবে তাহার সঞ্চারপথ একটি বৃত্তের পরিধি হইবে।

ঐ প্রদত্ত নির্দিষ্ট বিন্দু হইবে ঐ বৃত্তের কেন্দ্র এবং উভয় বিন্দুর দূরত্ব হইবে বৃত্তটির ব্যাসার্ধ। অতএব, এ ক্ষেত্রে সঞ্চারপথ একটি বক্ররেখা।

(৪) একটি বিন্দু যদি কোন নির্দিষ্ট সরলরেখা হইতে সতত সমদূরবর্তী থাকিয়া বিচরণ করে, তবে তাহার সঞ্চারপথ হইবে প্রদত্ত সরলরেখার সমান্তরাল একটি সরলরেখা।

মনে কর, XY সরলরেখা হইতে সতত 0·5" দূরে থাকিয়া P বিন্দু চলিতেছে। উহার গতিপথ বা সঞ্চারপথ হইবে XY হইতে ·5 ইঞ্চি দূরে XY-এর সমান্তরাল একটি সরলরেখা। যেহেতু XY-এর উভয় পার্শ্বেই উহার ·5" দূরে একটি করিয়া সমান্তরাল সরলরেখা টানা সম্ভব, অতএব এ ক্ষেত্রে বিন্দুটির সঞ্চারপথ হইবে দুইটি সরলরেখা। চিত্রে PQ ও P′Q′ সরলরেখাদ্বয় XY হইতে ·5" দূরে XY-এর সমান্তরাল করিয়া টানা হইয়াছে। অতএব PQ ও P′Q′ এখানে P বিন্দুর সঞ্চারপথ।

চিত্র নং 113

[**দ্রষ্টব্য ঃ** কোন বিন্দুর সঞ্চারপথ ঠিকভাবে নির্ণীত হইয়াছে কিনা তাহা পরীক্ষা করিতে হইলে দুইটি বিষয় দেখিতে হইবে। যথা—(1) প্রদত্ত সর্তের অধীন যে কোন বিন্দু ঐ সঞ্চারপথের উপর থাকিবে এবং (2) সঞ্চারপথের উপর অবস্থিত যে কোন বিন্দু ঐ সর্তের অধীন হইবে।]

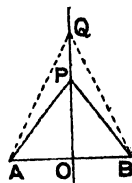
উপপাদ্য 32

দুইটি স্থির বিন্দু হইতে সমদূরবর্তী বিন্দুগুলির সঞ্চারপথ ঐ বিন্দুদ্বয় সংযোজক সরলরেখার লম্বসমদ্বিখণ্ডক হইবে।

[*The locus of points which are equidistant from two fixed points is the perpendicular bisector of the straight line joining the two fixed points.*]

মনে কর, A ও B দুইটি স্থির বিন্দু। প্রমাণ করিতে হইবে যে, AB সরলরেখার লম্বসমদ্বিখণ্ডক A ও B বিন্দু হইতে সমদূরবর্তী বিন্দুগুলির সঞ্চারপথ।

অর্থাৎ প্রমাণ করিতে হইবে যে,

(1) A ও B হইতে সমদূরবর্তী যে কোন বিন্দু ঐ লম্বসমদ্বিখণ্ডকের উপর থাকিবে; এবং (2) ঐ লম্বসমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত যে কোন বিন্দু, A ও B হইতে সমদূরবর্তী হইবে।

চিত্র নং 114

অঙ্কন ঃ AB যোগ কর এবং AB-র মধ্যবিন্দু O লও।

প্রমাণ : (1) মনে কর, P এমন একটি বিন্দু যে, A ও B হইতে উহার দূরত্ব সমান অর্থাৎ PA=PB. PO, AP ও BP যোগ কর।

এখন △AOP ও △BOPর PA=PB, AO=BO, এবং PO সাধারণ বাহু,
∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। ∴ ∠AOP=∠BOP, এবং ইহারা সন্নিহিত কোণ,
∴ PO, ABর উপর লম্ব। ∴ PO, ABর লম্বসমদ্বিখণ্ডক।
অতএব, P বিন্দু ABর লম্বসমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত।

(2) আবার মনে কর, ABর লম্বসমদ্বিখণ্ডক POর উপর অবস্থিত Q যে কোন একটি বিন্দু। AQ ও BQ যোগ কর।

এখন △AOQ ও △BOQএর AO=BO, OQ সাধারণ বাহু,
এবং অন্তর্ভূর্ত ∠AOQ=অন্তর্ভূর্ত ∠BOQ [∵ প্রত্যেকে সমকোণ]
∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। ∴ AQ=BQ.
∴ POর উপর অবস্থিত যে কোন বিন্দু A ও B বিন্দু হইতে সমদূরবর্তী।
অতএব, প্রমাণিত হইল যে A ও B বিন্দু হইতে সমদূরবর্তী বিন্দুগুলির সঞ্চারপথ AB সরলরেখার লম্বসমদ্বিখণ্ডক।

[**দ্রষ্টব্য :** (i) এখানে উভয়দিকে বর্ধিত অসীম PO সরলরেখাটি সঞ্চারপথ। (ii) PO-র বহির্ভূত যে কোন R বিন্দু লইয়া প্রমাণ করা যায় যে উহা A ও B হইতে সমদূরবর্তী নহে।

(ii) "দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে সমদূরবর্তী বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর"—এই সম্পাদ্যটি উপরের প্রণালীতে প্রতিষ্ঠিত করা যায়।]

উপপাদ্য 33

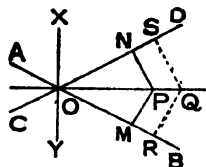
দুইটি নির্দিষ্ট পরস্পরছেদী সরলরেখা হইতে সমদূরবর্তী বিন্দুগুলির সঞ্চারপথ ঐ সরলরেখা দুইটির অন্তর্ভূর্ত কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় হইবে।

[*The locus of points which are equidistant from two intersecting straight lines consists of the pair of straight lines which bisect the two angles between the two given lines.*]

AB ও CD দুইটি নির্দিষ্ট সরলরেখা পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, AB ও CD-র অন্তর্ভূর্ত কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় AB ও CD হইতে সমদূরবর্তী বিন্দুগুলির সঞ্চারপথ হইবে, অর্থাৎ প্রমাণ করিতে হইবে যে (1) AB ও CD হইতে সমদূরবর্তী যে কোন বিন্দু ঐ রেখা দুইটির অন্তর্ভূর্ত কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডক দুইটির যে কোনটির উপর অবস্থিত হইবে

এবং (2) ঐ সমদ্বিখণ্ডক রেখাদ্বয়ের যে কোনটির উপর অবস্থিত যে কোন বিন্দু AB ও CD হইতে সমদূরবর্তী হইবে।

প্রমাণ : (1) মনে কর, BOD কোণের মধ্যে অবস্থিত P এমন একটি বিন্দু যে AB ও CD হইতে উহার দূরত্ব সমান, অর্থাৎ P হইতে AB ও CD-র উপর অঙ্কিত PM ও PN লম্ব দুইটি সমান। OP যোগ কর।

চিত্র নং 115

এখন POM ও PON এই সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের PM = PN (স্বীকার) এবং অতিভুজ OP সাধারণ, ∴ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম।

∴ ∠POM = ∠PON ; ∴ OP সরলরেখা ∠BOD-র সমদ্বিখণ্ডক। অতএব, P বিন্দু ∠BOD-র সমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত।

(2) মনে কর, OP-র উপর Q যে-কোন বিন্দু এবং Q হইতে AB ও CD-র উপর যথাক্রমে QR ও QS দুইটি লম্ব।

এখন △QOR ও △QOS-এর ∠QOR = ∠QOS,

∠QRO = ∠QSO [∵ ইহারা সমকোণ] এবং OQ সাধারণ বাহু।

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম, ∴ QR = QS.

∴ Q বিন্দু AB ও CD হইতে সমদূরবর্তী।

∴ OP-র উপর অবস্থিত যে কোন বিন্দু AB ও CD হইতে সমদূরবর্তী।

অতএব, প্রমাণিত হইল যে ∠BOD-র সমদ্বিখণ্ডক রেখা AB ও CD হইতে সমদূরবর্তী বিন্দুগুলির সঞ্চারপথ।

যদি P বিন্দুটি AOD কোণের মধ্যে থাকে, তবে অনুরূপে প্রমাণ করা যায় যে, ∠AOD-র সমদ্বিখণ্ডক XO সরলরেখা P বিন্দুর সঞ্চারপথ হইবে।

অতএব, দুইটি পরস্পরছেদী সরলরেখা হইতে সমদূরবর্তী বিন্দুর সঞ্চারপথ হইল ঐ সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণ দুইটির সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়।

[**দ্রষ্টব্য :** (i) যদি P বিন্দুটি AOC কোণের মধ্যে থাকে, তবে ঐ PO সমদ্বিখণ্ডকই P বিন্দুর সঞ্চারপথ হইবে। কারণ, বর্ধিত PO সরলরেখা AOC কোণেরও সমদ্বিখণ্ডক।

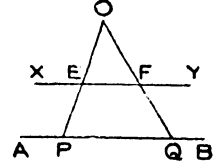
অনুরূপে P বিন্দু AOD বা BOC কোণের মধ্যে থাকিলে XY সরলরেখা হইবে P বিন্দুর সঞ্চারপথ।

(ii) "পরস্পরছেদী দুইটি সরলরেখা হইতে সমদূরবর্তী বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর"—এই সম্পাদ্যটি উপরের প্রণালীতে প্রতিষ্ঠিত করা যায়।]

বিবিধ উদাহরণ 7

উদা. 1. একটি নির্দিষ্ট বহিঃস্থ বিন্দু হইতে কোন নির্দিষ্ট সরলরেখা পর্যন্ত অঙ্কিত সরলরেখাগুলির মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

AB একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা এবং O উহার বহিঃস্থ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। O হইতে ABর উপর যে কোন একটি সরলরেখা OP টান এবং উহাকে E বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর। E বিন্দু দিয়া XY ∥ AB টান। XY সরলরেখা নির্ণেয় সঞ্চারপথ হইল।

চিত্র নং 116

প্রমাণ: O হইতে AB পর্যন্ত অন্য যে কোন সরলরেখা OQ টান, উহা যেন XYকে F বিন্দুতে ছেদ করিল।

∵ △OPQএর OP বাহুর মধ্যবিন্দু E এবং EF ∥ PQ,

∴ F, OQএর মধ্যবিন্দু। অতএব, OQএর মধ্যবিন্দু XY সরলরেখার উপর অবস্থিত। ∴ XY সরলরেখা হইল নির্ণেয় সঞ্চারপথ।

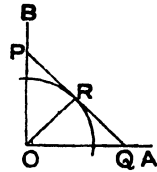
উদা. 2. OA ও OB সরলরেখা দুইটি পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত। একটি নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের সরলরেখার প্রান্তদ্বয় সতত ঐ সরলরেখাদ্বয়ের উপর অবস্থিত। উহার মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

OA⊥OB. মনে কর, একটি নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের সরলরেখা PQ এবং উহার সর্ব অবস্থানে P ও Q প্রান্তদ্বয় যথাক্রমে OB ও AO-র উপর অবস্থিত।

PQএর মধ্যবিন্দু R.

R বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় করিতে হইবে।

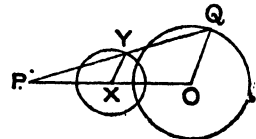
চিত্র নং 117

OR যোগ কর। ∵ POQ সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের মধ্যবিন্দু R, ∴ $OR=\frac{1}{2}PQ=$ ধ্রুবক (∵ PQ সর্বদা ধ্রুবক)।

ইহা PQএর যে কোন অবস্থানে সত্য।

∴ Oকে কেন্দ্র করিয়া $\frac{1}{2}PQ$ ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্তের পরিধির যে অংশ OA ও OB দ্বারা ছিন্ন তাহাই নির্ণেয় সঞ্চারপথ।

উদা. 3. একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে একটি নির্দিষ্ট বৃত্তের পরিধি পর্যন্ত অঙ্কিত যাবতীয় সরলরেখার মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র O এবং P বৃত্তের বহিঃস্থ যে কোন একটি বিন্দু। P হইতে বৃত্তটির পরিধি পর্যন্ত PQ যে কোন একটি সরলরেখা। PO ও PQকে যথাক্রমে X ও Y বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর। XY ও QO যোগ কর।

চিত্র নং 118

∵ P ও O স্থির বিন্দু, ∴ POর মধ্যবিন্দু X একটি স্থিরবিন্দু।

এখন, ∵ POQ ত্রিভুজের PO ও PQএর মধ্যবিন্দু X ও Y,

∴ $XY = \frac{1}{2}OQ$ = বৃত্তটির ব্যাসার্ধের অর্ধেক = ধ্রুবক।

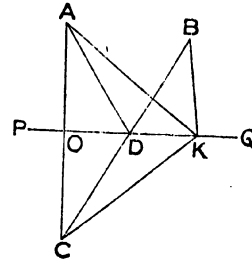
P হইতে পরিধি পর্যন্ত অঙ্কিত যে কোন সরলরেখার পক্ষে ইহা সত্য।

অতএব, PO-র মধ্যবিন্দু X-কে কেন্দ্র করিয়া প্রদত্ত বৃত্তের ব্যাসার্ধের অর্ধেকের সমান ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্তই নির্ণেয় সঞ্চারপথ।

উদা. 4. একটি অসীম সরলরেখার একই পার্শ্বে অবস্থিত A ও B দুইটি বিন্দু। ঐ রেখার উপর এমন একটি D বিন্দু নির্ণয় কর যেন A ও B হইতে D বিন্দুর দূরত্ব লঘিষ্ঠ হয়। [C. U.]

PQ এই অসীম সরলরেখার একই পার্শ্বে A ও B দুইটি বিন্দু; PQএর উপর এমন একটি বিন্দু নির্ণয় করিতে হইবে যেন A ও B হইতে তাহার দূরত্ব লঘিষ্ঠ হয়।

অঙ্কন : A হইতে PQএর উপর AO লম্ব টান। AOকে C পর্যন্ত বর্ধিত কর যেন CO=AO হয়। CB যোগ কর। CB যেন PQকে D বিন্দুতে ছেদ করিল। D নির্ণেয় বিন্দু।

চিত্র নং 119

প্রমাণ : PQএর উপর যে কোন K বিন্দু লও। AD, BK, AK, CK যোগ কর। PQ, AC-র লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক এবং D ও K বিন্দু PQএর উপর অবস্থিত,

∴ AD=CD এবং AK=CK. এখন AD+BD=CD+BD=BC.

আবার, AK+BK=CK+BK, কিন্তু △BKC-র BK+CK>BC.

∴ AD+BD<BK+CK, ∴ AD+BD<BK+AK.

ইহা K বিন্দুর যে কোন অবস্থানেই সত্য। ∴ D নির্ণেয় বিন্দু।

প্রশ্নমালা 15

1. দুইটি সমান্তরাল সরলরেখা হইতে সমদূরবর্তী বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।
2. একটি নির্দিষ্ট বৃত্তের পরিধি হইতে সমদূরবর্তী বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।
3. এক সরলরেখায় অবস্থিত নহে এরূপ তিনটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে সমদূরবর্তী বিন্দুটি নির্ণয় কর।

4. ত্রিভুজের বাহুগুলি হইতে সমদূরবর্তী একটি বিন্দু নির্ণয় কর। ঐরূপ কয়টি বিন্দু হইতে পারে ?

5. একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর এরূপ একটি বিন্দু নির্ণয় কর যেন তাহা দুইটি বহিঃস্থ নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে সমদূরবর্তী হয়।

6. দুইটি নির্দিষ্ট সরলরেখা হইতে 2 সেন্টিমিটার দূরে অবস্থিত একটি বিন্দু নির্ণয় কর।

7. দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া অঙ্কিত বৃত্তসমূহের কেন্দ্রগুলির সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

8. একটি রম্বসের বাহুগুলি হইতে সমদূরবর্তী একটি বিন্দু নির্ণয় কর।

9. একটি নির্দিষ্ট ভূমির উপর অঙ্কিত যাবতীয় সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষ বিন্দুগুলির সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। [W. B. S. F. '52]

10. একটি নির্দিষ্ট ভূমিকে অতিভুজ করিয়া অঙ্কিত সমকোণী ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

11. A ও B দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে সমদূরবর্তী এবং অপর একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে 7 সেন্টিমিটার দূরে অবস্থিত বিন্দুটি নির্ণয় কর।

12. একই ভূমি ও উচ্চতাবিশিষ্ট যাবতীয় ত্রিভুজের শীর্ষগুলির সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

13. একটি ঘরের মধ্যে একটি মই সোজাভাবে দেওয়ালের গায়ে লাগান ছিল। উহার নিম্নপ্রান্ত ক্রমশঃ সরিয়া যাইতে লাগিল এবং অবশেষে মইটি মেঝের সহিত মিলিত হইল। মইটির মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

14. পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত দুইটি সরলরেখা হইতে সমদূরবর্তী একটি গতিশীল বিন্দুর দূরত্ব দুইটির সমষ্টি ধ্রুবক। ঐ বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

22. সমবিন্দু সরলরেখা সম্বন্ধীয় উপপাদ্য

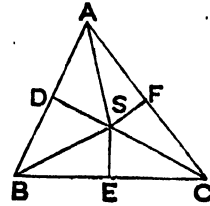
সমবিন্দু সরলরেখা। তিন বা ততোধিক সরলরেখা একই বিন্দুতে ছেদ করিলে (বা মিলিত হইলে) তাহাদিগকে **সমবিন্দু সরলরেখা** (Concurrent straight lines) বলে। ঐ ছেদবিন্দুটিকে তাহাদের **সম্পাত বিন্দু** (Point of concurrence) বলে।

সমরেখ বিন্দু। যে সকল বিন্দু একই সরলরেখায় অবস্থিত থাকে তাহাদিগকে **সমরেখ** বা **একরেখীয় বিন্দু** (Collinear) বলে।

উপপাদ্য 34

ত্রিভুজের বাহুগুলির লম্বসমদ্বিখণ্ডকত্রয় সমবিন্দু।

[*The perpendicular bisectors of the sides of a triangle are concurrent.*]

ABC একটি ত্রিভুজ। D, E ও F যথাক্রমে AB, BC ও CA বাহুর মধ্যবিন্দু। D ও E হইতে যথাক্রমে AB ও BC-র উপর অঙ্কিত DS ও ES লম্বদ্বয় যেন S বিন্দুতে মিলিত হইল।

চিত্র নং 120

SF যোগ কর। প্রমাণ করিতে হইবে যে SF, AC বাহুর উপর লম্ব।

SA, SB ও SC যোগ কর।

প্রমাণ : $\because$ S বিন্দু AB-র লম্বসমদ্বিখণ্ডক DS-এর উপর অবস্থিত,

$\therefore$ AS=BS (উপ. 32).

আবার, $\because$ S বিন্দু BC-র লম্বসমদ্বিখণ্ডক ES-এর উপর অবস্থিত,

$\therefore$ BS=CS (উপ. 32). $\therefore$ AS=BS=CS.

সুতরাং S বিন্দু A ও C হইতে সমদূরবর্তী।

$\therefore$ S বিন্দু AC-র লম্বসমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত হইবে। $\therefore$ $SF \perp AC$.

অতএব, ত্রিভুজের বাহুগুলির লম্বসমদ্বিখণ্ডকত্রয় সমবিন্দু।

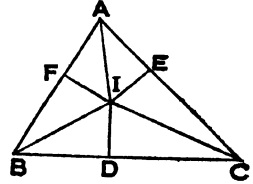
উপপাদ্য 35

ত্রিভুজের কোণগুলির সমদ্বিখণ্ডকত্রয় সমবিন্দু।

[*The bisectors of the angles of a triangle are concurrent.*]

ABC একটি ত্রিভুজ। মনে কর, ∠B ও ∠Cএর BI ও CI সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় I-বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। AI, যোগ করা হইল।

চিত্র নং 121

প্রমাণ করিতে হইবে যে AI, BAC কোণের সমদ্বিখণ্ডক।

I-বিন্দু হইতে BC, AC ও AB-র উপর যথাক্রমে ID, IE ও IF লম্ব টান।

প্রমাণ : ∵ I বিন্দু ABC কোণের সমদ্বিখণ্ডক BI-এর উপর অবস্থিত,

∴ ID = IF (উপ. 33)।

আবার, ∵ I বিন্দু ACB কোণের সমদ্বিখণ্ডক CI-এর উপর অবস্থিত,

∴ ID = IE.

∴ IE = ID = IF, অর্থাৎ I-বিন্দু AB ও AC হইতে সমদূরবর্তী।

∴ I বিন্দু BAC কোণের সমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত,

∴ IA, BAC কোণের সমদ্বিখণ্ডক।

অতএব, ত্রিভুজের কোণগুলির সমদ্বিখণ্ডকত্রয় সমবিন্দু।

অনুসিদ্ধান্ত : ত্রিভুজের যে কোন দুই কোণের বহিঃসমদ্বিখণ্ডক ও তৃতীয় কোণের অন্তঃসমদ্বিখণ্ডক সমবিন্দু।

উপপাদ্য 36

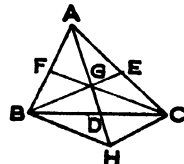
ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় সমবিন্দু।

[*The medians of a triangle are concurrent.*]

ABC একটি ত্রিভুজ। মনে কর, ইহার BE ও CF মধ্যমা দুইটি পরস্পর G বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

AG যোগ করিয়া বর্ধিত কর, উহা যেন BCকে D বিন্দুতে ছেদ করিল।

চিত্র নং 122

প্রমাণ করিতে হইবে যে, AD ত্রিভুজটির তৃতীয় মধ্যমা।

অঙ্কন : B হইতে BH ∥ FC টান, উহা যেন বর্ধিত ADকে H বিন্দুতে ছেদ করিল। CH যোগ কর।

প্রমাণ : ABH ত্রিভুজে AB-র মধ্যবিন্দু F এবং FG ‖ BH,

∴ G, AH-এর মধ্যবিন্দু।

আবার, ACH ত্রিভুজে AH-এর মধ্যবিন্দু G এবং AC-র মধ্যবিন্দু E,

∴ GE ‖ HC অর্থাৎ BE ‖ HC. ∴ BGCH একটি সামান্তরিক।

সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পর সমদ্বিখণ্ডিত হয়,

∴ BD = CD, সুতরাং ABC ত্রিভুজের AD একটি মধ্যমা।

অতএব, ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় সমবিন্দু।

অনুসিদ্ধান্ত : ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় পরস্পরকে একটি সমত্রিখণ্ডক বিন্দুতে ছেদ করে।

[The medians of a triangle intersect at a point of trisection of each.]

[উপপাদ্য 36-এর চিত্র দেখ] উপপাদ্য 36-এ প্রমাণ করা হইয়াছে যে,

$AG = GH$ এবং $GD = DH$, ∴ $AG = GH = 2GD$.

∴ $AD = AG + GD = 2GD + GD = 3GD$. ∴ $GD = \frac{1}{3}AD$.

অনুরূপে $GE = \frac{1}{3}BE$ এবং $GF = \frac{1}{3}CF$.

∴ ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় পরস্পরকে একটি সমত্রিখণ্ডক বিন্দুতে ছেদ করে।

[**দ্রষ্টব্য :** (i) মধ্যমাগুলির ছেদবিন্দুকে ত্রিভুজের **ভরকেন্দ্র** (centroid) বলে এবং ইহাকে G দ্বারা সূচিত করা হয়।

(ii) (উপপাদ্য 34) ত্রিভুজের বাহুগুলির লম্বসমদ্বিখণ্ডক তিনটির ছেদবিন্দুকে সাধারণতঃ S দ্বারা সূচিত করা হয় এবং উহাকে ত্রিভুজের **পরিকেন্দ্র** (circum-centre) বলে।

(iii) (উপপাদ্য 35) ত্রিভুজের কোণগুলির সমদ্বিখণ্ডক তিনটির ছেদবিন্দুকে I-দ্বারা সূচিত করা হয় এবং উহাকে ত্রিভুজের **অন্তঃকেন্দ্র** বা **অন্তর্বৃত্তের কেন্দ্র** (In-centre) বলে।]

বিবিধ উদাহরণ 8

উদা. 1. ত্রিভুজের যে-কোন মধ্যমাদ্বয় একত্রে তৃতীয় মধ্যমা অপেক্ষা বৃহত্তর।

মনে কর AD, BE, CF প্রদত্ত △ABC-র তিনটি মধ্যমা।

প্রমাণ করিতে হইবে, যে-কোন দুইটি মধ্যমা একত্রে তৃতীয় মধ্যমা অপেক্ষা বৃহত্তর।

ADকে H পর্যন্ত বর্ধিত কর যেন DH=DG হয়। HC যোগ কর।

প্রমাণ : ∵ GD=HD, BD=CD ও ∠BDG=∠CDH, ∴ $\triangle$BGD ও $\triangle$DHC সর্বসম।

∴ HC=BG. $\triangle$GCHএর GC+HC>GH,

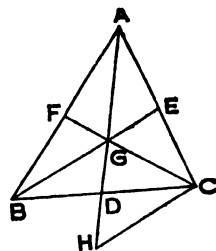
∴ GC+BG>GH. ∵ ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় G বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে, ∴ $GD=\frac{1}{2}AG$.

∴ AG=GH. ∴ BG+GC>AG.

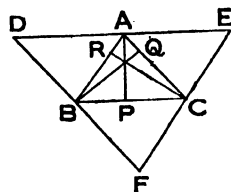
কিন্তু $AG=\frac{2}{3}AD$, $CG=\frac{2}{3}CF$, $BG=\frac{2}{3}BE$;

∴ $\frac{2}{3}(BE+CF)>\frac{2}{3}AD$, ∴ BE+CF>AD.

চিত্র নং 123

অনুরূপে প্রমাণ করা যায় যে, BE+AD>CF এবং CF+AD>BE.

***উদা**. 2. ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুত্রয় হইতে বিপরীত বাহুত্রয়ের উপর অঙ্কিত লম্ব তিনটি সমবিন্দু।

ABC ত্রিভুজের BC, AC ও AB বাহুর উপর যথাক্রমে AP, BQ ও CR লম্ব। প্রমাণ করিতে হইবে যে, AP, BQ ও CR সমবিন্দু।

অঙ্কন : A, B ও C বিন্দু দিয়া উহাদের বিপরীত বাহুগুলির সমান্তরাল করিয়া যথাক্রমে DE, DF ও EF সরলরেখাত্রয় টানা হইল। মনে কর, ইহারা DEF ত্রিভুজ উৎপন্ন করিল।

চিত্র নং 124

প্রমাণ : অঙ্কন অনুসারে ACBD ও ABCE এক একটি সামান্তরিক।

∴ AD=BC=AE, সুতরাং DE-র মধ্যবিন্দু A.

অনুরূপে B ও C যথাক্রমে DF ও EFএর মধ্যবিন্দু।

আবার, ∵ AP⊥BC এবং BC ∥ DE, ∴ AP⊥DE.

অনুরূপে BQ⊥DF এবং CR⊥EF.

অতএব, AP, BQ ও CR হইল $\triangle$DEFএর বাহুগুলির লম্বসমদ্বিখণ্ডক।

∴ AP, BQ ও CR সমবিন্দু (উপ. 34)।

[**দ্রষ্টব্য :** এই লম্বত্রয়ের ছেদবিন্দুকে ত্রিভুজের **লম্ববিন্দু** (Ortho-centre) বলে এবং উহাকে O দ্বারা সূচিত করা হয়।]

উদা. 3. ABC ত্রিভুজের BE ও CF দুইটি মধ্যমা এবং G উহার ভরকেন্দ্র। প্রমাণ কর যে, $\triangle BGC =$ চতুর্ভুজ AEGF.

[উপপাদ্য 36-এর চিত্র দেখ] $\because$ G বিন্দু ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্র,

$\therefore$ BE ও CF এর ছেদবিন্দু G. ত্রিভুজের তৃতীয় মধ্যমা AGD লও।

$\because$ $\triangle ABG$র একটি মধ্যমা GF, $\therefore$ $\triangle AGF = \triangle BGF$,

$\therefore$ $\triangle AGF = \frac{1}{2}\triangle ABG$.

আবার, $\because$ $\triangle ABG$ ও $\triangle BGD$এর একই উচ্চতা এবং $AG = 2GD$,

$\therefore$ $\triangle BGD = \frac{1}{2}\triangle ABG$. $\therefore$ $\triangle BGD = \triangle AFG$.

অনুরূপে, $\triangle CGD = \triangle AEG$. $\therefore$ $\triangle BGC = \triangle BGD + \triangle CGD$

$= \triangle AFG + \triangle AEG =$ চতুর্ভুজ AEGF.

প্রশ্নমালা 16

1. $\triangle ABC$-র বাহুগুলির লম্বসমদ্বিখণ্ডকত্রয় S বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর যে $\angle BSC = 2\angle BAC$.

2. $\triangle ABC$-র $\angle B$ ও $\angle C$এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় I-বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর যে IA, A-কোণের সমদ্বিখণ্ডক। [C. U.]

3. ত্রিভুজের যে-কোন দুইটি কোণের বহিঃসমদ্বিখণ্ডকদ্বয় ও তৃতীয় কোণের অন্তঃসমদ্বিখণ্ডক সমবিন্দু।

4. ABC ত্রিভুজের IB ও IC যথাক্রমে B ও C কোণের সমদ্বিখণ্ডক। প্রমাণ কর যে, $\angle BIC = 90^\circ + \frac{A}{2}$.

5. কোন ত্রিভুজের দুইটি মধ্যমা সমান হইলে উহা সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ হইবে।

6. ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় সমান হইলে ত্রিভুজটি সমবাহু হইবে।

7. ABC ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র G ; প্রমাণ কর যে,

$$\triangle BCG = \triangle ABG = \triangle ACG = \frac{1}{3}\triangle ABC.$$

8. ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের সমষ্টি উহার পরিসীমার তিন-চতুর্থাংশ অপেক্ষা বৃহত্তর। [B. C. S. '46]

9. প্রমাণ কর যে, সমবাহু ত্রিভুজের S, I, G এবং O পরস্পর সমাপতিত।

নবম অধ্যায়

23. ত্রিভুজ অঙ্কন

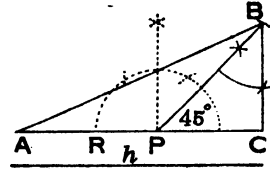
বিবিধ উদাহরণ 9

উদা. 1. সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও অপর বাহুদ্বয়ের সমষ্টি দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর। [C. U. '22]

মনে কর, h অতিভুজ এবং AP অন্য বাহুদ্বয়ের সমষ্টি। P বিন্দুতে $\angle APB=45^\circ$ আঁক। Aকে কেন্দ্র করিয়া h ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ আঁক, উহা যেন PBকে B বিন্দুতে ছেদ করিল। $BC \perp AP$ টান এবং AB যোগ কর। $\triangle ABC$ উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল।

প্রমাণ : $\because$ $\angle C=90^\circ$, এবং $\angle P=45^\circ$, $\therefore$ $\angle PBC=45^\circ=\angle BPC$, $\therefore$ $BC=PC$. $\therefore$ $AC+BC=AC+PC=AP$, এবং $AB=h$.

উদা. 2. সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও অপর বাহুদ্বয়ের অন্তরফল দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁকিতে হইবে।

মনে কর, h অতিভুজ ও AP অবশিষ্ট বাহুদ্বয়ের অন্তর। APকে বর্ধিত করিয়া P বিন্দুতে $\angle CPB=45^\circ$ আঁক। Aকে কেন্দ্র করিয়া h ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ আঁক, উহা যেন PBকে B বিন্দুতে ছেদ করিল। $BC \perp AP$ টান। এখন $\triangle ABC$ উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল।

চিত্র নং 125

প্রমাণ : $\because$ $\angle C=90^\circ$ এবং $\angle CPB=45^\circ$, $\therefore$ $\angle PBC=45^\circ=\angle CPB$. $\therefore$ $BC=PC$, $\therefore$ $AC-BC=AC-PC=AP$, এবং অতিভুজ $AB=h$.

উদা. 3. একটি সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের অতিভুজ ও একটি বাহুর সমষ্টি দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

মনে কর, অতিভুজ ও একটি বাহুর সমষ্টি AX. A বিন্দুতে $\angle XAB=45^\circ$ এবং X বিন্দুতে $\angle AXB=22\frac{1}{2}^\circ$ আঁক। AB ও XB পরস্পর B বিন্দুতে ছেদ করিল। B বিন্দুতে $\angle XBC=\angle AXB=22\frac{1}{2}^\circ$ আঁক। BC যেন AXকে C বিন্দুতে ছেদ করিল। ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল।

প্রমাণ : $\angle BCA=\angle X+\angle XBC=45^\circ$ এবং $\angle A=45^\circ$,

$\therefore$ $\angle ABC=90^\circ$, এবং $AB=BC$.

$\because$ $\angle X=\angle XBC$, $\therefore$ $XC=BC$, $\therefore$ $AC+BC=AX$.

উদা. 4. একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ এবং সমকৌণিক বিন্দু হইতে অতিভুজের উপর লম্বটির দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকিতে হইবে।

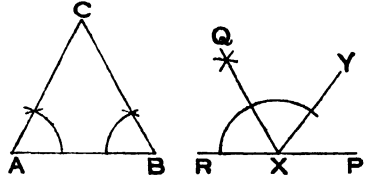
[**Hints :** AB প্রদত্ত অতিভুজ এবং h, সমকোণ হইতে ABর উপর লম্ব। ABকে ব্যাস করিয়া অর্ধবৃত্ত আঁক। A বিন্দুতে AX⊥AB টান এবং AX$=h$ কর। X হইতে ABর সমান্তরাল XC টান, উহা যেন অর্ধবৃত্তকে C ও D বিন্দুতে ছেদ করিল। এখন ACB ও ADB উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইবে।

প্রমাণ : CM⊥AB টান। ∵ AMCX একটি আয়তক্ষেত্র,

∴ CM=AX=h এবং ∠ACB অর্ধবৃত্তস্থ বলিয়া সমকোণ।···]

উদা. 5. নির্দিষ্ট ভূমি ও শীর্ষকোণবিশিষ্ট একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত কর।

AB প্রদত্ত ভূমি ও ∠PXY প্রদত্ত শিরঃকোণ।

অঙ্কন : PXকে R পর্যন্ত বর্ধিত করিয়া QX দ্বারা ∠YXRকে সমদ্বিখণ্ডিত কর। A ও B বিন্দুতে ∠RXQএর সমান ∠BAC ও ∠ABC আঁক। AC ও BC যেন C বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিল। ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল।

চিত্র নং 126

প্রমাণ : ∵ ∠A=∠B,

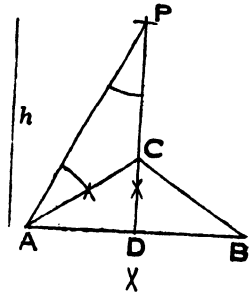
∴ AC=BC, ∴ △ABC সমদ্বিবাহু।

∠A+∠B+∠C=180°, এবং ∠YXR+∠YXP=180°,

কিন্তু ∠A+∠B=∠YXR, ∴ ∠C=∠PXY.

উদা. 6. সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি এবং সমান বাহুদ্বয়ের মধ্যে একটি বাহুর ও শীর্ষবিন্দু হইতে ভূমির উপর লম্বের সমষ্টি দেওয়া আছে; ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর। [C. U. '42]

মনে কর, AB ভূমি, এবং একটি সমান বাহু ও শীর্ষবিন্দু হইতে ভূমির উপর লম্বের সমষ্টি$=h$.

অঙ্কন : ABর লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক DP টান এবং DP$=h$ কর। AP যোগ কর এবং A বিন্দুতে ∠PAC =∠P আঁক, AC যেন PDকে C বিন্দুতে ছেদ করিল। BC যোগ কর। ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল।

চিত্র নং 127

প্রমাণ : $\because$ PD, ABর লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক, $\therefore$ AC=BC,

$\therefore$ $\triangle$ABC সমদ্বিবাহু। $\because$ $\angle$P=$\angle$PAC, $\therefore$ AC=PC.

$\therefore$ AC বাহু+লম্ব CD=PC+CD=PD=h.

উদা. 7. এরূপ একটি সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত কর যেন, তাহার যে কোন শীর্ষবিন্দু হইতে বিপরীত বাহুর উপর লম্ব কোন নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের সমান হয়।

[**Hints :** যে-কোন একটি সমবাহু ত্রিভুজ APQ আঁক। AR$\perp$PQ টান। AR বা বর্ধিত AR হইতে প্রদত্ত লম্বের সমান AD অংশ কাট। D বিন্দু দিয়া BC $\parallel$ PQ টান, BC যেন AP ও AQকে B ও C বিন্দুতে ছেদ করিল।

ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল।]

উদা. 8. ত্রিভুজের ভূমিসংলগ্ন কোণ দুইটি ও শীর্ষবিন্দু হইতে ভূমির উপর লম্ব দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর। [C. U. '39 ; C. G. '49]

মনে কর $\angle$X, $\angle$Y প্রদত্ত ভূমিসংলগ্ন কোণদ্বয় এবং h প্রদত্ত লম্ব।

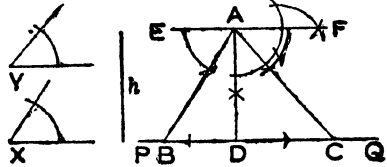
অঙ্কন : PQ যে-কোন সরলরেখা লও এবং উহার উপর যে-কোন D বিন্দুতে DA$\perp$PQ টান। DA=h কর এবং EAF $\parallel$ PQ টান। EFএর A বিন্দুতে $\angle$EAB=$\angle$X এবং $\angle$FAC=$\angle$Y আঁক। AB ও AC যেন PQকে B ও C বিন্দুতে ছেদ করিল। ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল।

প্রমাণ : $\because$ EF $\parallel$ PQ,

$\therefore$ $\angle$ABC=একান্তর $\angle$EAB

=$\angle$X, এবং

$\angle$ACB=একান্তর $\angle$CAF=$\angle$Y,

এবং লম্ব AD=h.

চিত্র নং 128

উদা. 9. ত্রিভুজের ভূমি, ভূমির সমদ্বিখণ্ডক মধ্যমা এবং উচ্চতা দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁক।

[**Hints :** প্রদত্ত ভূমি BCর লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক DP টানিয়া DP=প্রদত্ত লম্ব h কর। EPQ $\parallel$ BC টান। BCর মধ্যবিন্দু Dকে কেন্দ্র করিয়া প্রদত্ত মধ্যমা mএর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ আঁক, উহা যেন EQকে A বিন্দুতে ছেদ করিল। AB ও AC যোগ কর। ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল।

উদা. 10. কোন ত্রিভুজের ভূমি, একটি ভূমিসংলগ্ন কোণ এবং অপর বাহুদ্বয়ের সমষ্টি দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

[D. B. '48 ; C. U. '20]

মনে কর, a প্রদত্ত ভূমি, K অন্য বাহুদ্বয়ের সমষ্টি এবং ∠B প্রদত্ত ভূমিসংলগ্ন কোণ।

অঙ্কন: ভূমি BC=a লও। B বিন্দুতে ∠CBD=∠B আঁক। BD=K কর। DC যোগ করিয়া C বিন্দুতে ∠DCA=∠CDA আঁক, CA যেন BDকে A বিন্দুতে ছেদ করিল। ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল।

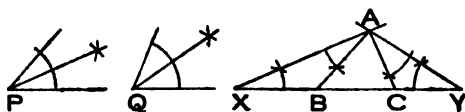
প্রমাণ: ∵ ∠ACD=∠ADC, ∴ AC=AD, ∴ AB+AC=BD=K.

উদা. 11. একটি ত্রিভুজের ভূমি, অপর দুই বাহুর অন্তর ও উহাদের একটির বিপরীত কোণ দেওয়া আছে; ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

[**Hints:** BC=প্রদত্ত ভূমি লও। ∠CBA=প্রদত্ত কোণ আঁক। BA হইতে প্রদত্ত বাহুদ্বয়ের অন্তরের সমান BD অংশ কাটিয়া লও। CD যোগ কর। ∠DCA=∠CDA আঁক। CA যেন BCকে A বিন্দুতে ছেদ করিল। ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল। ∵ ∠ADC=∠ACD, ∴ AD=AC. ∴ AB−AC=AB−AD=BD.]

[**দ্রষ্টব্য:** যদি প্রদত্ত কোণ স্থূলকোণ হয়, তবে ABকে বর্ধিত করিয়া ঐ বর্ধিতাংশ হইতে BD=প্রদত্ত অন্তর কর।]

উদা. 12. ত্রিভুজের পরিসীমা ও ভূমিসংলগ্ন কোণগুলি দেওয়া আছে; ত্রিভুজটি আঁক। [C. U. '38, '45, '52]

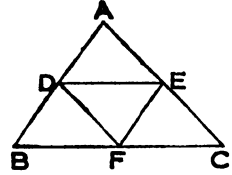
XY প্রদত্ত পরিসীমা এবং ∠P ও ∠Q ভূমিসংলগ্ন কোণদ্বয়।

চিত্র নং 129

অঙ্কন: ∠P ও ∠Qকে সমদ্বিখণ্ডিত কর। X ও Y বিন্দুতে যথাক্রমে ∠YXA=$\frac{1}{2}$∠P এবং ∠XYA=$\frac{1}{2}$∠Q আঁক। XA ও YA যেন A বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিল। A বিন্দুতে ∠XAB=∠X এবং ∠YAC=∠Y আঁক। AB ও AC যেন XYকে B ও C বিন্দুতে ছেদ করিল। ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল।

প্রমাণ: ∠ABC=∠X+∠BAX=2∠X=∠P, এবং ∠ACB=∠Y+∠CAY=2∠Y=∠Q. আবার, ∵ ∠X=∠BAX, ∴ AB=BX, এবং ∵ ∠Y=∠CAY, ∴ AC=CY.

∴ AB+BC+AC=XB+BC+CY=XY.

উদা. 13. একটি ত্রিভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দুগুলি দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

D, E ও F উদ্দিষ্ট ত্রিভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দু। DE, EF, FD যোগ কর। D বিন্দু দিয়া AB ‖ EF, E বিন্দু দিয়া AC ‖ DF এবং F বিন্দু দিয়া CFB ‖ DE টান। AB, AC ও BC যে △ABC উৎপন্ন করিল, উহাই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল।

চিত্র নং 130

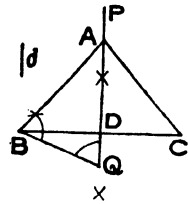
প্রমাণ: অঙ্কন অনুসারে ADFE ও DBFE দুইটি সামান্তরিক ; ∴ EF = AD এবং EF = BD,

∴ AD = BD, ∴ D বিন্দু AB বাহুর মধ্যবিন্দু। অনুরূপে প্রমাণ করা যায় যে, E ও F যথাক্রমে AC ও BC বাহুর মধ্যবিন্দু।

উদা. 14. একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের উচ্চতা ও শীর্ষকোণ দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

[**Hints:** PQ যে-কোন সরলরেখা এবং ইহাতে D যে-কোন বিন্দু লও। DA⊥PQ আঁক এবং AD = প্রদত্ত উচ্চতা h কর। A বিন্দুর দুই পার্শ্বে প্রদত্ত শিরঃকোণের অর্ধেকের সমান করিয়া ∠DAB ও ∠DAC আঁক। AB ও AC যেন PQকে B ও C বিন্দুতে ছেদ করিল। △ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল।]

উদা. 15. কোন সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি এবং অন্য একটি বাহু ও উচ্চতার অন্তর দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি আঁক।

BC প্রদত্ত ভূমি, এবং অন্য একটি বাহু ও উচ্চতার অন্তর = d. সমদ্বিবাহু ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে। BC-র লম্ব সমদ্বিখণ্ডক PDQ আঁক। উহা BCকে D বিন্দুতে ছেদ করিল। DQ = d কর। BQ যোগ কর এবং ∠Q-এর সমান করিয়া ∠QBA আঁক, BA যেন PQকে A বিন্দুতে ছেদ করিল। AC যোগ কর। ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল।

চিত্র নং 131

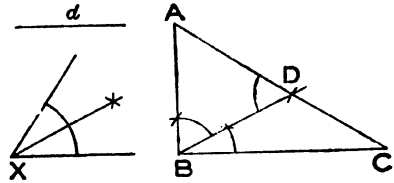
প্রমাণ: △ABC-র উচ্চতা AD. ∵ ∠ABQ = ∠AQB,

∴ AB = AQ. ∴ AB − AD = AQ − AD = DQ = d.

আবার AD, BC-র লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক হওয়ায় AB = AC.

∴ △ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

উদা. 16. ত্রিভুজের ভূমি, তৎসংলগ্ন কোণদ্বয়ের অন্তর এবং অন্য বাহু দুইটির অন্তরফল দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর। [C. U. '39, '41 ; D. B. '41]

মনে কর, প্রদত্ত ভূমি BC, d অন্য বাহুদ্বয়ের অন্তর এবং ∠X ভূমিসংলগ্ন কোণ দুইটির অন্তর। ত্রিভুজটি আঁকিতে হইবে। ∠Xকে সমদ্বিখণ্ডিত কর। B বিন্দুতে $\angle CBD = \frac{1}{2}\angle X$ আঁক।

চিত্র নং 132

Cকে কেন্দ্র করিয়া d ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ আঁক, উহা যেন BDকে D বিন্দুতে ছেদ করিল। CD যোগ কর। B বিন্দুতে ∠ADB-র সমান করিয়া ∠DBA আঁক। BA যেন বর্ধিত CDকে A বিন্দুতে ছেদ করিল। △ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল।

প্রমাণ : ∵ $\angle ABD = \angle ADB$, ∴ $AB = AD$.

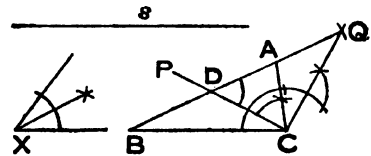
∴ $AC - AB = AC - AD = CD = d$. আবার, △BDC-র

বহিঃস্থ $\angle ADB = \angle DBC + \angle C$, ∴ $\angle ABD = \angle DBC + \angle C$.

উভয় পক্ষে ∠DBC যোগ করিলে, সমগ্র $\angle ABC = 2\angle DBC + \angle C$,

∴ $\angle ABC - \angle C = 2\angle DBC = \angle X$ (∵ $\angle DBC = \frac{1}{2}\angle X$).

উদা. 17. ত্রিভুজের ভূমি, ভূমিসংলগ্ন কোণদ্বয়ের অন্তরফল এবং অন্য বাহু দুইটির সমষ্টি দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁক।

BC ভূমি, অন্য দুই বাহুর সমষ্টি s এবং ভূমিসংলগ্ন কোণদ্বয়ের অন্তর ∠X দেওয়া আছে; ত্রিভুজটি আঁকিতে হইবে।

চিত্র নং 133

অঙ্কন : BC-র C বিন্দুতে $\angle BCP = \frac{1}{2}\angle X$ আঁক। $CQ \perp PC$ টান। Bকে কেন্দ্র করিয়া s ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ আঁক, উহা যেন CQকে Q বিন্দুতে ছেদ করিল। BQ যোগ কর, BQ যেন CPকে D বিন্দুতে ছেদ করিল। ∠QDC-র সমান করিয়া ∠DCA আঁক, CA যেন DQকে A বিন্দুতে ছেদ করিল। ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল।

প্রমাণ : $\angle DCA + \angle ACQ = 1$ সমকোণ (∵ $CQ \perp PC$),

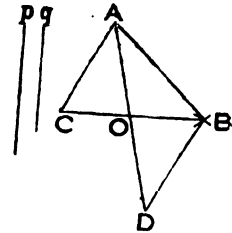
∴ $\angle CDQ + \angle DQC = 1$ সমকোণ।

$\therefore$ $\angle DCA + \angle ACQ = \angle CDQ + \angle DQC$; কিন্তু $\angle DCA = \angle CDQ$,
$\therefore$ $\angle ACQ = \angle AQC$, $\therefore$ $AC = AQ$. $\therefore$ $AB + AC = BQ = s$.
আবার, $\angle ACD = \angle ADC = \angle B + \angle BCD$,
$\therefore$ $\angle ACD + \angle BCD = 2\angle BCD + \angle B$,
$\therefore$ $\angle ACB = 2\angle BCD + \angle B$. $\therefore$ $\angle ACB - \angle B = 2\angle BCD = \angle X$.

উদা. 18. কোন ত্রিভুজের দুইটি বাহু ও তৃতীয় বাহুর সমদ্বিখণ্ডক মধ্যমা দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

মনে কর, p ও q দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য এবং AO তৃতীয় বাহুর উপর মধ্যমা ; ত্রিভুজটি আঁকিতে হইবে।

চিত্র নং 134

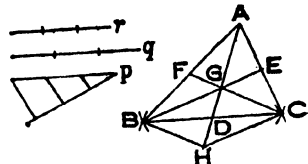
অঙ্কন : AOকে D পর্যন্ত বর্ধিত কর যেন OD = AO হয়। A ও Dকে কেন্দ্র করিয়া যথাক্রমে p ও q ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি বৃত্তচাপ আঁক, উহারা যেন পরস্পর B বিন্দুতে ছেদ করিল। BO যোগ করিয়া উহাকে C পর্যন্ত বর্ধিত কর, যেন CO = BO হয়। AB ও AC যোগ কর। $\triangle ABC$ উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল।

প্রমাণ : BD যোগ কর। $\triangle AOC$ ও $\triangle BOD$-র, $AO = DO$, $CO = BO$ এবং $\angle AOC =$ বিপ্রতীপ $\angle BOD$, $\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

$\therefore$ $AC = BD = q$. $AB = p$ এবং BO = CO বলিয়া AO মধ্যমা হইল।

উদা. 19. ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর। [C. U. 1940 ; W. B. S. F. '53]

ত্রিভুজের মধ্যমা তিনটির দৈর্ঘ্য p, q, r দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

চিত্র নং 135

অঙ্কন : p, q, rকে সমান তিন ভাগে বিভক্ত কর। $GH = \frac{2}{3}p$ লও এবং G ও Hকে কেন্দ্র করিয়া যথাক্রমে $\frac{2}{3}r$ ও $\frac{2}{3}q$ ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি বৃত্তচাপ আঁক, উহারা যেন পরস্পর C বিন্দুতে ছেদ করিল। GC ও HC যোগ কর। এখন GCHB সামান্তরিকটি আঁক। HGকে A পর্যন্ত বর্ধিত কর, যেন AG = GH হয়। AB ও AC যোগ কর। এখন ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল।

প্রমাণ : BG ও CGকে বর্ধিত করিয়া AC ও ABকে যথাক্রমে E ও F বিন্দুতে ছেদ কর। ∵ BGCH একটি সামান্তরিক, ∴ GD=DH এবং BD=DC.

∴ AD একটি মধ্যমা এবং AD=AG+GD=GH+$\frac{1}{2}$GH=$\frac{2}{3}p+\frac{1}{3}p=p$.

△AHC-র AH বাহুর মধ্যবিন্দু G হইতে GE ∥ HC,

∴ E, AC-র মধ্যবিন্দু এবং GE=$\frac{1}{2}$CH=$\frac{1}{3}q$.

∴ BE একটি মধ্যমা এবং BE=BG+GE=CH+$\frac{1}{2}$CH=q.

অনুরূপে, CF তৃতীয় মধ্যমা এবং CF=r.

উদা. 20. ত্রিভুজের ভূমি-সংলগ্ন কোণ দুইটি এবং ভূমি ব্যতীত অন্য বাহুদ্বয়ের সমষ্টি দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে।

[**Hints :** একটি সরলরেখার যে কোন বিন্দুতে ভূমি-সংলগ্ন কোণ দুইটি পর পর আঁক। অবশিষ্ট কোণটি ত্রিভুজের শীর্ষকোণ পাওয়া গেল। দুইটি বাহুর প্রদত্ত সমষ্টির সমান AP সরলরেখা লও। AP-র P বিন্দুতে ∠AFB=$\frac{1}{2}$ শীর্ষকোণ আঁক এবং A বিন্দুতে একটি ভূমি-কোণের সমান ∠PAB আঁক। AB যেন PBকে B বিন্দুতে ছেদ করিল। AB-র B বিন্দুতে ∠PBC=∠P আঁক, BC যেন APকে C বিন্দুতে ছেদ করিল। এক্ষণে ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল। (প্রমাণ সহজ)]

বিবিধ প্রশ্নমালা 17

1. একটি ত্রিভুজের কোন বাহুর উপর এমন একটি বিন্দু স্থাপন কর যেন উহা হইতে অপর বাহুদ্বয়ের দূরত্ব সমান হয়।

2. কোন সমকোণী ত্রিভুজের একটি সূক্ষ্মকোণ অপর সূক্ষ্মকোণটির দ্বিগুণ। প্রমাণ কর যে, উহার অতিভুজটি ক্ষুদ্রতম বাহুটির দ্বিগুণ। [C. U. '45]

3. একটি ত্রিভুজে এমন একটি রম্বস অঙ্কিত কর, যেন উহার একটি কোণ ত্রিভুজের একটি কোণের সমান হয়।

4. কোন সমবাহু ত্রিভুজে এরূপ একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর যেন তাহার একটি বাহু ত্রিভুজের ভূমির উপর অবস্থিত হয়।

5. △ABC-র বাহুগুলির উপর ABD, BCE ও CAF সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত করা হইল। প্রমাণ কর যে, AE=BF=CD.

6. একটি ত্রিভুজের ভূমি, ভূমি-সংলগ্ন একটি কোণ ও শীর্ষবিন্দু হইতে ভূমির উপর লম্ব দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর। [C. U. '51]

7. কোন ত্রিভুজের বৃহত্তম বাহুর সমদ্বিখণ্ডক মধ্যমাটি উহার ক্ষুদ্রতম মধ্যমা।

8. কোন সামান্তরিকের বিপরীত কোণগুলির সমদ্বিখণ্ডকগুলি পরস্পর সমান্তরাল।

9. একটি সমকোণী ত্রিভুজের সমকৌণিক বিন্দু হইতে অঙ্কিত অতিভুজের সমদ্বিখণ্ডক মধ্যমা ও উহার উপর লম্বের অন্তর্গত কোণটি ত্রিভুজটির সূক্ষ্মকোণদ্বয়ের অন্তরের সমান।

10. O-কেন্দ্রীয় বৃত্তের AB একটি জ্যা। AB-কে C ও D পর্যন্ত বর্ধিত করায় ∠DOA ও ∠COB সমান হইয়াছে। প্রমাণ কর যে, BC=AD. [B. U. '28]

11. কোন সমবাহু ত্রিভুজের উচ্চতাটি দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

12. ত্রিভুজের উচ্চতা, ভূমি-সংলগ্ন একটি কোণ এবং অপর বাহুদ্বয়ের সমষ্টি দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

13. সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের উচ্চতা ও ভূমি-সংলগ্ন কোণটি দেওয়া আছে; ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

14. ত্রিভুজের একটি বাহু এবং অপর বাহুদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডক মধ্যমা দুইটির দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর। [D.B.'49 ; C.U.'42 ; G.U.'48]

15. কোন ত্রিভুজের একটি কোণ, ঐ কোণের বিপরীত বাহু এবং ঐ কোণ-সংলগ্ন বাহুদ্বয়ের অন্তর দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

16. কোন সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু তিনটি হইতে বিপরীত বাহু তিনটির উপর অঙ্কিত লম্বত্রয় পরস্পর সমান।

17. সামান্তরিকের কোন বাহুর উপর লম্ব টানিয়া উহাকে সমদ্বিখণ্ডিত কর।

18. ট্রাপিজিয়মের সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু সংযোজক সরলরেখা ট্রাপিজিয়মকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

19. ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের BA ও CA সমান বাহুদ্বয়কে যথাক্রমে E ও F বিন্দু পর্যন্ত এরূপে বর্ধিত করা হইল যেন, AE ও AF সমান হয়। প্রমাণ কর যে FB=EC.

20. যদি কোন ত্রিভুজের একটি ভূমি-সংলগ্ন কোণ অপরটির দ্বিগুণ হয় এবং উহার শীর্ষবিন্দু হইতে ভূমির উপর লম্ব টানা হয়, তবে প্রমাণ কর যে ভূমির অংশদ্বয়ের অন্তরফল অপর বাহুদ্বয়ের মধ্যে ক্ষুদ্রতরটির সমান হইবে। [B. U.]

21. কোন ত্রিভুজের দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য নির্দিষ্ট; প্রমাণ কর যে ঐ বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভূর্ত কোণটি সমকোণ হইলে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল বৃহত্তম হইবে।

22. কোন বৃত্তের OA ব্যাসার্ধ, OB ব্যাসার্ধের উপর লম্ব। A ও B হইতে কোন ব্যাসের উপর AM ও BN লম্ব টানা হইল। প্রমাণ কর যে, AM = ON. [B. U. '28]

23. রম্বসের বাহুগুলি হইতে উহার অভ্যন্তরস্থ কোন বিন্দুর দূরত্বগুলির সমষ্টি ধ্রুবক।

24. △ABC-র BA ও CA বাহুকে D ও E বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করায় AD = AB এবং AE = AC হইল। প্রমাণ কর যে, DE ∥ BC.

25. △ABC-র BC বাহুর মধ্যবিন্দু D; যদি BD = CD = AD হয়, তবে ∠BAC সমকোণ হইবে। [G. U. '48]

26. এরূপ একটি সামান্তরিক অঙ্কিত কর যেন তাহার ক্ষেত্রফল ও পরিসীমা একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল ও পরিসীমার সমান হয়।

27. কোন নির্দিষ্ট ভূমির উপর অবস্থিত এবং নির্দিষ্ট ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট সামান্তরিকের কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

28. একটি বর্গক্ষেত্রের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত কর।

29. △ABC-র AD ও CE যথাক্রমে A ও C কোণের সমদ্বিখণ্ডক। B হইতে BC-র সমান BE এবং BA-র সমান BD টানা হইয়াছে। প্রমাণ কর যে, E, B ও D একরেখীয়। [C. U. 1882]

30. সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট দুইটি ত্রিভুজ একই ভূমির উপর পরস্পর বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত। প্রমাণ কর যে, উহাদের শীর্ষবিন্দুদ্বয় সংযোজক সরলরেখাটি ভূমির দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত।

31. ABCD সামান্তরিকের BC ও CD বাহুর মধ্যবিন্দু E ও F; প্রমাণ কর যে, △AEF = ABCD ক্ষেত্রের $\frac{3}{8}$.

32. একটি বর্গক্ষেত্রের অর্ধেক একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর।

33. ABC ত্রিভুজের AB > AC; প্রমাণ কর যে মধ্যমা BD > মধ্যমা CE.

34. স্থির শিরঃকোণবিশিষ্ট যে সকল ত্রিভুজের ভূমি একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যায়, তাহাদের মধ্যে যেটির ভূমি ঐ বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত তাহার ক্ষেত্রফল ক্ষুদ্রতম হইবে। [B. U. 1852]

দশম অধ্যায়

দশম শ্রেণীর পাঠ্য

24. বৃত্তসম্বন্ধীয় উপপাদ্য

সংজ্ঞা : পূর্বে বৃত্তসম্বন্ধীয় কতিপয় সংজ্ঞা দেওয়া হইয়াছে। এখানে আরও কতকগুলি জ্ঞাতব্য সংজ্ঞা দেওয়া হইতেছে।

বৃত্তাংশস্থ কোণ : বৃত্তাংশের জ্যা-এর দুই প্রান্তের সহিত ঐ বৃত্তাংশের চাপের উপর কোন বিন্দু সংযুক্ত করিলে ঐ বিন্দুতে উৎপন্ন কোণটিকে ঐ বৃত্তাংশস্থ কোণ (angle in the segment) বলে।

বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ : যদি কোন চতুর্ভুজের কৌণিক বিন্দু চারিটি দিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কন করা সম্ভব হয়, তবে উহাকে **বৃত্তস্থ** (cyclic) **চতুর্ভুজ** বলে।

আর, যে সকল বিন্দু দিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কন করা সম্ভব হয়, তাহাদিগকে সমবৃত্ত (concyclic) বিন্দু বা একই বৃত্তস্থ বিন্দু বলে।

পরিবৃত্ত : ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু তিনটি দিয়া অঙ্কিত বৃত্তকে উহার পরিবৃত্ত বা পরিলিখিত বৃত্ত (circum-circle) বলে।

পরিবৃত্তের কেন্দ্রকে **পরিকেন্দ্র** (circum-centre) এবং পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধকে **পরিব্যাসার্ধ** (circum-radius) বলে।

অন্তর্লিখিত ও পরিলিখিত : কোন সরলরৈখিক ক্ষেত্রের শীর্ষগুলি একটি বৃত্তের পরিধির উপর থাকিলে, উহাকে ঐ বৃত্তের **অন্তর্লিখিত** (Inscribed) সরলরৈখিক ক্ষেত্র বলে। আর ঐ বৃত্তটিকে ঐ ক্ষেত্রের **পরিলিখিত** বৃত্ত বলে।

কোন ঋজুরেখ ক্ষেত্রের বাহুগুলি একটি বৃত্তকে স্পর্শ করিলে, উহাকে বৃত্তটির **পরিলিখিত** (circumscribed) ঋজুরেখক্ষেত্র বলে। আর, ঐ বৃত্তটিকে ঐ ঋজুরেখক্ষেত্রের **অন্তর্লিখিত** বৃত্ত (In-circle or inscribed circle) বলে।

উপপাদ্য 37

একই সরলরেখায় অবস্থিত নহে এরূপ তিনটি বিন্দু দিয়া একটি এবং কেবলমাত্র একটি বৃত্ত অঙ্কিত করা যায়।

[*One, and only one circle, can be drawn through three points not in the same straight line.*]

A, B, C তিনটি বিন্দু এবং উহারা একই সরলরেখায় অবস্থিত নহে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, A, B ও C বিন্দু দিয়া একটি এবং কেবলমাত্র একটি বৃত্তই অঙ্কিত করা যায়।

অঙ্কন : AB ও BC যোগ কর। AB ও BC-র লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক যথাক্রমে DE ও FG অঙ্কিত কর।

চিত্র নং 136

প্রমাণ : AB ও BC এক সরলরেখায় অবস্থিত নহে বলিয়া DE ও FG লম্বদ্বয় সমান্তরাল না হইয়া পরস্পর ছেদ করিবে।

মনে কর, উহারা O বিন্দুতে ছেদ করিল।

∵ AB-র লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক DE,

∴ DE-র উপর অবস্থিত যে-কোন বিন্দু A ও B হইতে সমদূরবর্তী।

আবার, ∵ BC-র লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক FG,

∴ FG-র উপর অবস্থিত যে কোন বিন্দু B ও C হইতে সমদূরবর্তী।

∴ DE ও FG-র সাধারণ বিন্দু O, প্রদত্ত A, B ও C বিন্দু তিনটি হইতে সমদূরবর্তী, অর্থাৎ OA = OB = OC.

∴ O-কে কেন্দ্র করিয়া OA ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্ত A, B ও C বিন্দু দিয়া যাইবে।

আবার, ∵ দুইটি সরলরেখা কেবল একটিমাত্র বিন্দুতে ছেদ করে,

∴ O বিন্দুই একমাত্র বিন্দু যাহা A, B ও C হইতে সমদূরবর্তী।

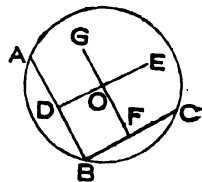
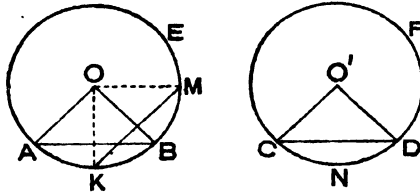
∴ A, B ও C বিন্দু দিয়া কেবলমাত্র একটি বৃত্তই অঙ্কন করা যায়।

অনুসিদ্ধান্ত 1. যে সকল বৃত্তের পরিধিস্থ তিনটি বিন্দু সাধারণ, তাহারা পরস্পর সমাপতিত হয় অর্থাৎ তাহারা মিলিত হইয়া একই বৃত্ত হয়।

অনুসিদ্ধান্ত 2. দুইটি বৃত্ত দুইটির অধিক বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিতে পারে না।

কারণ; উহারা তৃতীয় এক বিন্দুতে ছেদ করিলে তিনটি বিন্দু দিয়া দুইটি পৃথক্ বৃত্ত হইবে কিন্তু তাহা অসম্ভব। তখন উভয় বৃত্ত সমাপতিত হইয়া একটি বৃত্তহইবে।

25. স্বতঃসিদ্ধ (উপপাদ্য) 6. সমান সমান বৃত্তে (বা একই বৃত্তে) সমান সমান জ্যা সমান সমান চাপ ছিন্ন করে এবং কেন্দ্রে সমান সমান সম্মুখকোণ উৎপন্ন করে।

মনে কর, O ও O′ দুইটি সমান বৃত্তের কেন্দ্র। যদি উহাদের AB ও CD জ্যা দুইটি সমান হয়, তবে AKB চাপ CND চাপের সহিত এবং AEB চাপ

CFD চাপের সহিত সমান হইবে এবং কেন্দ্রস্থ AOB ও CO'D সম্মুখ কোণদ্বয় সমান হইবে।

চিত্র নং 137

যদি একই বৃত্তে (মনে কর, প্রথম বৃত্তে) AB ও KM দুইটি সমান জ্যা হয়, তবে চাপ AKB=চাপ KBM, চাপ AEB=চাপ KAEM, এবং ∠AOB= ∠KOM হইবে।

ইহার বিপরীতক্রমে বলা যায়,—সমান সমান বৃত্তে (অথবা একই বৃত্তে) যে সকল জ্যা সমান চাপ ছিন্ন করে বা কেন্দ্রে সমান কোণ উৎপন্ন করে, তাহারা পরস্পর সমান। ইহাকেও স্বতঃসিদ্ধ ধরা হয়।

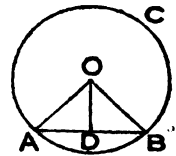
উপপাদ্য 38

বৃত্তের কেন্দ্র হইতে অঙ্কিত কোন সরলরেখা যদি ব্যাস নহে এরূপ কোন জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে, তবে উহা ঐ জ্যার উপর লম্ব হইবে।

বিপরীতক্রমে, বৃত্তের কেন্দ্র হইতে ব্যাস ভিন্ন অপর কোন জ্যার উপর অঙ্কিত লম্ব ঐ জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

[*A straight line drawn from the centre of a circle to bisect a chord which is not a diameter is at right angles to the chord.*

Conversely, *the perpendicular, drawn from the centre to a chord, bisects the chord.*]

ABC বৃত্তের কেন্দ্র O এবং কেন্দ্রের বহিঃস্থ AB একটি জ্যা। O হইতে অঙ্কিত OD সরলরেখা AB-কে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে OD, AB-র উপর লম্ব।

C O A D B

চিত্র নং 138

OA ও OB যোগ কর।

প্রমাণ : OAD ও OBD ত্রিভুজের, OA=OB (∵ একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ) AD=BD (স্বীকার), এবং OD সাধারণ বাহু, ∴ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম।

∴ ∠ODA=∠ODB, এবং ইহারা সন্নিহিত কোণ,

∴ OD, AB-র উপর লম্ব।

বিপরীতক্রমে, ABC বৃত্তের কেন্দ্র O, AB কেন্দ্রের বহিঃস্থ একটি জ্যা এবং OD সরলরেখা AB-র উপর লম্ব।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, AD=BD. OA, OB যোগ কর।

প্রমাণ : OAD ও OBD সমকোণী ত্রিভুজ দুইটির অতিভুজ OA=অতিভুজ OB (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ), এবং OD সাধারণ বাহু,

∴ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম। ∴ AD=BD.

অনুসিদ্ধান্ত 1. যে কোন জ্যা-এর লম্বসমদ্বিখণ্ডক বৃত্তের কেন্দ্র দিয়া যাইবে।

[∵ বৃত্তের কেন্দ্রটি জ্যা-এর দুই প্রান্তবিন্দু হইতে সমদূরবর্তী,

∴ উহা জ্যা-এর লম্বসমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত হইবে।]

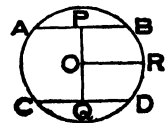
অনুসিদ্ধান্ত 2. একটি সরলরেখা একটি বৃত্তকে দুই-এর অধিক বিন্দুতে ছেদ করিতে পারে না।

[যদি সম্ভব হয়, মনে কর, ABC সরলরেখাটি একটি বৃত্তকে A, B, C বিন্দুতে ছেদ করিল। ∵ AB একটি জ্যা, ∴ কেন্দ্রটি AB-র লম্ব-সমদ্বিখণ্ডকের উপর থাকিবে। আবার ∵ AC একটি জ্যা, ∴ কেন্দ্রটি AC-র লম্ব-সমদ্বিখণ্ডকের উপর থাকিবে। ∴ ঐ লম্বদ্বয়ের ছেদবিন্দুই বৃত্তের কেন্দ্র হইবে। কিন্তু ABC একই সরলরেখা হওয়ায় উহার উপর লম্বদ্বয় সমান্তরাল হইবে, সুতরাং উহাদের ছেদবিন্দু হওয়া সম্ভব নহে।]

বিবিধ উদাহরণ 10

উদা. 1. একটি বৃত্তের দুইটি সমান্তরাল জ্যার মধ্যবিন্দুদ্বয় সংযোজক সরলরেখাটি বৃত্তের কেন্দ্র দিয়া যাইবে। [B. U.]

প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র O, AB ও CD দুইটি সমান্তরাল জ্যা এবং P ও Q যথাক্রমে AB ও CD-র মধ্যবিন্দু।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, PQ সরলরেখা কেন্দ্র O দিয়া যাইবে।

চিত্র নং 139

অঙ্কন : OP ও OQ যোগ কর। OR ∥ PB টান।

প্রমাণ : $\because$ OP ও OQ সরলরেখা জ্যা AB ও CDকে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে, $\therefore$ $\angle OPB$ ও $\angle OQD$ প্রত্যেকে সমকোণ। $\because$ OR ∥ PB,

$\therefore$ $\angle OPB + \angle POR = 2$ সমকোণ, $\therefore$ $\angle POR = 1$ সমকোণ।

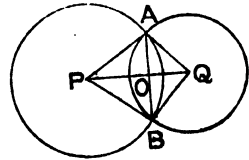
আবার, $\because$ OR ∥ PB এবং PB ∥ QD, $\therefore$ OR ∥ QD.

$\therefore$ $\angle OQD + \angle QOR = 2$ সমকোণ, $\therefore$ $\angle QOR = 1$ সমকোণ।

$\therefore$ $\angle POR + \angle QOR = 2$ সমকোণ, সুতরাং OP ও OQ একই সরলরেখায় অবস্থিত। অতএব, PQ সরলরেখা কেন্দ্র O দিয়া গিয়াছে।

উদা. 2. দুইটি বৃত্তের কেন্দ্র সংযোজক সরলরেখা উভয়ের সাধারণ জ্যাকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে। [C. U. '50]

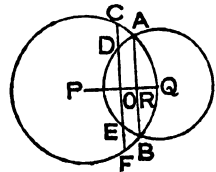
চিত্র নং 140

P ও Q দুইটি বৃত্তের কেন্দ্র এবং AB উভয়ের সাধারণ জ্যা। প্রমাণ করিতে হইবে যে PQ, AB জ্যাকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে। AB, AQ, BP, BQ যোগ কর। PQ ও AB যেন O বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ : $\triangle APQ$ ও $\triangle BPQ$এর $AP = BP$, $AQ = BQ$ (ব্যাসার্ধ বলিয়া) এবং PQ সাধারণ বাহু, $\therefore$ $\angle APQ = \angle BPQ$. আবার, $\triangle APO$ ও $\triangle BPO$-র $AP = PB$, PO সাধারণ বাহু এবং $\angle APO = \angle BPO$, $\therefore$ $AO = BO$ এবং $\angle AOP = \angle BOP$, ইহারা সন্নিহিত কোণ বলিয়া প্রত্যেকে এক সমকোণ।

$\therefore$ PQ, ABকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে।

উদা. 3. দুইটি বৃত্ত পরস্পর A ও B বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে এবং ABর সমান্তরাল একটি সরলরেখা বৃত্তদ্বয়কে C, D, E, F বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর যে, $CD = EF$.

চিত্র নং 141

বৃত্ত দুইটি A ও B বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। P ও Q উহাদের কেন্দ্র। CF ∥ AB টানা হইল, উহা বৃত্ত দুইটিকে C, D, E ও F বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ করিতে হইবে, $CD = EF$. মনে কর, PQ রেখা AB ও CFকে R ও O বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ : কেন্দ্র-সংযোজক রেখা PQ সাধারণ জ্যা ABকে R বিন্দুতে ছেদ করায় $PR \perp AB$, এবং CF ∥ AB বলিয়া PR, CF-এর উপরও লম্ব। এখন কেন্দ্র P হইতে PO, CF জ্যার উপর লম্ব বলিয়া $CO = FO$ এবং QO, DE জ্যার উপর লম্ব বলিয়া $DO = EO$.

$\therefore$ $CO - DO = FO - EO$, $\therefore$ $CD = EF$.

প্রশ্নমালা 18

1. একটি বৃত্তে এরূপ একটি জ্যা স্থাপন কর যেন তাহার দৈর্ঘ্য কেন্দ্র হইতে তাহার দূরত্বের দ্বিগুণ হয়।

2. কোন বৃত্তে দুইটি জ্যা যদি কেন্দ্রগামী না হয়, তবে তাহারা পরস্পর সমদ্বিখণ্ডিত হইতে পারে না। [C. U. '18]

3. দুইটি বিভিন্ন বৃত্ত দুই-এর অধিক বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিতে পারে না। [C. U. '33 ; W. B. S. F. '52 ; D. B. '48]

4. প্রমাণ কর যে, ব্যাসই বৃত্তের বৃহত্তম জ্যা।

5. বৃত্তের অভ্যন্তরস্থ কোন নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া এমন একটি জ্যা অঙ্কিত কর যেন উহা ঐ বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

6. বৃত্তের কোন জ্যার মধ্যবিন্দু হইতে উহার উপর লম্ব টানিলে লম্বটি কেন্দ্র দিয়া যাইবে।

7. বৃত্তের দুইটি জ্যার মধ্যবিন্দুদ্বয় সংযোজক সরলরেখা একটি জ্যার উপর লম্ব হইলে অপর জ্যার উপরও লম্ব হইবে।

8. কোন সরলরেখা দুইটি এককেন্দ্রীয় বৃত্তকে ছেদ করিলে ঐ বৃত্ত দুইটির মধ্যবর্তী উহার অংশদ্বয় সমান হইবে।

9. একটি বৃত্তের সমান্তরাল জ্যাগুলির মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

10. যদি কোন বৃত্তের দুইটি পরস্পরছেদী জ্যা ছেদবিন্দু ও কেন্দ্র সংযোজক সরলরেখার সহিত সমান কোণ উৎপন্ন করে, তবে জ্যাদ্বয় সমান হইবে। [A.U.]

11. একটি বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে পরিধি পর্যন্ত অঙ্কিত দুইটি সরলরেখা সমান হইলে, উহাদের অন্তর্ভূত কোণের সমদ্বিখণ্ডক বৃত্তের কেন্দ্র দিয়া যাইবে।

12. একটি বৃত্তচাপ দেওয়া আছে। বৃত্তটি সম্পূর্ণ অঙ্কিত কর।

13. একটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী যে সকল বৃত্তের কেন্দ্র একটি নির্দিষ্ট সরলরেখায় অবস্থিত, তাহারা অপর একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যাইবে।

14. একটি বহিঃস্থ বিন্দু হইতে কোন বৃত্তের পরিধি পর্যন্ত দুইটি সমান সরলরেখা টানা হইল। প্রমাণ কর যে, উহারা কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্তী।

15. দুইটি পরস্পরছেদী বৃত্তের একটি ছেদবিন্দু দিয়া বৃত্তদ্বয়ের পরিধি পর্যন্ত অঙ্কিত সরলরেখাসমূহের মধ্যে যেটি বৃত্তদ্বয়ের কেন্দ্র-সংযোজক সরলরেখার সমান্তরাল সেইটিই বৃহত্তম।

উপপাদ্য 39

বৃত্তের সমান সমান জ্যাগুলি কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্তী।

বিপরীতক্রমে, বৃত্তের কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্তী জ্যাগুলি পরস্পর সমান।

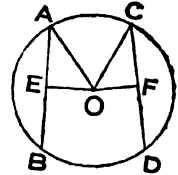
[*Equal chords of a circle are equidistant from the centre.*

Conversely, *chords which are equidistant from the centre are equal.*]

প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র O এবং AB ও CD দুইটি সমান জ্যা।

মনে কর, OE ও OF যথাক্রমে AB ও CDর উপর লম্ব।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, OE=OF.

AO ও CO যোগ কর।

চিত্র নং 142

প্রমাণ : ∵ কেন্দ্র O হইতে OE, AB জ্যা-এর উপর লম্ব,

∴ OE, ABকে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে [উপ. 38],

∴ $AE=\frac{1}{2}AB$. অনুরূপে, ∵ $OF \perp CD$, ∴ $CF=\frac{1}{2}CD$.

কিন্তু AB=CD (স্বীকার), ∴ AE=CF.

এখন, AEO ও CFO সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের

অতিভুজ OA=অতিভুজ OC (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলিয়া),

এবং AE=CF (প্রমাণিত), ∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। ∴ OE=OF.

বিপরীতক্রমে, O বৃত্তের কেন্দ্র, AB ও CD দুইটি জ্যা। ঐ জ্যাদ্বয়ের উপর যথাক্রমে OE ও OF লম্ব দুইটি সমান।

প্রমাণ করিতে হইবে AB=CD. OA ও OC যোগ কর।

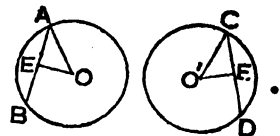
প্রমাণ : ∵ $OE \perp AB$, ∴ $AE=\frac{1}{2}AB$. আবার, ∵ $OF \perp CD$, ∴ $CF=\frac{1}{2}CD$.

এক্ষণে, OEA ও OFC সমকোণী ত্রিভুজ দুইটির অতিভুজ OA=অতিভুজ OC এবং OE=OF (স্বীকার), ∴ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম। ∴ AE=CF.

∴ AB=CD (সমান সমান বস্তুর দ্বিগুণ বলিয়া)।

[**দ্রষ্টব্য :** সমান সমান বৃত্তের সমান সমান জ্যাগুলি কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্তী।

বিপরীতক্রমে, সমান সমান বৃত্তের কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্তী জ্যাগুলি পরস্পর সমান।

উপপাদ্য 39এর ন্যায় প্রমাণ কর।]

চিত্র নং 143

একটি অতিরিক্ত উপপাদ্য 40

বৃত্তের দুইটি জ্যা-এর মধ্যে কেন্দ্রের অধিকতর নিকটবর্তী জ্যা-টি অপেক্ষাকৃত দূরবর্তী জ্যা অপেক্ষা বৃহত্তর।

বিপরীত পক্ষে, দুইটি জ্যা-এর মধ্যে বৃহত্তরটি ক্ষুদ্রতরটি অপেক্ষা কেন্দ্রের অধিকতর নিকটবর্তী।

[*Of any two chords of a circle that which is nearer to the centre is greater than one more remote.*

Conversely, *the greater of two chords is nearer to the centre than the less.*]

একটি বৃত্তের কেন্দ্র O এবং AB ও CD দুইটি জ্যা। O হইতে AB ও CDর উপর যথাক্রমে OE ও OF দুইটি লম্ব।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, (i) $OE < OF$ হইলে, $AB > CD$;

বিপরীত পক্ষে (ii) $AB > CD$ হইলে, $OE < OF$.

চিত্র নং 144

প্রমাণ : OA ও OC যোগ কর।

$\because$ কেন্দ্র O হইতে $OE \perp AB$, $\therefore AE = \frac{1}{2}AB$.

অনুরূপে $\because OF \perp CD$, $\therefore CF = \frac{1}{2}CD$.

$\because$ $\angle OEA$ ও $\angle OFC$ প্রত্যেকে সমকোণ,

$\therefore$ $OA^2 = OE^2 + AE^2$ এবং $OC^2 = OF^2 + CF^2$;

কিন্তু $OA = OC$ (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলিয়া), $\therefore OA^2 = OC^2$.

$\therefore$ $OE^2 + AE^2 = OF^2 + CF^2 \cdots\cdots(1)$

এক্ষণে (i) $OE < OF$ হইলে, $OE^2 < OF^2$;

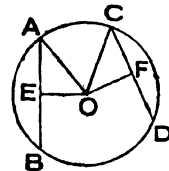
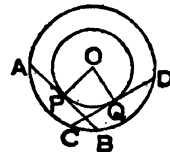
$\therefore$ (1) হইতে $AE^2 > CF^2$, $\therefore AE > CF$, $\therefore AB > CD$

আবার, (ii) $AB > CD$ হইলে, $AE > CF$, $\therefore AE^2 > CF^2$,

$\therefore$ (1) হইতে $OE^2 < OF^2$, $\therefore$ $OE < OF$.

বিবিধ উদাহরণ 11

উদা. 1. কোন বৃত্তের সমান সমান জ্যাগুলির মধ্যবিন্দুসমূহের সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। [C. U. '13, '21, '33 ; D. B '35]

মনে কর, বৃত্তটির কেন্দ্র O এবং AB, CD প্রভৃতি উহার সমান জ্যা। এই জ্যা-গুলির মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় করিতে হইবে। মনে কর, P, Q প্রভৃতি বিন্দু যথাক্রমে AB, CD প্রভৃতি জ্যা-এর মধ্যবিন্দু। কেন্দ্র O-এর সহিত ঐ মধ্যবিন্দুগুলি যোগ কর।

চিত্র নং 145

এখন OP, OQ প্রভৃতি এই সংযোজক রেখাগুলি AB, CD প্রভৃতি জ্যা-গুলির উপর লম্ব হইল।

∵ জ্যা-গুলি সমান, ∴ উহারা কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্তী।

∵ কেন্দ্র হইতে মধ্যবিন্দুগুলির দূরত্ব OPর সমান,

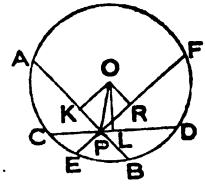
∴ নির্ণেয় সঞ্চারপথ একটি বৃত্ত যাহার কেন্দ্র O এবং ব্যাসার্ধ OP.

উদা. 2. বৃত্তের অন্তঃস্থ কেন্দ্র ভিন্ন অন্য কোন বিন্দুতে তিনটি সমান জ্যা পরস্পর ছেদ করিতে পারে না।

যে সকল জ্যা কেন্দ্র দিয়া যায় তাহাদিগকে ব্যাস বলে। সকল ব্যাসই সমান এবং তাহারা কেন্দ্রে পরস্পর ছেদ করে।

এক্ষণে মনে কর, AB ও CD দুইটি সমান জ্যা কেন্দ্র O দিয়া না গিয়া P বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। যদি সম্ভব হয় মনে কর, P বিন্দু দিয়া EF আর একটি উহাদের সমান জ্যা টানা হইল। OK, OL, OR যথাক্রমে AB, CD, EF-এর উপর লম্ব টান। OP যোগ কর। OKP ও OLP সমকোণী

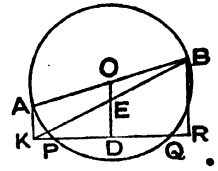
চিত্র নং 146

ত্রিভুজদ্বয়ের OK=OL, OP সাধারণ অতিভুজ, ∴ উহারা সর্বসম।

∴ $\angle OPK = \angle OPL$. অনুরূপে $\angle OPK = \angle OPR$.

∴ $\angle OPL = \angle OPR$; কিন্তু ইহা অসম্ভব, কারণ, সমগ্র $\angle OPL$ তাহার অংশের সহিত সমান হইতে পারে না। অতএব, কেন্দ্র ভিন্ন অন্য কোন বিন্দুতে তিনটি সমান জ্যা পরস্পর ছেদ করিতে পারে না।

উদা. 3. কোন বৃত্তের PQ একটি নির্দিষ্ট জ্যা এবং AB যে কোন একটি ব্যাস। যদি AB ও PQ বৃত্তের মধ্যে পরস্পর ছেদ না করে, তবে প্রমাণ কর যে, A ও B হইতে PQএর উপর লম্বদ্বয়ের সমষ্টি ধ্রুবক। [C. U. '37, '39 Supl.]

AB যে-কোন ব্যাস এবং PQ একটি নির্দিষ্ট জ্যা। AK ও BR, PQ জ্যার উপর লম্ব।

প্রমাণ করিতে হইবে, AK+BR=ধ্রুবক। BK যোগ কর এবং $OD \perp PQ$ টান, OD যেন KBকে E বিন্দুতে ছেদ করিল।

চিত্র নং 147

প্রমাণ: AK, OD, BR একই সরলরেখার উপর লম্ব বলিয়া পরস্পর সমান্তরাল। ∵ $OD \perp PQ$, ∴ D, PQএর মধ্যবিন্দু।

কেন্দ্র O এবং PQ নির্দিষ্ট বলিয়া OD = ধ্রুবক। ∵ △ABKর AB বাহুর মধ্যবিন্দু O হইতে OE ∥ AK, ∴ E বিন্দু BKর মধ্যবিন্দু এবং AK = 2EO.
আবার, △KBRএর KB বাহুর মধ্যবিন্দু E হইতে ED ∥ BR, ∴ BR = 2DE.

∴ $AK+BR=2(EO+DE)=2DO=$ ধ্রুবক।

প্রশ্নমালা 19

1. ব্যাসই বৃত্তের বৃহত্তম জ্যা।

2. কোন ব্যাসের দুই প্রান্ত হইতে উহার উভয় পার্শ্বে দুইটি সমান জ্যা অঙ্কিত করিলে, ঐ জ্যাদ্বয় সমান্তরাল হইবে।

3. কোন ব্যাসের দুই প্রান্ত হইতে অঙ্কিত সমান্তরাল জ্যা দুইটি সমান।

4. একটি বৃত্তের অন্তঃস্থিত একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া পরস্পর সমকোণে নত দুইটি সমান জ্যা অঙ্কিত কর।

5. একটি বৃত্তের অভ্যন্তরে কোন নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া বৃহত্তম জ্যাটি অঙ্কিত কর।

6. একটি নির্দিষ্ট জ্যা-এর সমান ও একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান্তরাল একটি জ্যা অঙ্কিত কর।

7. কোন বৃত্তের অন্তঃস্থ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া ক্ষুদ্রতম জ্যাটি অঙ্কিত কর। [C. U. '35, '42]

8. দুইটি সমান্তরাল জ্যা-এর দৈর্ঘ্য 16 সে. মি. ও 30 সে. মি. এবং বৃত্তটির ব্যাসার্ধ 17 সে. মিটার হইলে ঐ জ্যাদ্বয়ের ব্যবধান কত?

[উত্তর = 7 সে. মি., বা, 23 সে. মি.]

9. কোন জ্যা উহার মধ্যবিন্দু দিয়া অঙ্কিত যে-কোন জ্যা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

10. কোন বৃত্তের AB ও AC দুইটি সমান জ্যা। প্রমাণ কর যে, BAC কোণের সমদ্বিখণ্ডক কেন্দ্র দিয়া যাইবে। [C. U. '46]

11. কোন বৃত্তের PQ একটি নির্দিষ্ট জ্যা এবং AB যে কোন একটি ব্যাস। যদি PQ ও AB বৃত্তের অভ্যন্তরে পরস্পর ছেদ করে, তবে A ও B হইতে PQ-এর উপর অঙ্কিত লম্বদ্বয়ের অন্তর ধ্রুবক হইবে।

12. দুইটি সমান বৃত্ত কোন সরলরেখার উপর দুইটি সমান জ্যা ছিন্ন করিলে, ঐ সরলরেখাটি বৃত্তদ্বয়ের কেন্দ্রদ্বয় সংযোজক সরলরেখাকে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে বা উহার সমান্তরাল হইবে।

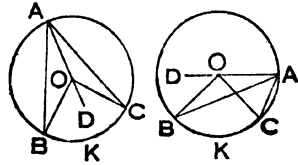
13. দুইটি জ্যা পরস্পর ছেদ করিয়াছে। যদি একটি জ্যা-এর অংশ অপর জ্যা-এর অনুরূপ অংশের সমান হয়, তবে জ্যা দুইটি সমান হইবে।

14. বৃত্তের দুইটি সমান জ্যা পরস্পর ছেদ করিলে একটির অংশদ্বয় যথাক্রমে অপরটির অংশদ্বয়ের সমান হইবে। [C. U. '35]

উপপাদ্য 41

বৃত্তের একই চাপের উপর অবস্থিত কেন্দ্রস্থ কোণ পরিধির অবশিষ্ট অংশের যে কোন বিন্দুস্থ কোণের দ্বিগুণ।

[*The angle which an arc of a circle subtends at the centre is double that which it subtends at any point on the remaining part of the circumference.*]

ABC বৃত্তের কেন্দ্র O; উহার BKC চাপের উপর অবস্থিত কেন্দ্রস্থ কোণ BOC এবং পরিধিস্থ কোণ BAC.

চিত্র নং 149

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\angle BOC = 2\angle BAC$.

অঙ্কন: AO যোগ করিয়া D পর্যন্ত বর্ধিত কর।

প্রমাণ: AOB ত্রিভুজের $OA = OB$ (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলিয়া),

$\therefore \quad \angle OAB = \angle OBA,$

$\therefore$ বহিঃস্থ $\angle BOD = \angle OAB + \angle OBA = 2\angle OAB \cdots (1)$

অনুরূপে $\angle COD = 2\angle OAC \cdots (2)$

অতএব, প্রথম চিত্রে (1) ও (2)এর সমষ্টি হইতে পাওয়া গেল,

$\angle BOC = 2(\angle OAB + \angle OAC) = 2\angle BAC.$

আর, দ্বিতীয় চিত্রে (2) ও (1)এর অন্তর হইতে পাওয়া গেল,

$\angle COD - \angle BOD = 2(\angle OAC - \angle OAB)$

অর্থাৎ $\angle BOC = 2\angle BAC.$

অনুসিদ্ধান্ত: বৃত্তের একই বা সমান সমান চাপের উপর অবস্থিত পরিধিস্থ কোণগুলি সমান।

উপপাদ্য 42

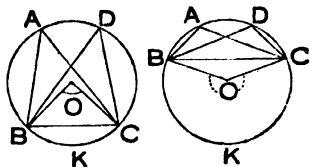
একই বৃত্তাংশস্থ যাবতীয় কোণ পরস্পর সমান।

[*Angles in the same segment of a circle are equal.*]

একটি বৃত্তের কেন্দ্র O এবং উহার BCDAB বৃত্তাংশস্থ BAC ও BDC যে কোন দুইটি কোণ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, ∠BAC = ∠BDC.

চিত্র নং 149

OB, OC যোগ কর।

প্রমাণঃ ∵ একই BKC চাপের উপর অবস্থিত ∠BOC কেন্দ্রস্থ কোণ এবং ∠BAC পরিধিস্থ কোণ, ∴ ∠BOC = 2 ∠BAC.

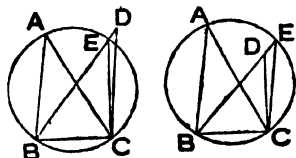
অনুরূপে, ∠BOC = 2 ∠BDC. ∴ ∠BAC = ∠BDC.

উপপাদ্য 43

যদি দুইটি বিন্দুর সংযোজক সরলরেখা উহার একই পার্শ্বে অপর দুইটি বিন্দুতে সমান সম্মুখকোণ উৎপন্ন করে, তবে ঐ বিন্দু চারিটি একই বৃত্তস্থ হইবে।

[*If the straight line joining two points subtends equal angles at two other points on the same side of it, the four points lie on a circle.*]

B ও C বিন্দু দুইটির সংযোজক BC সরলরেখা উহার একই পার্শ্বে A ও D বিন্দুতে BAC ও BDC দুইটি সমান সম্মুখকোণ উৎপন্ন করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, A, B, C ও D বিন্দু চারিটি একই বৃত্তস্থ।

চিত্র নং 150

প্রমাণঃ A, B, C বিন্দু দিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। ঐ বৃত্তটি যদি D বিন্দু দিয়া না যায়, তবে উহা BDকে বা বর্ধিত BDকে কোন এক বিন্দুতে ছেদ করিবে ; মনে কর, E বিন্দুতে ছেদ করিল। EC যোগ কর।

∵ ∠BAC ও ∠BEC একই বৃত্তাংশস্থ,

∴ ∠BAC = ∠BEC (উপ. 42),

কিন্তু ∠BAC = ∠BDC (স্বীকার),

∴ $\angle BEC = \angle BDC$; কিন্তু ইহা অসম্ভব, কারণ CD ও CE সমান্তরাল নহে এবং ত্রিভুজের বহিঃস্থ কোণ অন্তঃস্থ বিপরীত কোণের সমান হইতে পারে না।

∴ A, B, C বিন্দু দিয়া অঙ্কিত বৃত্তটি D বিন্দু দিয়া যাইবে।

অতএব, A, B, C ও D বিন্দু চারিটি একই বৃত্তস্থ।

[**দ্রষ্টব্য :** (i) এই উপপাদ্যটি উপপাদ্য 42-এর বিপরীত।

(ii) একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা উহার কোন পার্শ্বে একটি বিন্দুতে কোন নির্দিষ্ট সম্মুখকোণ উৎপন্ন করিলে, ঐ বিন্দুর সঞ্চারপথ হইবে এমন একটি বৃত্তচাপ ঐ সরলরেখা যাহার জ্যা।]

বিবিধ উদাহরণ 12

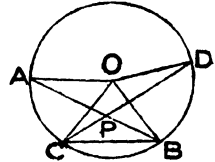
উদা. 1. O-কেন্দ্রীয় কোন বৃত্তের AB ও CD জ্যাদ্বয় P বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর যে, $\angle AOC + \angle BOD = 2\angle APC$.

[C. U. '38 ; W. B. S. F. '53]

প্রমাণ : BC যোগ কর। AC চাপের উপর কেন্দ্রস্থ $\angle AOC = 2\angle ABC$ (পরিধিস্থ)।

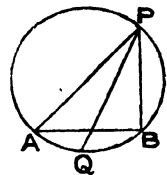
অনুরূপে $\angle BOD = 2\angle BCD$.

∴ $\angle AOC + \angle BOD = 2(\angle ABC + \angle BCD)$

$= 2(\angle PBC + \angle BCP) = 2\angle APC$

(∵ ΔBCPর বহিঃস্থ $\angle P = \angle PCB + \angle PBC$).

চিত্র নং 151

উদা. 2. একই বৃত্তাংশস্থ কোণগুলির সমদ্বিখণ্ডকসমূহ একটি সাধারণ বিন্দু দিয়া যাইবে। [C. U. '14, '51]

মনে কর, APB বৃত্তাংশস্থ APB যে-কোন একটি কোণ এবং উহার সমদ্বিখণ্ডক PQ বৃত্তটিকে Q বিন্দুতে ছেদ করিল। ∵ $\angle APQ = \angle BPQ$, ∴ চাপ AQ = চাপ BQ, ∴ Q বিন্দু অনুবন্ধী AB চাপের মধ্যবিন্দু হইল। অতএব, $\angle P$র সমদ্বিখণ্ডক AQB চাপের মধ্যবিন্দু দিয়া যাইবে। ইহা P কোণের ঐ বৃত্তাংশে যে-কোন অবস্থানেই সত্য। আবার, AB চাপ নির্দিষ্ট বলিয়া উহার মধ্যবিন্দু Q একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। সুতরাং APB বৃত্তাংশস্থ যে-কোন কোণের সমদ্বিখণ্ডক নির্দিষ্ট বিন্দু Q দিয়া যাইবে।

চিত্র নং 152

উদা. 3. ABC একটি বৃত্তস্থ ত্রিভুজের কোণগুলির সমদ্বিখণ্ডকত্রয় পরিধিকে X, Y, Z বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে, XYZ ত্রিভুজের কোণগুলি যথাক্রমে $90°-\frac{A}{2}$, $90°-\frac{B}{2}$ ও $90°-\frac{C}{2}$ হইবে। [C. U. '39 Supl.]

$\triangle ABC$ বৃত্তস্থ এবং $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$এর সমদ্বিখণ্ডক AX, BY, CZ বৃত্তকে X, Y, Z বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। XY, YZ, ZX যোগ কর।

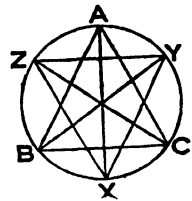
প্রমাণ করিতে হইবে, $\angle X=90°-\frac{1}{2}\angle A$, $\angle Y=90°-\frac{1}{2}\angle B$, $\angle Z=90°-\frac{1}{2}\angle C$.

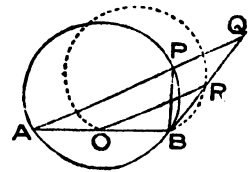
চিত্র নং 153

প্রমাণ : একই AY চাপের উপর $\angle AXY=\angle ABY=\frac{1}{2}\angle B$. একই AZ চাপের উপর $\angle AXZ=\angle ACZ=\frac{1}{2}\angle C$.

$\therefore$ সমগ্র $\angle X=\frac{1}{2}\angle B+\frac{1}{2}\angle C$. $\triangle ABC$র $\frac{1}{2}\angle A+\frac{1}{2}\angle B+\frac{1}{2}\angle C=90°$,

$\therefore$ $\frac{1}{2}\angle B+\frac{1}{2}\angle C=90°-\frac{1}{2}\angle A$, $\therefore$ $\angle X=90°-\frac{1}{2}\angle A$.

অনুরূপে প্রমাণ করা যায়, $\angle Y=90°-\frac{1}{2}\angle B$ এবং $\angle Z=90°-\frac{1}{2}\angle C$.

উদা. 4. কোন বৃত্তের AB জ্যার এক পার্শ্বের চাপের উপর P যে-কোন একটি বিন্দু। APকে Q পর্যন্ত এরূপে বর্ধিত করা হইল যেন PQ ও PB সমান হয়। BQএর মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। [C. U. '35]

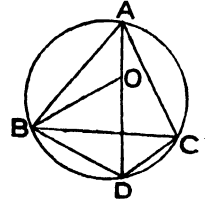
AB নির্দিষ্ট জ্যা, APB চাপে P কোন একটি বিন্দু। APকে Q পর্যন্ত বর্ধিত কর যেন $PQ=PB$ হয়। BQ যোগ কর এবং উহার মধ্যবিন্দু R লও। R-এর সঞ্চারপথ নির্ণয় করিতে হইবে।

চিত্র নং 154

মনে কর, ABর মধ্যবিন্দু O. OR যোগ কর। এক্ষণে, $\because$ $\angle PBQ=\angle PQB$,

$\therefore$ $\angle APB=\angle PBQ+\angle PQB=2\angle PQB$. $\because$ O, R যথাক্রমে AB, BQএর মধ্যবিন্দু, $\therefore$ OR $\parallel$ AQ ; $\therefore$ $\angle ORB=$ অনুরূপ $\angle AQB=\frac{1}{2}\angle APB$. $\because$ AB নির্দিষ্ট, $\therefore$ OB (অর্থাৎ $\frac{1}{2}$AB) নির্দিষ্ট। আবার, $\because$ APB চাপের উপর Pর যে কোন অবস্থানে $\angle APB$ ধ্রুবক, $\therefore$ $\angle ORB=\frac{1}{2}\angle APB=$ ধ্রুবক। সুতরাং R বিন্দুতে OBর সম্মুখ-কোণ ধ্রুবক।

∴ OBর উপর $\frac{1}{2}\angle P$ ধারণক্ষম বৃত্তাংশের ORB চাপই R-এর নির্ণেয় সঞ্চারপথ।

উদা. 5. ABC একটি বৃত্তস্থ সমবাহু ত্রিভুজ। যদি A বিন্দুর বিপরীত পার্শ্বে BC চাপের উপর P যে কোন একটি বিন্দু হয়, তবে প্রমাণ কর যে, AP=BP+CP. [C. U. '29]

△ABC বৃত্তস্থ সমবাহু ত্রিভুজ। BC চাপের উপর P যে-কোন একটি বিন্দু। প্রমাণ করিতে হইবে AP=PB+PC. AP হইতে PCর সমান AO কাটিয়া লও। BO, BP ও CP যোগ কর।

চিত্র নং 155

প্রমাণ: △ABO ও △BPC-র AO=PC, AB=BC এবং ∠BAO=∠BCP (একই চাপের উপর পরিধিস্থ কোণ বলিয়া), ∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

∴ BO=BP.

∴ ∠BOP=∠BPO=∠ACB (একই চাপের উপর পরিধিস্থ কোণ)
=60°. ∴ ∠OBP=60°=∠BOP, ∴ BP=PO.

অতএব, AP=PO+AO=BP+PC.

প্রশ্নমালা 20

1. দুইটি বৃত্ত A ও B বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে এবং A বিন্দু দিয়া দুইটি পরিধি পর্যন্ত PAQ সরলরেখা টানা হইয়াছে। প্রমাণ কর যে, ∠PBQ ধ্রুবক।

2. কোন বৃত্তের AB একটি জ্যা এবং P উহার চাপের উপর একটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে, ABP ও BAP কোণদ্বয়ের সমষ্টি ধ্রুবক।

3. দুইটি সমান্তরাল জ্যা-এর মধ্যবর্তী চাপ দুইটি সমান।

4. দুইটি জ্যা বৃত্তের ভিতরে পরস্পর ছেদ করিলে উহাদের অন্তর্ভূত কোণ উহাদের মধ্যবর্তী চাপ দুইটির সমষ্টির সমান চাপের উপর অবস্থিত পরিধিস্থ কোণের সমান হইবে।

5. একটি ত্রিভুজের ভূমি ও শীর্ষকোণ দেওয়া আছে। ঐ শীর্ষবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। [C. U. '11]

6. কোন বৃত্তের PM চাপের উপর L একটি বিন্দু এবং LPM ও LMP কোণ দুইটির সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। O বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। [C. U. '34, '42]

7. একটি ত্রিভুজের ভূমি ও ভূমিসংলগ্ন কোণদ্বয়ের সমষ্টি দেওয়া আছে। উহার শীর্ষবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

8. কোন বৃত্তের AB ও CD দুইটি সমান্তরাল জ্যা এবং AD ও BC বৃত্তের ভিতরে O বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর যে, AO = BO.

9. কোন বৃত্তের কেন্দ্র O এবং AB ও CD দুইটি জ্যা বৃত্তের বহিঃস্থ E বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর যে, AOC ও BOD কোণদ্বয়ের অন্তর AEC কোণের দ্বিগুণ।

10. দুইটি বৃত্ত A ও B বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিয়াছে এবং প্রত্যেক বৃত্ত অপরটির কেন্দ্র দিয়া গিয়াছে। A বিন্দু দিয়া বৃত্তদ্বয়ের পরিধি পর্যন্ত PAQ সরলরেখা টানা হইল। প্রমাণ কর যে, ΔPBQ সমবাহু।

11. ABC একটি বৃত্তস্থ ত্রিভুজ এবং উহার কোণগুলির সমদ্বিখণ্ডকত্রয় পরিধিকে X, Y, Z বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর যে, AX, YZএর উপর লম্ব। [B. U. 1920]

(চিত্র আঁক) মনে কর, AX, YZকে P বিন্দুতে ছেদ করিল।

$\therefore \quad \angle AXY + \angle Y = \angle AXY + \angle BYX + \angle BYZ =$

$\angle ABY + \angle BAX + \angle BCZ = \frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = 1$ সমকোণ, অর্থাৎ ΔPYXএর

$\angle YXP + \angle PYX = 1$ সমকোণ, $\therefore \quad \angle P = 1$ সমকোণ। $\therefore \quad AX \perp YZ.$

12. কোন বৃত্তে AB একটি নির্দিষ্ট জ্যা এবং APB ঐ বৃত্তস্থ একটি ত্রিভুজ। A ও B হইতে যথাক্রমে PB ও PA বাহুর উপর লম্বদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করিল। O বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

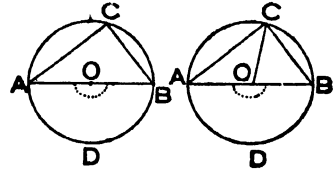
13. একই ভূমির উপর অবস্থিত এবং সমান শীর্ষকোণবিশিষ্ট ত্রিভুজগুলির মধ্যে সমদ্বিবাহু ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল বৃহত্তম হইবে। [C. U. '41]

14. দুইটি বৃত্ত P ও Q বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। P বিন্দু দিয়া বৃত্তদ্বয়ের পরিধি পর্যন্ত APB ও CPD সরলরেখা টানা হইয়াছে। প্রমাণ কর যে, AC ও BD চাপ দুইটি Q বিন্দুতে সমান সম্মুখকোণ উৎপন্ন করিবে।

উপপাদ্য 44

অর্ধবৃত্তস্থ কোণ সমকোণ।

[*The angle in a semi-circle is a right angle.*]

ADBC একটি বৃত্ত, উহার কেন্দ্র O, AB উহার একটি ব্যাস এবং ∠ACB অর্ধবৃত্তস্থ যে কোন একটি কোণ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

∠ACB = এক সমকোণ।

চিত্র নং 156

প্রমাণ: একই ADB চাপের উপর ∠ACB পরিধিস্থ এবং ∠AOB কেন্দ্রস্থ,

∴ $\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB$;

কিন্তু ∠AOB একটি সরল কোণ বলিয়া দুই সমকোণের সমান,

∴ ∠ACB = এক সমকোণ।

[**অন্য প্রকার প্রমাণ**] OC যোগ কর।

∵ OA = OC (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ), ∴ ∠OAC = ∠OCA

এবং ∵ OB = OC (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ), ∴ ∠OBC = ∠OCB.

∴ সমগ্র ∠ACB = ∠OAC + ∠OBC ;

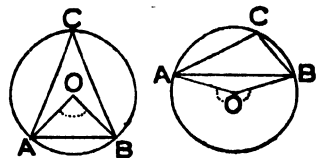
কিন্তু ∠ACB + ∠OAC + ∠OBC = দুই সমকোণ,

∴ 2∠ACB = দুই সমকোণ, ∴ ∠ACB = এক সমকোণ।

উপপাদ্য 45

অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা বৃহত্তর বৃত্তাংশস্থ কোণ এক সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর এবং অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর বৃত্তাংশস্থ কোণ এক সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর।

[*The angle in a segment greater than a semi-circle is less than a right angle and the angle in a segment less than a semi-circle is greater than a right angle.*]

ABC বৃত্তের কেন্দ্র O এবং প্রথম চিত্রে ACB বৃত্তাংশটি অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা বৃহত্তর।

চিত্র নং 157

প্রমাণ করিতে হইবে যে, ∠ACB এক সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

OA, OB যোগ কর।

প্রমাণ : AB চাপের উপর অবস্থিত পরিধিস্থ $\angle ACB = \frac{1}{2}$ কেন্দ্রস্থ $\angle AOB$;

কিন্তু $\angle AOB$ দুই সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর,

$\therefore$ $\angle ACB$ এক সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

আবার, দ্বিতীয় চিত্রে ACB বৃত্তাংশটি অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\angle ACB$ এক সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর।

AO, OB যোগ কর।

প্রমাণ : একই AB চাপের উপর অবস্থিত বলিয়া

পরিধিস্থ $\angle ACB = \frac{1}{2}$ কেন্দ্রস্থ প্রবৃদ্ধ $\angle AOB$;

কিন্তু প্রবৃদ্ধ $\angle AOB$ দুই সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর,

$\therefore$ $\angle ACB$ এক সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর।

বিবিধ উদাহরণ 13

উদা. 1. কোন একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে অন্য একটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী সরলরেখার উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। [C. U. '22]

মনে কর, P ও Q দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং P বিন্দু দিয়া যে কোন রেখা PR টানা হইয়াছে। Q বিন্দু হইতে $QO \perp PR$ টানা হইল। O বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় করিতে হইবে। PQ যোগ কর। P, Q নির্দিষ্ট বিন্দু বলিয়া QP একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা এবং O বিন্দুতে উহার সম্মুখ-কোণ এক সমকোণ হইতেছে। ইহা PR-এর সকল অবস্থানেই সত্য।

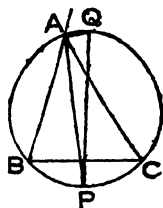
$\therefore$ PQকে ব্যাস করিয়া অঙ্কিত বৃত্তই নির্ণেয় সঞ্চারপথ।

উদা. 2. একটি ত্রিভুজের একটি কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক ও বহির্দ্বিখণ্ডক দুইটি ত্রিভুজটির পরিবৃত্তকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে, PQ ঐ বৃত্তের একটি ব্যাস।

মনে কর, $\triangle ABC$ বৃত্তস্থ এবং AP ও AQ যথাক্রমে $\angle A$-র অন্তর্দ্বিখণ্ডক ও বহির্দ্বিখণ্ডক।

প্রমাণ করিতে হইবে, PQ বৃত্তের একটি ব্যাস।

প্রমাণ : PQ যোগ কর। $\because$ AP ও AQ একই $\angle A$-র অন্তর্দ্বিখণ্ডক ও বহির্দ্বিখণ্ডক, $\therefore$ $\angle PAQ$ এক সমকোণ, সুতরাং উহা অর্ধবৃত্তস্থ কোণ।

$\therefore$ PQ একটি ব্যাস।

চিত্র নং 158

প্রশ্নমালা 21

1. কোন সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজকে ব্যাস করিয়া অঙ্কিত বৃত্ত উহার বিপরীত কৌণিক বিন্দু দিয়া যাইবে। [C. U. '27]

2. যদি দুইটি বৃত্ত পরস্পর A ও B বিন্দুতে ছেদ করে এবং A বিন্দু হইতে বৃত্ত দুইটিতে AP ও AQ দুইটি ব্যাস অঙ্কিত করা হয়, তবে P, B ও Q বিন্দু তিনটি একরেখীয় হইবে।

3. রম্বসের বাহুগুলিকে ব্যাস করিয়া বৃত্ত অঙ্কিত করিলে উহারা একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যাইবে।

4. দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী দুইটি সরলরেখা পরস্পর সমকোণে ছেদ করিয়াছে। ঐ ছেদবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

5. সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান বাহুদ্বয়ের একটিকে ব্যাস করিয়া অঙ্কিত বৃত্ত ভূমির মধ্যবিন্দু দিয়া যাইবে।

6. ত্রিভুজের যে কোন দুইটি বাহুকে ব্যাস করিয়া অঙ্কিত বৃত্তদ্বয় উহার তৃতীয় বাহুকে বা বর্ধিত তৃতীয় বাহুকে একই বিন্দুতে ছেদ করে।

7. একটি বৃত্তের অন্তঃস্থ, বহিঃস্থ বা পরিধিস্থ কোন নির্দিষ্ট বিন্দুগামী জ্যা-সমূহের মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

8. কোন বৃত্তের AB ব্যাস CD জ্যার উপর লম্ব। যদি P, বৃত্তের পরিধিস্থ একটি বিন্দু হয়, তবে প্রমাণ কর যে, AP ও BP যথাক্রমে CPD কোণের অন্তঃসমদ্বিখণ্ডক ও বহিঃসমদ্বিখণ্ডক হইবে।

উপপাদ্য 46

বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টি দুই সমকোণ।

[*The opposite angles of a cyclic quadrilateral are supplementary.*]

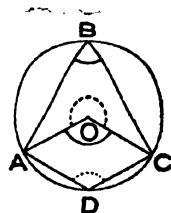
ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ এবং ঐ বৃত্তটির কেন্দ্র O.

চিত্র নং 159

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$\angle ABC + \angle ADC = 2$ সমকোণ,

এবং $\angle BAD + \angle BCD = 2$ সমকোণ।

OA, OC যোগ কর।

প্রমাণ : একই ADC চাপের উপর অবস্থিত ∠AOC কেন্দ্রস্থ ও ∠ABC পরিধিস্থ, ∴ $\angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC$.

আবার, একই ABC চাপের উপর প্রবৃদ্ধ ∠AOC কেন্দ্রস্থ এবং ∠ADC পরিধিস্থ,

∴ ∠ADC $= \frac{1}{2}$ প্রবৃদ্ধ ∠AOC.

∴ ∠ABC + ∠ADC $= \frac{1}{2}$ (∠AOC + প্রবৃদ্ধ ∠AOC)

$= \frac{1}{2} \times$ চারি সমকোণ = 2 সমকোণ।

অনুরূপে OB ও OD যোগ করিয়া প্রমাণ করা যায় যে,

∠BAD + ∠BCD = 2 সমকোণ।

উপপাদ্য 47

কোন চতুর্ভুজের দুইটি বিপরীত কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ হইলে উহা একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ হইবে।

[*If a pair of opposite angles of a quadrilateral be supplementary, the quadrilateral is cyclic.*]

ABCD চতুর্ভুজের ∠B + ∠D = দুই সমকোণ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, ঐ চতুর্ভুজটি বৃত্তস্থ।

চিত্র নং 160

প্রমাণ : A, B ও C বিন্দু দিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। ঐ বৃত্তটি যদি D বিন্দু দিয়া না যায়, তবে উহা ADকে বা বর্ধিত ADকে কোন একটি বিন্দুতে ছেদ করিবে ; মনে কর, E বিন্দুতে ছেদ করিল। EC যোগ কর।

এক্ষণে, ∵ ABCE একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ,

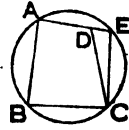
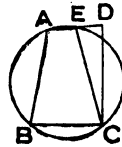
∴ ∠ABC + ∠AEC = 2 সমকোণ (উপ. 46) ;

কিন্তু ∠ABC + ∠ADC = 2 সমকোণ (স্বীকার),

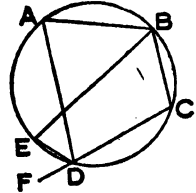
∴ ∠ABC + ∠AEC = ∠ABC + ∠ADC,

∴ ∠AEC = ∠ADC, কিন্তু ইহা অসম্ভব ; কারণ, CED ত্রিভুজের বহিঃস্থ কোণ অন্তঃস্থ বিপরীত কোণের সমান হইতে পারে না।

∴ A, B ও C বিন্দু দিয়া অঙ্কিত বৃত্তটি D বিন্দু দিয়াও যাইবে।

∴ ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

বিবিধ উদাহরণ 14

উদা. 1. প্রমাণ কর যে, একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের কোন একটি কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক এবং উহার বিপরীত কোণের বহির্দ্বিখণ্ডক বৃত্তের পরিধির উপর পরস্পর ছেদ করে। [C. U. '24 ; D. B. '36 ; B. U.]

ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ। প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\angle B$-র অন্তর্দ্বিখণ্ডক এবং $\angle D$-র বহির্দ্বিখণ্ডক ঐ বৃত্তের পরিধির উপর কোন একটি বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিবে। মনে কর, $\angle B$-র অন্তর্দ্বিখণ্ডক BE পরিধিকে E বিন্দুতে ছেদ করিল। ED যোগ কর এবং CDকে F পর্যন্ত বর্ধিত কর।

চিত্র নং 161

প্রমাণ : $\because$ EBCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ, $\therefore$ $\angle FDE$ = বিপরীত অন্তঃ $\angle EBC$. আবার, $\angle EDA = \angle ABE$ (একই চাপের উপর পরিধিস্থ কোণ বলিয়া)

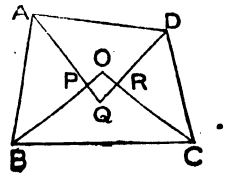
$\because$ $\angle ABE = \angle CBE$ (স্বীকার),

$\therefore$ $\angle ADE = \angle EDF$. $\therefore$ ED, $\angle ADF$-এর সমদ্বিখণ্ডক অর্থাৎ ED, $\angle ADC$র বহির্দ্বিখণ্ডক। অতএব $\angle B$-র অন্তর্দ্বিখণ্ডক ও $\angle D$-র বহির্দ্বিখণ্ডক পরিধির উপর E বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

উদা. 2. চতুর্ভুজের কোণ চারিটির সমদ্বিখণ্ডকগুলি একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ উৎপন্ন করে। [C. U. 1925]

ABCD চতুর্ভুজের কোণগুলির অন্তর্দ্বিখণ্ডকগুলি OPQR চতুর্ভুজ উৎপন্ন করিয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে OPQR একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

চিত্র নং 162

প্রমাণ : $\triangle OBC$এ $\angle O + \frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle C$ = 2 সমকোণ।

$\triangle QAD$এ $\angle Q + \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle D = 2$ সমকোণ।

$\therefore$ $\angle O + \angle Q + \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle C + \frac{1}{2}\angle D = 4$ সমকোণ।

কিন্তু $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 4$ সমকোণ,

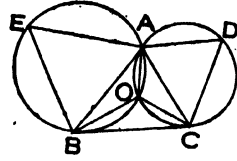
$\therefore$ $\frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle C + \frac{1}{2}\angle D = 2$ সমকোণ।

$\therefore$ $\angle O + \angle Q = 2$ সমকোণ, $\therefore$ OPQR চতুর্ভুজটি বৃত্তস্থ।

উদা. 3. একটি ত্রিভুজের মধ্যে এরূপ একটি বিন্দু নির্ণয় কর যেন সেই বিন্দুতে ত্রিভুজের বাহুগুলির সম্মুখকোণ তিনটি সমান হয়।

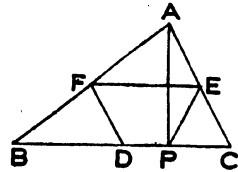
$\triangle$ABCর মধ্যে এমন একটি বিন্দু নির্ণয় করিতে হইবে যেন ঐ বিন্দুতে AB, AC ও BCর সম্মুখ কোণগুলি সমান হয়।

চিত্র নং 163

AB ও ACর উপর ABE ও ACD দুইটি সমবাহু ত্রিভুজ আঁক। $\triangle$ABE ও $\triangle$ACDর দুইটি পরিবৃত্ত আঁক। মনে কর, উহারা ত্রিভুজের মধ্যে O বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিল। উহাই নির্ণেয় বিন্দু।

প্রমাণ : AO, BO, CO যোগ কর। $\because$ ADCO একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ,
$\therefore$ $\angle AOC+\angle D=180^\circ$; কিন্তু $\angle D=60^\circ$ (সমবাহু ত্রিভুজের কোণ বলিয়া), $\therefore$ $\angle AOC=120^\circ$. অনুরূপে, $\angle AOB=120^\circ$.
$\because$ O বিন্দুস্থ কোণ তিনটি $=4$ সমকোণ $=360^\circ$, $\therefore$ অবশিষ্ট $\angle BOC=120^\circ$.
$\therefore$ O বিন্দুতে AB, BC, CA বাহুর সম্মুখ কোণগুলি সমান।

উদা. 4. D, E, F কোন ত্রিভুজের বাহু তিনটির মধ্যবিন্দু এবং উহার কোন শীর্ষবিন্দু হইতে বিপরীত বাহুর উপর লম্বের পাদবিন্দু P হইলে, P, D, E ও F একই বৃত্তস্থ হইবে। [C. U. '43 ; D. B. '27, '29. '37]

চিত্র নং 164

প্রমাণ : EF, FD, EP যোগ কর।
$\because$ $\triangle$APC সমকোণী এবং অতিভুজ ACর মধ্যবিন্দু E, $\therefore$ $EP=\frac{1}{2}AC=EC$,
$\therefore$ $\angle EPC=\angle ECP$.
এখন AB ও ACর মধ্যবিন্দু সংযোজক রেখা FE ∥ DC. অনুরূপে FD ∥ EC.
$\therefore$ DCEF একটি সামান্তরিক, $\therefore$ $\angle EPC=\angle C=\angle DFE$.
$\because$ $\angle EPD+\angle EPC=2$ সমকোণ, $\therefore$ $\angle EPD+\angle EFD=2$ সমকোণ
$\therefore$ P, D, E, F বিন্দুগুলি একই বৃত্তস্থ।

প্রশ্নমালা 22

1. বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের একটি বাহু বর্ধিত হইলে উৎপন্ন বহিঃকোণ চতুর্ভুজের বিপরীত অন্তঃকোণের সমান হইবে।

2. কোন চতুর্ভুজের একটি বাহুকে বর্ধিত করিলে উৎপন্ন বহিঃকোণটি যদি বিপরীত অন্তঃকোণের সমান হয়, তবে চতুর্ভুজটি বৃত্তস্থ হইবে।

3. বৃত্তের অন্তর্লিখিত কোন ত্রিভুজের বহিঃস্থ বৃত্তাংশ তিনটিতে অবস্থিত কোণত্রয়ের সমষ্টি চারি সমকোণ।

4. ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বর্ধিত AB ও DC বাহু E বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে, EBC ও EAD ত্রিভুজের কোণগুলি পরস্পর সমান।

[G. U. '49]

5. কোন সামান্তরিকের একটি পরিবৃত্ত অঙ্কন করা সম্ভব হইলে, সামান্তরিকটি একটি আয়তক্ষেত্র হইবে। [C. U. '20 ; D. B. '42]

6. ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ এবং BC ভূমির সমান্তরাল XY সরলরেখা উহার অপর বাহুদ্বয়কে X ও Y বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর যে B, C, X ও Y একই বৃত্তস্থ। [C. U. '48 ; A. U. '31]

7. দুইটি বৃত্তের ছেদবিন্দুদ্বয়ের মধ্য দিয়া দুইটি সরলরেখা টানায় উহারা একটি বৃত্তকে A ও B বিন্দুতে এবং অন্যটিকে C ও D বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে, AB ∥ CD. [C. U. '11 ; M. U.]

8. দুইটি বৃত্তের ছেদবিন্দু দুইটি দিয়া উহাদের পরিধি পর্যন্ত দুইটি সমান্তরাল সরলরেখা টানা হইল। প্রমাণ কর যে, ঐ সরলরেখাদ্বয় সমান।

9. ABCD চতুর্ভুজের দুইটি বিপরীত কোণ পরস্পর সম্পূরক এবং AC দ্বারা BAD কোণ সমদ্বিখণ্ডিত। প্রমাণ কর যে, BC ও CD সমান।

[D. B. '30]

10. কোন বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের দুইটি বিপরীত কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় বৃত্তকে ছেদ করিলে ঐ ছেদবিন্দুদ্বয় সংযোজক সরলরেখাটি বৃত্তের ব্যাস হইবে।

11. বৃত্তস্থ ট্রাপিজিয়মের তির্যক বাহুদ্বয় সমান। [C. U. '52]

*12. একটি ত্রিভুজের বহির্ভাগে বাহুগুলির উপর তিনটি সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত করা হইল। প্রমাণ কর যে, সমবাহু ত্রিভুজ তিনটির পরিবৃত্তগুলি একটি বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিবে। [C. U. '25]

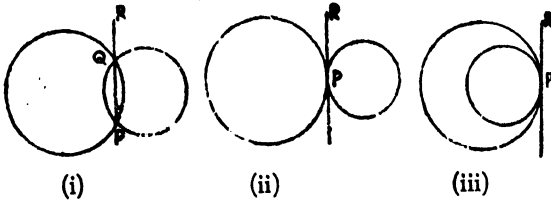
13. একটি চতুর্ভুজ বৃত্তস্থ হইলে উহার বাহিরের চারিটি বৃত্তাংশস্থিত কোণ চারিটির সমষ্টি ছয় সমকোণ হইবে। [C. U. 1887]

14. ABCD সামান্তরিকের A ও B বিন্দু দিয়া অঙ্কিত বৃত্ত AD ও BCকে যথাক্রমে E ও F বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে C, D, E, F একই বৃত্তস্থ।

[B. U. '26]

15. কোন বৃত্তের যে সকল জ্যা একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যায় তাহাদের মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

একাদশ অধ্যায়

26. স্পর্শক (Tangent)

চিত্র নং 165

দুইটি বৃত্ত, দুই-এর অধিক বিন্দুতে ছেদ করিতে পারে না। মনে কর, চিত্র (i)-এ দুইটি বৃত্ত P ও Q বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। এখন যদি প্রথম বৃত্তকে এবং P বিন্দুকে স্থির রাখিয়া অপর বৃত্তটিকে ঘড়ির কাঁটার গতি অভিমুখে একটু একটু করিয়া ঘুরান হয়, তবে Q বিন্দু ক্রমশঃ P বিন্দুর নিকটতর হইতে থাকিবে। এইরূপে একটি অবস্থানে Q বিন্দু P বিন্দুর সহিত মিলিয়া যাইবে। তখন বৃত্ত দুইটি পরস্পর **স্পর্শ** (touch) করিয়াছে বলা হয়। এস্থলে বৃত্ত দুইটি পরস্পর বাহিরে থাকিয়া স্পর্শ করায় উহারা **বহিঃস্পর্শ** করিয়াছে (touch externally) বলা হয়। [চিত্র (ii) দেখ।]

আবার, যদি (i)-এর দ্বিতীয় বৃত্তটিকে ঘড়ির কাঁটার গতির বিপরীত দিকে একটু একটু করিয়া ঘুরান হয়, তখনও একটি অবস্থানে Q বিন্দু P বিন্দুর সহিত মিলিত হইবে এবং তখন উহারা পরস্পর অন্তঃস্পর্শ করিয়াছে (touch internally) বলা হয়। [চিত্র (iii) দেখ।]

বৃত্ত দুইটির ছেদবিন্দু দিয়া PQR সরলরেখা টানা হইয়াছে। দ্বিতীয় বৃত্তটি ক্রমশঃ ঘুরিলে যখন Q বিন্দু P বিন্দুর সহিত মিলিত হইল, তখন PQR-এর দুইটি ছেদবিন্দু একটিতে (P) পরিণত হইয়াছে এবং RP সরলরেখাটি উভয় বৃত্তের সহিত কেবল একটিমাত্র বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। এস্থলে RP সরলরেখাকে উভয় বৃত্তের সাধারণ **স্পর্শক** বলে।

স্পর্শক : যদি একটি সরলরেখা একটি বৃত্তের সহিত কেবল একটি মাত্র বিন্দুতে মিলিত হয় এবং উহাকে উভয়দিকে বর্ধিত করিলেও বৃত্তটিকে আর কোন বিন্দুতে ছেদ না করে, তবে ঐ সরলরেখাকে ঐ বৃত্তের **স্পর্শক** বলে। আর, যে বিন্দুতে উহারা মিলিত হইয়াছে ঐ বিন্দুকে **স্পর্শবিন্দু** (**Point of contact**) বলে।

স্পর্শবিন্দু ব্যতীত স্পর্শকের উপরিস্থিত অপর যে কোন বিন্দুই বৃত্তের বহিঃস্থ হইবে।

যে সরলরেখা দুইটি বৃত্তেরই স্পর্শক তাহাকে বৃত্তদ্বয়ের **সাধারণ স্পর্শক** বলে।

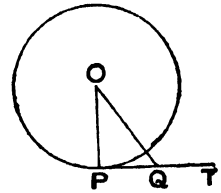
দুইটি বৃত্তের কোন এক বিন্দুতে সাধারণ স্পর্শক থাকিলে ঐ বৃত্ত দুইটি ঐ বিন্দুতে পরস্পর স্পর্শ করিয়াছে বলা হয়।

উপপাদ্য 48

বৃত্তের যে কোন স্পর্শক এবং স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ পরস্পরের উপর লম্ব।

[*The tangent at any point of a circle and the radius through the point are perpendicular to each other.*]

একটি বৃত্তের কেন্দ্র O, উহার P বিন্দুতে PT স্পর্শক এবং OP স্পর্শবিন্দু দিয়া অঙ্কিত ব্যাসার্ধ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, PT ও OP পরস্পরের উপর লম্ব।

চিত্র নং 166

প্রমাণ : PT-র উপর যে কোন বিন্দু Q লও এবং OQ যোগ কর।

বৃত্তটির P বিন্দুতে PT সরলরেখা স্পর্শক বলিয়া PT সরলরেখার P বিন্দু ব্যতীত অপর সকল বিন্দুই বৃত্তের বহিঃস্থ। ∴ Q পরিধির বহিঃস্থ বিন্দু।

∴ ব্যাসার্ধ $OP < OQ$, এবং PT-র উপর P ব্যতীত Q বিন্দুর যে কোন অবস্থানে ইহা সত্য।

∴ O হইতে PT-র উপর অঙ্কিত যাবতীয় সরলরেখার মধ্যে OP-ই ক্ষুদ্রতম। ∴ OP, PT-র উপর লম্ব।

অতএব, PT ও OP পরস্পরের উপর লম্ব।

অনুসিদ্ধান্ত 1. বৃত্তের কোন ব্যাসার্ধ পরিধির সহিত যে বিন্দুতে মিলিত হয় সেই বিন্দুতে উহার উপর লম্ব টানিলে ঐ লম্বটি ঐ বিন্দুতে বৃত্তটির একটি স্পর্শক হইবে।

অনুসিদ্ধান্ত 2. বৃত্তের পরিধিস্থ কোন বিন্দুতে একটিমাত্র স্পর্শক অঙ্কন করা যায়।

[কারণ, ঐ বিন্দুতে ঐ বিন্দুগামী ব্যাসার্ধের উপর একটিমাত্র লম্ব টানা যায়।]

অনুসিদ্ধান্ত 3. স্পর্শবিন্দুতে স্পর্শকের উপর অঙ্কিত লম্বটি বৃত্তের কেন্দ্র দিয়া যাইবে।

[কারণ, স্পর্শবিন্দু হইতে অঙ্কিত ব্যাসার্ধটি স্পর্শকের উপর লম্ব এবং একটি সরলরেখার উপর একটি বিন্দুতে কেবল একটি লম্ব হইতে পারে।]

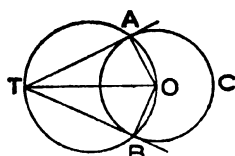
উপপাদ্য 49

বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে ঐ বৃত্তের দুইটি স্পর্শক অঙ্কিত করা যায়।

[*Two tangents can be drawn to a circle from an external point.*]

চিত্র নং 167

ABC বৃত্তের কেন্দ্র O এবং T বৃত্তের বহিঃস্থ একটি বিন্দু।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, T হইতে ABC বৃত্তের দুইটি স্পর্শক অঙ্কিত করা যায়।

অঙ্কন : TO যোগ কর এবং TOকে ব্যাস করিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। T বিন্দু বৃত্তের বহিঃস্থ এবং O বিন্দু বৃত্তের অন্তঃস্থ বলিয়া ঐ বৃত্তটি ABC বৃত্তকে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করিবে। মনে কর, A ও B দুইটি ছেদবিন্দু। OA, OB, TA ও TB যোগ কর।

প্রমাণ : ∵ $\angle OAT$ ও $\angle OBT$ প্রত্যেকে অর্ধবৃত্তস্থ কোণ,

∴ $\angle OAT$ ও $\angle OBT$ প্রত্যেকে সমকোণ।

∴ TA ও TB যথাক্রমে OA ও OB ব্যাসার্ধের উপর লম্ব,

∴ TA ও TB যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে দুইটি স্পর্শক।

অতএব, T বিন্দু হইতে ABC বৃত্তের দুইটি স্পর্শক অঙ্কিত করা যায়।

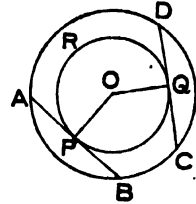
[**দ্রষ্টব্য :** (1) এই উপপাদ্যে বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে কোন বৃত্তের একটি বা দুইটি স্পর্শক অঙ্কন প্রণালী জানা গেল। (2) বৃত্তের অন্তঃস্থ কোন বিন্দু হইতে ঐ বৃত্তের কোন স্পর্শক অঙ্কন করা যায় না। (3) বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে ঐ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয়ের স্পর্শবিন্দুদ্বয় সংযোজক জ্যা-কে ঐ বিন্দুর **স্পর্শ-জ্যা** (chord of contact) বলে। উপরের চিত্রে AB যোগ করিলে উহাই স্পর্শ-জ্যা হইবে।]

বিবিধ উদাহরণ 15

উদা. 1. কোন বৃত্তের যে সকল জ্যা এককেন্দ্রীয় অন্য একটি বৃত্তকে স্পর্শ করে সেগুলি পরস্পর সমান এবং স্পর্শবিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইবে।

ABC ও PQR বৃত্তদ্বয়ের কেন্দ্র O এবং ABC বৃত্তের AB ও CD যে-কোন দুইটি জ্যা PQR বৃত্তকে P ও Q বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে।

চিত্র নং 168

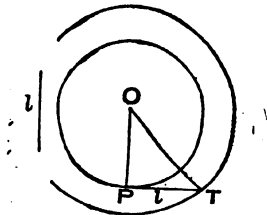
প্রমাণ করিতে হইবে যে, AB = CD এবং AB ও CD যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইয়াছে।

প্রমাণ : OP ও OQ যোগ কর। ∵ OP স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ, ∴ OP, AB-র উপর লম্ব। অনুরূপে OQ, CDর উপর লম্ব। আবার, OP = OQ (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ), ∴ AB ও CD কেন্দ্র O হইতে সমদূরবর্তী, ∴ AB = CD. আবার, OP ও OQ কেন্দ্র হইতে জ্যা AB ও CD-র উপর লম্ব বলিয়া ঐ জ্যাদ্বয় যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইয়াছে।

উদা. 2. যে গতিশীল বিন্দু হইতে কোন নির্দিষ্ট বৃত্তের উপর অঙ্কিত স্পর্শকগুলি একই নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের সমান, তাহার সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

[C. U. '22, '39 ; G. U. '49]

মনে কর, l প্রদত্ত দৈর্ঘ্য এবং O প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র এবং r ব্যাসার্ধ। T এমন একটি বিন্দু যাহা হইতে বৃত্তটিতে স্পর্শক আঁকিলে ঐ স্পর্শক l-এর সমান হয়। T বিন্দুটির সঞ্চারপথ নির্ণয় করিতে হইবে।

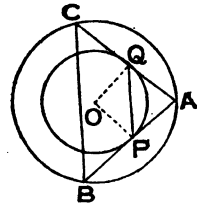
চিত্র নং 169

অঙ্কন : যে কোন ব্যাসার্ধ OP লও এবং P বিন্দুতে PT⊥OP টান।

PTকে l দৈর্ঘ্যের সমান কর। Oকে কেন্দ্র করিয়া OT ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্তই নির্ণেয় সঞ্চারপথ।

প্রমাণ : OT যোগ কর। OP ব্যাসার্ধের P বিন্দুতে PT লম্ব বলিয়া PT বৃত্তটির স্পর্শক। এক্ষণে, $OT^2 = OP^2 + PT^2$ (∵ ∠P সমকোণ) $= r^2 + l^2$, ∴ $OT = \sqrt{r^2 + l^2} =$ (ধ্রুবক)।

∴ কেন্দ্র O হইতে T বিন্দু সর্বদা সমদূরবর্তী। ∴ Oকে কেন্দ্র করিয়া OT (অর্থাৎ $\sqrt{r^2+l^2}$) ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্তই T বিন্দুর সঞ্চারপথ হইল।

উদা. 3. দুইটি এককেন্দ্রীয় বৃত্তের বৃহত্তরটির AB ও AC জ্যাদ্বয় অন্য বৃত্তটিকে P ও Q বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে। প্রমাণ কর যে PQ=½BC.

বৃত্ত দুইটির কেন্দ্র O এবং বৃহত্তর বৃত্তের AB ও AC জ্যাদ্বয় ক্ষুদ্রতর বৃত্তকে P ও Q বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে।

চিত্র নং 170

প্রমাণ করিতে হইবে, PQ=½BC.

BC, PQ, OP, OQ যোগ কর।

প্রমাণ: OP স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ বলিয়া OP⊥AB. অনুরূপে OQ⊥AC. ∴ P ও Q যথাক্রমে AB ও CD জ্যা-এর মধ্যবিন্দু হইল। ∴ PQ, ABC ত্রিভুজের ভূমি BC-র অর্ধেক।

প্রশ্নমালা 23

1. বৃত্তের পরিধির উপর কোন বিন্দুতে স্পর্শক অঙ্কিত কর।

2. বৃত্তের যে-কোন ব্যাসের প্রান্তবিন্দুদ্বয়ে অঙ্কিত স্পর্শক দুইটি সমান্তরাল।

3. যে সকল বৃত্ত কোন সরলরেখাকে একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করে তাহাদের কেন্দ্রের সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

4. একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার সহিত নির্দিষ্ট পরিমাণ কোণ করিয়া কোন বৃত্তের একটি স্পর্শক অঙ্কিত কর।

5. প্রমাণ কর যে, কোন বৃত্তের দুইটি সমান্তরাল স্পর্শকের স্পর্শবিন্দুদ্বয় সংযোজক সরলরেখাটি ঐ বৃত্তের ব্যাস। [W. B. S. F. '54]

6. বৃত্তের কোন স্পর্শকের সমান্তরাল জ্যাগুলি স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাস দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হয়। [C. U. '18]

7. কোন নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধের যে সকল বৃত্ত একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে স্পর্শ করে, তাহাদের কেন্দ্রের সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

8. কোন বৃত্তের ABC বৃত্তাংশস্থিত কোণ অর্ধসমকোণ। প্রমাণ কর যে, A ও C বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শক দুইটি পরস্পর লম্ব। [A. U. '34]

9. একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান্তরাল করিয়া কোন বৃত্তের স্পর্শক অঙ্কিত কর। [C. U. '32]

10. কোন বৃত্তের একটি স্পর্শকের সমান্তরাল জ্যাগুলির মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

11. AB কোন বৃত্তের একটি ব্যাস এবং A বিন্দুতে AC স্পর্শকটি AB-র সমান। CB সরলরেখা বৃত্তকে D বিন্দুতে ছেদ করিলে প্রমাণ কর যে D বিন্দুতে CB সমদ্বিখণ্ডিত এবং AD $= \frac{1}{2}$BC হইবে। [C. U.]

12. O কেন্দ্রীয় বৃত্তের AB একটি জ্যা এবং AP একটি স্পর্শক। প্রমাণ কর যে, $\angle$AOB $=2\angle$PAB.

13. কোন বৃত্তের এরূপ দুইটি স্পর্শক অঙ্কিত কর যেন তাহাদের অন্তর্ভূ্ত কোণ একটি নির্দিষ্ট কোণের সমান হয়।

14. একটি বৃত্তের কোন জ্যার দুই প্রান্তবিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয়ের অন্তর্ভূ্ত কোণটি ঐ জ্যা এবং উহার যে কোন প্রান্তগামী ব্যাসের অন্তর্ভূ্ত কোণের দ্বিগুণ হইবে।

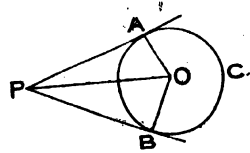
15. 3 সে. মি. ও 5. সে. মি. ব্যাসার্ধের দুইটি এককেন্দ্রীয় বৃত্তের বৃহত্তরটির একটি জ্যা ক্ষুদ্রতর বৃত্তের স্পর্শক হইলে ঐ জ্যার দৈর্ঘ্য কত? [উঃ 8 সে. মি.]

16. কোন বৃত্তের পরিধি সমান তিন অংশে বিভক্ত হইলে ছেদবিন্দু তিনটিতে অঙ্কিত স্পর্শক তিনটি একটি সমবাহু ত্রিভুজ উৎপন্ন করিবে। [C. U.]

উপপাদ্য 50

বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে কোন বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় পরস্পর সমান হয় এবং উহারা কেন্দ্রে দুইটি সমান সম্মুখকোণ উৎপন্ন করে।

[*The two tangents to a circle from an external point are equal and they subtend equal angles at the centre.*]

মনে কর, ABC বৃত্তের কেন্দ্র O, P ঐ বৃত্তের বহিঃস্থ একটি বিন্দু এবং P হইতে PA ও PB বৃত্তটির দুইটি স্পর্শক টানা হইয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, PA $=$ PB এবং $\angle$POA $=\angle$POB.

চিত্র নং 171

OP, OA, OB যোগ কর।

প্রমাণ : $\because$ PA ও PB বৃত্তটির স্পর্শক এবং OA ও OB স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ, $\therefore$ $\angle$OAP ও $\angle$OBP প্রত্যেকে সমকোণ [উপ. 44]।

এক্ষণে, OAP ও OBP সমকোণী ত্রিভুজের OA $=$ OB (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ) অতিভুজ OP সাধারণ বাহু, $\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

$\therefore$ PA $=$ PB এবং $\angle$POA $=\angle$POB.

অনুসিদ্ধান্ত : PO, স্পর্শকদ্বয়ের অন্তর্ভূ্ত কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

বিবিধ উদাহরণ 16

উদা. 1. কোন বৃত্তের দুইটি সমান্তরাল স্পর্শক উহার কোন তৃতীয় স্পর্শককে ছেদ করিলে, বৃত্তের কেন্দ্রে ঐ ছিন্ন অংশের সম্মুখকোণটি সমকোণ হইবে। [D. B. '29 ; B. U.]

চিত্র নং 172

AP ও BR দুইটি সমান্তরাল স্পর্শক বৃত্তটিকে A ও B বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে। ঐ বৃত্তের যে কোন তৃতীয় স্পর্শক PR বৃত্তকে T বিন্দুতে স্পর্শ এবং AP ও BRকে যথাক্রমে P ও R বিন্দুকে ছেদ করিল।

OP ও OR যোগ করা হইল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\angle POR$ এক সমকোণ।

OA, OB ও OT যোগ কর।

প্রমাণ : ΔPOA ও ΔPOT-র $\angle A = \angle T$ (সমকোণ), $OA = OT$ এবং অতিভুজ OP সাধারণ, $\therefore$ উহারা সর্বসম, $\therefore$ $\angle APO = \angle TPO$ অর্থাৎ $\angle OPT = \frac{1}{2}\angle APT$. অনুরূপে $\angle ORT = \frac{1}{2}\angle BRT$.

$\therefore$ $\angle OPR + \angle ORP = \frac{1}{2}$ ($\angle APR + \angle BRP$) $= \frac{1}{2} \times 2$ সমকোণ
$= 1$ সমকোণ। $\therefore$ $\angle POR$ সমকোণ।

উদা. 2. একটি বৃত্তের OA ও OB দুইটি নির্দিষ্ট স্পর্শক এবং উহার অন্য যে কোন একটি স্পর্শক OA ও OBকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর যে, বৃত্তটির কেন্দ্রে PQ-এর সম্মুখকোণ ধ্রুবক হইবে। [C. U. '23]

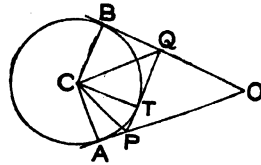
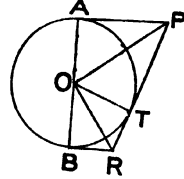
চিত্র নং 173

OA, OB বৃত্তের দুইটি নির্দিষ্ট স্পর্শক। PQ স্পর্শক OA ও OBকে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করিয়া বৃত্তকে T বিন্দুতে স্পর্শ করিল। কেন্দ্র C-এর সহিত P ও Q যোগ করা হইল। প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\angle PCQ$ ধ্রুবক। CB, CA ও CT যোগ কর।

প্রমাণ : $\because$ P বিন্দু হইতে AP ও PT স্পর্শক, $\therefore$ $\angle ACP = \angle TCP$, অর্থাৎ $\angle PCT = \frac{1}{2}\angle ACT$. অনুরূপে $\angle QCT = \frac{1}{2}\angle BCT$.

$\therefore$ সমগ্র $\angle PCQ = \frac{1}{2}(\angle ACT + \angle BCT) = \frac{1}{2}\angle ACB$.

এখন $\because$ OA, OB দুইটি নির্দিষ্ট স্পর্শক, $\therefore$ A, B দুইটি স্থিরবিন্দু।

$\therefore$ $\angle ACB$ ধ্রুবক। $\therefore$ উহার অর্ধেক $\angle PCQ$-ও ধ্রুবক।

উদা. 8. একটি বৃত্তের পরিলিখিত কোন চতুর্ভুজের যে কোন দুইটি বিপরীত বাহুর কেন্দ্রস্থ সম্মুখ-কোণ দুইটি পরস্পর সম্পূরক। [B. U. '35]

[**Hints :** ABCD চতুর্ভুজের AB, BC, CD, DA বাহু বৃত্তকে যথাক্রমে P, Q, R, S বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে, এবং O বৃত্তের কেন্দ্র। O-এর সহিত A, P, B, Q, C, R, D ও S বিন্দুগুলি যোগ কর।

$\because$ AP ও AS স্পর্শক, $\therefore$ $\angle AOS = \angle AOP$.

অনুরূপে, $\angle DOS = \angle DOR$, $\angle COQ = \angle COR$, $\angle BOQ = \angle BOP$.

$\therefore$ $\angle AOS + \angle DOS + \angle COQ + \angle BOQ = \angle AOP + \angle BOP + \angle DOR + \angle COR$,

অর্থাৎ $\angle AOD + \angle BOC = \angle AOB + \angle COD = \frac{1}{2} \times 4$ সমকোণ $= 2$ সমকোণ।

অনুরূপে $\angle AOB + \angle COD = 2$ সমকোণ।

প্রশ্নমালা 24

1. দুইটি বৃত্ত P বিন্দুতে বহিঃস্পর্শ করিয়াছে। প্রমাণ কর যে উহাদের সাধারণ স্পর্শকটি P বিন্দু দিয়া অঙ্কিত স্পর্শক দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হইবে।

2. দুইটি বৃত্ত A বিন্দুতে পরস্পর বহিঃস্পর্শ করিয়াছে এবং একটি সরলরেখা বৃত্ত দুইটিকে B ও C বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে। প্রমাণ কর যে $\angle BAC$ একটি সমকোণ। [C. U. '13]

3. বৃত্তের পরিলিখিত সামান্তরিক মাত্রই একটি রম্বস।

4. কোন বৃত্তের পরিলিখিত আয়তক্ষেত্রটি একটি বর্গক্ষেত্র।

5. কোন বৃত্তের কেন্দ্র জানা নাই। উহাতে একটি স্পর্শক অঙ্কিত কর।

6. যে সকল বৃত্ত দুইটি পরস্পরছেদী সরলরেখাকে স্পর্শ করে, তাহাদের কেন্দ্রের সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

7. বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে ঐ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য ধ্রুবক। ঐ বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

8. কোন বৃত্তের পরিলিখিত চতুর্ভুজের দুইটি বিপরীত বাহুর সমষ্টি অপর দুইটি বিপরীত বাহুর সমষ্টির সমান। [C. U. '31]

9. কোন চতুর্ভুজের দুইটি বিপরীত বাহুর সমষ্টি অপর দুই বাহুর সমষ্টির সমান হইলে চতুর্ভুজটি একটি বৃত্তের পরিলিখিত হইতে পারে।

10. যে বিন্দু হইতে একটি নির্দিষ্ট বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণ ধ্রুবক, সেই বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

উপপাদ্য 51

দুইটি বৃত্ত পরস্পর স্পর্শ করিলে স্পর্শবিন্দুটি কেন্দ্রদ্বয় সংযোজক সরলরেখায় অবস্থিত থাকিবে।

[*If two circles touch each other, the point of contact lies in the straight line through the centres.*]

দুইটি বৃত্ত P বিন্দুতে পরস্পর বহিঃস্পর্শ বা অন্তঃস্পর্শ করিয়াছে এবং A ও B বিন্দুদ্বয় বৃত্ত দুইটির কেন্দ্র।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, P বিন্দুটি A ও B বিন্দু সংযোজক সরলরেখায় অবস্থিত। AP ও BP যোগ কর।

চিত্র নং 174

প্রমাণ : ∵ বৃত্ত দুইটি পরস্পর P বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে,

∴ P বিন্দুতে উভয় বৃত্তের একটি সাধারণ স্পর্শক আছে।

মনে কর, PT উহাদের সাধারণ স্পর্শক।

∵ AP ও BP স্পর্শবিন্দুগামী দুইটি ব্যাসার্ধ,

∴ AP ও BP উভয়ই PT সরলরেখার উপর P বিন্দুতে লম্ব,

∴ AP ও BP একই সরলরেখা।

অতএব, P বিন্দু কেন্দ্রসংযোজক সরলরেখা AB-র উপর অবস্থিত।

[**দ্রষ্টব্য :** (1) দুইটি বৃত্ত পরস্পর স্পর্শ করিলে উহাদের কেন্দ্রদ্বয় ও স্পর্শবিন্দু একই সরলরেখায় অবস্থিত হয়।

(2) যদি দুইটি বৃত্তের কেন্দ্রদ্বয় সংযোজক সরলরেখায় বৃত্তদ্বয়ের একটি সাধারণ বিন্দু থাকে, তবে বৃত্ত দুইটি ঐ বিন্দুতে পরস্পরকে স্পর্শ করিবে।

(3) দুইটি বৃত্ত পরস্পর বহিঃস্পর্শ করিলে উহাদের কেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব উহাদের ব্যাসার্ধদ্বয়ের সমষ্টির সমান হইবে।

(4) দুইটি বৃত্ত পরস্পর অন্তঃস্পর্শ করিলে উহাদের কেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব উহাদের ব্যাসার্ধদ্বয়ের অন্তরের সমান হইবে।]

বিবিধ উদাহরণ 17

উদা. 1. দুইটি সমান বৃত্ত A বিন্দুতে বহিঃস্পর্শ করিয়াছে এবং A বিন্দু দিয়া দুইটি পরিধি পর্যন্ত PAQ সরলরেখা টানা হইয়াছে। প্রমাণ কর যে AP=AQ.

মনে কর, বৃত্তদ্বয়ের কেন্দ্র C ও D.

CA, CP, DA, DQ যোগ কর।

চিত্র নং 175

প্রমাণ : ∵ C ও D বৃত্তদ্বয়ের কেন্দ্র এবং A স্পর্শবিন্দু,

∴ CA ও AD একই সরলরেখায় অবস্থিত।

$\angle DQA = \angle DAQ$ (∵ DA=DQ)

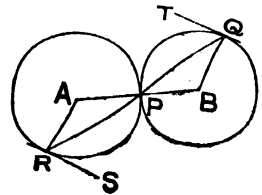
= বিপ্রতীপ $\angle CAP = \angle CPA$ (∵ CA=CP)

∴ অবশিষ্ট $\angle ADQ$ = অবশিষ্ট $\angle ACP$.

এখন, ADQ ও CAP ত্রিভুজের AD=CP, DQ=CA (সমান সমান বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলিয়া) এবং অন্তর্ভূত $\angle ADQ$ = অন্তর্ভূত $\angle ACP$,

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। ∴ AP=AQ.

উদা. 2. যদি দুইটি বৃত্ত পরস্পর বহিঃস্পর্শ করে এবং স্পর্শবিন্দু দিয়া বৃত্তদ্বয়ের পরিধি পর্যন্ত একটি সরলরেখা টানা হয়, তবে উহার দুই প্রান্তবিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক দুইটি সমান্তরাল হইবে।

বৃত্ত দুইটির কেন্দ্র A ও B এবং উহারা বহিঃস্থভাবে P বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে। P বিন্দু দিয়া RPQ সরলরেখা টানিয়া বৃত্ত দুইটিকে R ও Q বিন্দুতে ছেদ করা হইল। R ও Q বিন্দুতে RS ও TQ বৃত্তদ্বয়ের স্পর্শক টানা হইল। প্রমাণ করিতে হইবে যে RS ∥ QT. AR, AP, BP, BQ যোগ কর।

চিত্র নং 176

প্রমাণ : A ও B কেন্দ্রদ্বয় এবং স্পর্শবিন্দু P একই সরলরেখায় অবস্থিত।

∵ AR=AP, ∴ $\angle ARP = \angle APR$ = বিপ্রতীপ $\angle BPQ = \angle BQP$ (∵ BP=BQ). আবার, RS স্পর্শক ও AR স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ বলিয়া $\angle ARS$ = 1 সমকোণ। অনুরূপে $\angle BQT$ = 1 সমকোণ।

∴ $\angle ARS = \angle BQT$; কিন্তু $\angle ARP = \angle BQP$, ∴ $\angle PRS = \angle PQT$, কিন্তু ইহারা একান্তর কোণ, ∴ RS ∥ QT.

প্রশ্নমালা 25

1. 1 সে. মি. ও 1·4 সে. মি. ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট এমন দুইটি বৃত্ত অঙ্কিত কর যেন তাহারা পরস্পর (i) বহিঃস্পর্শ করে, (ii) অন্তঃস্পর্শ করে।

2. একটি নির্দিষ্ট বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া একটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। এইরূপ কয়টি বৃত্ত হইতে পারে?

3. যে সকল বৃত্ত পরস্পরকে একই বিন্দুতে স্পর্শ করে, তাহাদের কেন্দ্রগুলি একই সরলরেখায় অবস্থিত। [C. U. '12]

4. দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে বহিঃস্পর্শ করিয়াছে এবং স্পর্শবিন্দু দিয়া অঙ্কিত একটি সরলরেখা বৃত্তদ্বয়কে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর যে, ছেদবিন্দুদ্বয়গামী ব্যাসার্ধ দুইটি পরস্পর সমান্তরাল।

5. যথাক্রমে a, b, c একক দীর্ঘ ব্যাসার্ধ লইয়া এরূপ তিনটি বৃত্ত অঙ্কিত কর যেন তাহারা পরস্পরকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করে।

6. কোন নির্দিষ্ট বৃত্তের পরিধিস্থ নির্দিষ্ট কোন বিন্দুতে উহাকে স্পর্শ করিবে এরূপ বৃত্তসমূহের কেন্দ্রগুলির সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

7. দুইটি এককেন্দ্রীয় বৃত্তকে স্পর্শ করে এরূপ যাবতীয় বৃত্তের কেন্দ্রের সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। [D. B. '34]

8. পরস্পর অন্তঃস্পর্শকারী দুইটি নির্দিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র A ও B; বৃহত্তর বৃত্তটিকে অন্তঃস্পর্শ এবং ক্ষুদ্রতর বৃত্তকে বহিঃস্পর্শ করে এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কিত করা হইল। P যদি উহার কেন্দ্র হয়, তবে AP+BP ধ্রুবক হইবে। [D. B. '35]

9. দুইটি বৃত্ত পরস্পর বহিঃস্পর্শ করিয়াছে এবং PQ উহাদের সাধারণ স্পর্শক। প্রমাণ কর যে, উহাদের কেন্দ্রসংযোজক সরলরেখাটি PQকে ব্যাস করিয়া অঙ্কিত বৃত্তের একটি স্পর্শক।

দ্বাদশ অধ্যায়

বৃত্তাঙ্কন

27. প্রদত্ত সর্ত বা উপাত্ত হইতে একটি নির্দিষ্ট বৃত্ত অঙ্কন করিতে হইলে প্রথমে উহার কেন্দ্রের অবস্থান ও ব্যাসার্ধের পরিমাণ জানিতে হইবে।

কেন্দ্রের অবস্থান জানিতে হইলে উহার দুইটি সঞ্চারপথ জানা আবশ্যক এবং ঐ সঞ্চারপথ দুইটির ছেদবিন্দুই বৃত্তের কেন্দ্র হইবে। অতএব, কেন্দ্র নির্ণয়ের জন্য দুইটি পৃথক্ সর্ত বা উপাত্তের প্রয়োজন।

ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য নির্ণয়ের জন্য একটি উপাত্তের প্রয়োজন।

অতএব, কোন নির্দিষ্ট বৃত্তাঙ্কনের জন্য তিনটি স্বতন্ত্র উপাত্তের প্রয়োজন।

কোন নির্দিষ্ট সর্তে কেন্দ্রবিন্দুর সঞ্চারপথ একটি সরলরেখা বা একটি বৃত্তের পরিধি হইয়া থাকে। বৃত্তাঙ্কনের জন্য নিম্নের সিদ্ধান্তগুলি স্মরণ রাখা আবশ্যক।

(1) দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী বৃত্তের কেন্দ্রের সঞ্চারপথ ঐ বিন্দুদ্বয় সংযোজক সরলরেখার লম্বসমদ্বিখণ্ডক।

(2) দুইটি ছেদী সরলরেখাকে যে বৃত্ত স্পর্শ করে তাহার কেন্দ্রের সঞ্চারপথ ঐ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণের সমদ্বিখণ্ডক।

(3) দুইটি সমান্তরাল সরলরেখাকে যে বৃত্ত স্পর্শ করে তাহার কেন্দ্র ঐ সরলরেখা দুইটি হইতে সমদূরবর্তী এবং উহাদের সমান্তরাল একটি সরলরেখায় অবস্থিত হইবে।

(4) একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে যে বৃত্ত স্পর্শ করে, তাহার কেন্দ্র ঐ বিন্দুতে ঐ সরলরেখার উপর লম্বের উপর থাকিবে।

(5) যে বৃত্ত কোন নির্দিষ্ট বৃত্তকে কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করে, ঐ বিন্দুগামী ব্যাসার্ধ (বা বর্ধিত ব্যাসার্ধ) তাহার কেন্দ্রের সঞ্চারপথ হয়।

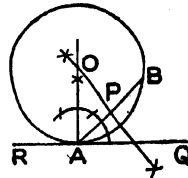
(6) যদি নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধের কোন বৃত্ত অন্য একটি প্রদত্ত বৃত্তকে স্পর্শ করে, তবে তাহার কেন্দ্র এমন একটি বৃত্তের পরিধির উপর থাকিবে যাহার ব্যাসার্ধ ঐ বৃত্তদ্বয়ের ব্যাসার্ধের সমষ্টি বা অন্তরের সমান এবং যাহা প্রদত্ত বৃত্তের সহিত এককেন্দ্রীয়।

(7) যে বৃত্ত দুইটি এককেন্দ্রীয় বৃত্তকে স্পর্শ করে, তাহার কেন্দ্রের সঞ্চারপথ একটি এককেন্দ্রীয় বৃত্ত।

বিবিধ উদাহরণ 18

উদা. 1. একটি সরলরেখাকে উহার কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করিবে এবং অপর একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যাইবে, এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর।

মনে কর, RQ সরলরেখাকে A বিন্দুতে স্পর্শ করিবে এবং প্রদত্ত B বিন্দু দিয়া যাইবে, এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন : AO⊥RQ টান এবং AB যোগ করিয়া উহার লম্বসমদ্বিখণ্ডক PO টান। AO এবং PO যেন O বিন্দুতে ছেদ করিল। এক্ষণে Oকে কেন্দ্র করিয়া OA ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। উহাই উদ্দিষ্ট বৃত্ত।

চিত্র নং 177

প্রমাণ : ∵ O বিন্দু AB-র লম্ব-সমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত, ∴ OA=OB ; সুতরাং Oকে কেন্দ্র করিয়া OA ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্ত A ও B বিন্দু দিয়া যাইবে।

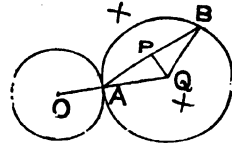
আবার, RQ সরলরেখা ব্যাসার্ধ OA-র উপর A বিন্দুতে লম্ব বলিয়া RQ বৃত্তের A বিন্দুতে স্পর্শক।

উদা. 2. একটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করিবে এবং বৃত্তটির বহিঃস্থ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যাইবে এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে।

O একটি নির্দিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র, A বৃত্তটির পরিধির উপর একটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং B বৃত্তটির বহিঃস্থ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু।

এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে যাহা প্রদত্ত বৃত্তটিকে A বিন্দুতে স্পর্শ করিবে এবং B বিন্দু দিয়া যাইবে।

অঙ্কন : AB যোগ করিয়া AB-র লম্বসমদ্বিখণ্ডক PQ টান। উহা যেন বর্ধিত OAকে Q বিন্দুতে ছেদ করিল।

Qকে কেন্দ্র করিয়া QA ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। উহাই উদ্দিষ্ট বৃত্ত হইবে।

চিত্র নং 178

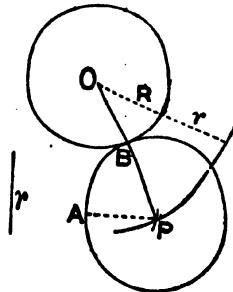
প্রমাণ : BQ যোগ কর। ∵ AB-র লম্বসমদ্বিখণ্ডক PQ, ∴ QA=QB.
∴ Qকে কেন্দ্র করিয়া QA ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্তটি B বিন্দু দিয়া যাইবে।

আবার, বৃত্ত দুইটি কেন্দ্রসংযোজক সরলরেখা OQ-এর উপর A বিন্দুতে মিলিত হওয়ায় উহারা পরস্পরকে A বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে।

∴ Qকে কেন্দ্র করিয়া QA ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্তই উদ্দিষ্ট বৃত্ত হইল।

উদা. 3. নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধের এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর যেন তাহা একটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শ করে এবং একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যায়।

মনে কর O প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র, A নির্দিষ্ট বিন্দু এবং r নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধ।

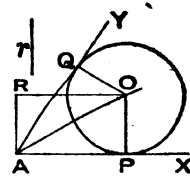
অঙ্কন : মনে কর R প্রদত্ত বৃত্তের ব্যাসার্ধ। Oকে কেন্দ্র করিয়া $R+r$ ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ আঁক এবং Aকে কেন্দ্র করিয়া r ব্যাসার্ধ লইয়া আর একটি বৃত্তচাপ আঁক। উভয় চাপ যেন P বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিল। OP যোগ কর, উহা বৃত্তটিকে B বিন্দুতে ছেদ করিল। এক্ষণে Pকে কেন্দ্র করিয়া PB ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। উহাই উদ্দিষ্ট বৃত্ত।

চিত্র নং 179

প্রমাণ : $OP = R + r$, এবং $OB = R$, $\therefore$ $PB = r = PA$.

$\therefore$ ঐ বৃত্তটি B ও A বিন্দু দিয়া যাইবে। আবার বৃত্ত দুইটি উহাদের কেন্দ্র-সংযোজক সরলরেখা OP-র উপর B বিন্দুতে মিলিত হওয়ায় উহারা ঐ বিন্দুতে পরস্পর স্পর্শ করিয়াছে। [ঐরূপ কয়টি বৃত্ত অঙ্কন সম্ভব ?]

উদা. 4. দুইটি পরস্পরছেদী সরলরেখাকে স্পর্শ করিবে এরূপ একটি নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধের বৃত্ত অঙ্কন কর।

AX ও AY দুইটি ছেদী সরলরেখা এবং r প্রদত্ত ব্যাসার্ধ।

অঙ্কন : $\angle A$কে OA দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত কর। $AR \perp AX$ টান, যেন $AR = r$ হয়। R হইতে AX-এর সমান্তরাল RO টান উহা যেন AOকে O বিন্দুতে ছেদ করিল।

চিত্র নং 180

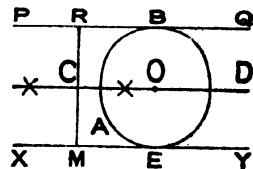
$OP \perp AX$ এবং $OQ \perp AY$ টান।

এখন Oকে কেন্দ্র করিয়া OP ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্তই উদ্দিষ্ট বৃত্ত।

প্রমাণ : $\because$ AO, $\angle A$-এর সমদ্বিখণ্ডক, $\therefore$ $OP = OQ$ এবং উহারা AX ও AYএর উপর লম্ব। $\therefore$ Oকে কেন্দ্র করিয়া OP ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্ত P ও Q বিন্দু দিয়া যাইবে এবং ঐ বিন্দুতে যথাক্রমে AX ও AYকে স্পর্শ করিবে। এখন $\because$ APOR একটি সামান্তরিক, $\therefore$ $OP = AR = r$.

[**দ্রষ্টব্য :** এইরূপ চারিটি বৃত্ত হইতে পারে। অপর বৃত্ত তিনটি আঁক।]

উদা. 5. দুইটি সমান্তরাল সরলরেখাকে স্পর্শ করিবে এবং একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যাইবে এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর।

PQ ও XY দুইটি সমান্তরাল সরলরেখা এবং A একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। A বিন্দু দিয়া যাইবে এবং PQ ও XYকে স্পর্শ করিবে এরূপ একটি বৃত্তাঙ্কন করিতে হইবে।

চিত্র নং 181

অঙ্কন : XY-এর উপর যে কোন M বিন্দুতে $MR \perp XY$ টান, MR যেন PQ-কে R বিন্দুতে ছেদ করিল। MR-এর লম্বসমদ্বিখণ্ডক CD টান। Aকে কেন্দ্র করিয়া CM ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ আঁক. উহা যেন CDকে O বিন্দুতে

ছেদ করিল। Oকে কেন্দ্র করিয়া OA ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর, উহাই নির্ণেয় বৃত্ত।

প্রমাণ : ∵ PQ ও XYএর দূরত্ব RM এবং CD, RM এর লম্বসমদ্বিখণ্ডক, ∴ PQ ও XYকে যে বৃত্তগুলি স্পর্শ করিবে তাহাদের কেন্দ্র CDর উপর থাকিবে এবং ব্যাসার্ধ CM এর সমান হইবে। এখানে ব্যাসার্ধ OA=CM এবং কেন্দ্র CDর উপর অবস্থিত। অতএব ABE বৃত্তই উদ্দিষ্ট বৃত্ত।

[**দ্রষ্টব্য :** (1) এরূপ দুইটি বৃত্ত সম্ভব, কারণ Aকে কেন্দ্র করিয়া OA ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্তচাপ CDকে আর একটি বিন্দুতে ছেদ করিবে।

(2) A বিন্দু PQ ও XYএর বহিঃস্থ হইলে বৃত্ত অঙ্কন অসম্ভব হইবে।]

উদা. 6. একটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শ করিবে এবং একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর কেন্দ্র থাকিবে ও উহার একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যাইবে এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর।

সংকেত : নির্দিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র O এবং PQ নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর A একটি নির্দিষ্ট বিন্দু।

অঙ্কন : QPএর সমান্তরাল করিয়া ব্যাসার্ধ OB টান এবং BA যোগ কর। উহা যেন বৃত্তটিকে C বিন্দুতে ছেদ করিল।

OC যোগ করিয়া বর্ধিত কর উহা যেন PQকে D বিন্দুতে ছেদ করিল। Dকে কেন্দ্র করিয়া DA ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। ইহাই উদ্দিষ্ট বৃত্ত হইবে।

চিত্র নং 182

প্রমাণ : ∵ OB ∥ PQ, ∴ ∠OBA=একান্তর ∠BAD.

আবার, ∠OBC=∠OCB (∵ OB=OC)=বিপ্রতীপ ∠ACD,

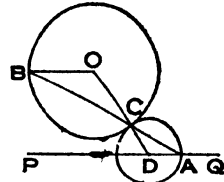
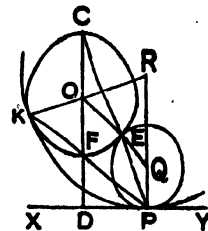
∴ ∠ACD=∠CAD, ∴ DC=DA,

∴ Dকে কেন্দ্র করিয়া DA ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্তটি C বিন্দু দিয়া যাইবে। আবার, এই বৃত্তটি প্রদত্ত বৃত্তের সহিত কেন্দ্রদ্বয় সংযোজক সরলরেখার C বিন্দুতে মিলিত হওয়ায় বৃত্ত দুইটি পরস্পর C বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে।

উদা. 7. একটি বৃত্তকে স্পর্শ করিবে এবং একটি সরলরেখাকে কোন নির্দিষ্ট 'বিন্দুতে স্পর্শ করিবে এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে।

মনে কর, XY সরলরেখার উপর P একটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র O.

অঙ্কন : OD⊥XY টান, উহা বর্ধিত করিলে পরিধিকে যেন C ও F বিন্দুতে ছেদ করিল।

CP যোগ কর, উহা যেন পরিধিকে E বিন্দুতে ছেদ করিল। PQ⊥XY টান। OE যোগ করিয়া বর্ধিত কর, উহা যেন PQকে Q বিন্দুতে ছেদ

চিত্র নং 183

করিল। Q-কে কেন্দ্র করিয়া QP ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। উহাই উদ্দিষ্ট বৃত্ত।

প্রমাণ : ∵ CD ও QP উভয়েই XY-এর উপর লম্ব, ∴ CD ∥ PQ,

∴ $\angle OCE$=একান্তর $\angle EPQ$.

আবার, $\angle OCE = \angle OEC$ (∵ $OC = OE$) $= \angle QEP$.

∴ $\angle QEP = \angle EPQ$. ∴ $QE = PQ$.

অতএব, Qকে কেন্দ্র করিয়া QP ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্ত P ও E বিন্দু দিয়া যাইবে। ∵ ব্যাসার্ধ $QP \perp XY$, ∴ বৃত্তটি XYকে P বিন্দুতে স্পর্শ করিবে।

∵ বৃত্ত দুইটি কেন্দ্র-সংযোজক রেখা OQ-এর উপর E বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে, ∴ E বিন্দুতে উভয়ের সাধারণ স্পর্শক আছে। ∴ বৃত্তদ্বয় E বিন্দুতে পরস্পর স্পর্শ করিয়াছে।

[**দ্রষ্টব্য :** OD রেখা বৃত্তকে F বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। মনে কর, PF সরলরেখা পরিধিকে K বিন্দুতে ছেদ করিল। KO বর্ধিত করিলে উহা PQকে যেন R বিন্দুতে ছেদ করিল। R-কে কেন্দ্র করিয়া এবং RP ব্যাসার্ধ লইয়া বৃত্ত আঁকিলে উহাও উদ্দিষ্ট বৃত্ত হইবে।]

উদা. 8. একটি বৃত্তকে কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে এবং একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে স্পর্শ করিবে এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে। [C. U.]

[(উদা. 7-এর চিত্র দেখ।) মনে কর, XY প্রদত্ত সরলরেখা, প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র O এবং E পরিধিস্থ নির্দিষ্ট বিন্দু। $OD \perp XY$ টান, DOকে বর্ধিত করিয়া পরিধিকে C বিন্দুতে ছেদ কর। CE যোগ করিয়া বর্ধিত কর, উহা যেন XYকে P বিন্দুতে ছেদ করিল। $PQ \perp XY$ টান। OE যোগ করিয়া বর্ধিত কর, উহা যেন PQকে Q বিন্দুতে ছেদ করিল। Qকে কেন্দ্র করিয়া QP ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্তই উদ্দিষ্ট বৃত্ত।

ঐরূপ আর একটি বৃত্ত হইতে পারে। সেই বৃত্তটি আঁক।]

প্রশ্নমালা 26

1. দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যাইবে এবং ব্যাসার্ধ একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান হইবে, এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। [C. U. '32]

2. দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যাইবে এবং কেন্দ্রটি একটি নির্দিষ্ট সরলরেখায় থাকিবে এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর।

3. একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে ও একটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শ করিবে এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। [C. U.]

4. AB ও CD দুইটি সমান্তরাল সরলরেখা। এমন একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর যেন উহা A ও B বিন্দু দিয়া যায় এবং CDকে স্পর্শ করে।

5. একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধের এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর যেন উহার কেন্দ্র একটি নির্দিষ্ট সরলরেখায় থাকে। [C. U. '26]

6. 2 সেন্টিমিটার ও 3 সেন্টিমিটার ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট এরূপ দুইটি বৃত্ত অঙ্কিত কর যেন তাহারা পরস্পরকে স্পর্শ করে।

7. একটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে ও একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে স্পর্শ করিবে এরূপ একটি নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধের বৃত্ত অঙ্কিত কর।

8. দুইটি ছেদী সরলরেখাকে স্পর্শ করিয়া ·8" ব্যাসার্ধের একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর।

9. OA ও OB দুইটি ছেদী সরলরেখা এবং OA-র উপর P একটি বিন্দু। OAকে P বিন্দুতে এবং OBকে কোন বিন্দুতে স্পর্শ করিবে এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। [C. U.]

10. দুইটি সমান্তরাল সরলরেখাকে স্পর্শ করিবে এবং একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যাইবে এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। এরূপ কয়টি বৃত্ত অঙ্কন করা যায় এবং কখন অঙ্কন ব্যর্থ হয় ?

11. দুইটি ছেদী সরলরেখাকে স্পর্শ করিবে এবং কেন্দ্র কোন নির্দিষ্ট সরলরেখায় থাকিবে এরূপ একটি বৃত্ত আঁক।

12. কোন ত্রিভুজের বাহুগুলিকে স্পর্শ করিবে এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর।

13. দুইটি সমান্তরাল সরলরেখাকে ও উহাদের একটি নির্দিষ্ট ভেদককে স্পর্শ করিবে এইরূপ বৃত্ত আঁক। এরূপ কয়টি বৃত্ত হইবে ?

14. 4·8 সেন্টিমিটার দীর্ঘ AB সরলরেখার A ও B বিন্দু দিয়া যাইবে এরূপ 3 সেন্টিমিটার ব্যাসার্ধের একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। বৃত্তটির কেন্দ্র হইতে AB রেখার লম্বদূরত্ব কত ? (উত্তর = 1·8 সে. মি.) [W. B. S. F. '52]

• 15. AB সরলরেখা হইতে 4·5 সে. মিটার দূরে P একটি বিন্দু আছে। ঐ বিন্দু দিয়া যাইবে এবং AB-কে স্পর্শ করিবে এরূপ 3·2 সে. মিটার ব্যাসার্ধের দুইটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। [W. B. S. F. '52

বিবিধ প্রশ্নমালা 27

1. দুইটি সমান বৃত্ত A ও B বিন্দুতে ছেদ করিল এবং A বিন্দু দিয়া উভয় বৃত্তের পরিধি পর্যন্ত PAQ সরলরেখা টানা হইল। প্রমাণ কর যে BP = BQ.

2. কোন বৃত্তের পরস্পর সমকোণে নত দুইটি জ্যা দ্বারা ছিন্ন চাপ দুইটির সমষ্টি অর্ধপরিধির সমান।

3. দুইটি বৃত্তের সাধারণ জ্যা কেন্দ্রদ্বয়ে সমান সম্মুখকোণ উৎপন্ন করিলে বৃত্ত দুইটি সমান হইবে।

4. বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে একটি নির্দিষ্ট বৃত্তের একটি স্পর্শক অঙ্কিত কর।

5. বৃত্তের কোন ভেদকের সমান্তরাল করিয়া একটি স্পর্শক অঙ্কিত কর। ঐরূপ কয়টি স্পর্শক হইতে পারে ?

6. বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বাহুগুলির লম্বসমদ্বিখণ্ডকগুলি একটি নির্দিষ্ট স্থির বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করে।

7. কোন নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া এবং একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান করিয়া কোন বৃত্তের একটি জ্যা অঙ্কিত কর। কখন এইরূপ অঙ্কন অসম্ভব হইবে ?

8. বৃত্তসমূহের সমান সমান জ্যা-এর উপর সদৃশ বৃত্তাংশগুলি সমান হইবে।

[**দ্রষ্টব্য :** যে সকল বৃত্তাংশস্থিত কোণগুলি পরস্পর সমান তাহাদিগকে সদৃশ বৃত্তাংশ বলে।]

9. কোন চতুর্ভুজের যে কোন দুইটি সন্নিহিত বাহুকে ব্যাস করিয়া অঙ্কিত বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ জ্যা অপর বাহুদ্বয়কে ব্যাস করিয়া অঙ্কিত বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ জ্যা-এর সমান্তরাল হইবে।

10. কোন বৃত্তের AB একটি নির্দিষ্ট জ্যা এবং P উহার পরিধিস্থিত একটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে, ∠APB-র সমদ্বিখণ্ডক একটি স্থির বিন্দু দিয়া যাইবে।

11. যদি দুইটি বৃত্তের সমান সমান জ্যাগুলি পরিধিতে সমান অথবা পরস্পর সম্পূরক কোণ উৎপন্ন করে, তবে বৃত্ত দুইটি সমান হইবে।

12. একটি সামান্তরিক বৃত্তস্থ হইলে, উহার কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু বৃত্তের কেন্দ্র হইবে।

13. দুইটি বৃত্ত পরস্পর A ও B বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে এবং একটি বৃত্তের পরিধিস্থ যে কোন P বিন্দু হইতে অপর বৃত্তটির পরিধি পর্যন্ত PAC ও PBD সরলরেখা টানা হইয়াছে। প্রমাণ কর যে CD একটি ধ্রুবক চাপ। [C. U. '36]

14. একটি বৃত্তকে এরূপ দুইটি বৃত্তাংশে বিভক্ত কর যেন একটি বৃত্তাংশস্থিত কোণ অপর বৃত্তাংশস্থিত কোণের দ্বিগুণ হয়।

15. পরস্পর অন্তঃস্পর্শকারী দুইটি বৃত্তের ক্ষুদ্রতর বৃত্তটি বৃহত্তর বৃত্তের কেন্দ্র দিয়া গিয়াছে। প্রমাণ কর যে স্পর্শবিন্দু হইতে অঙ্কিত বৃহত্তর বৃত্তের যে কোন জ্যা ক্ষুদ্রতর বৃত্তটি দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হইবে। [C. U.]

16. একটি বৃত্তের পরিধিস্থ A বিন্দু হইতে BC জ্যা-এর উপর AD লম্ব টানা হইল। AE বৃত্তটির একটি ব্যাস হইলে প্রমাণ কর যে, BAD ও EAC কোণদ্বয় সমান। [C. U. '48, '49]

17. O-কেন্দ্রীয় বৃত্তের BC একটি নির্দিষ্ট চাপ। ঐ চাপের উপরিস্থিত যে কোন P বিন্দু হইতে OB ও OC-র উপর যথাক্রমে PQ ও PR লম্ব টানা হইল। প্রমাণ কর যে, QR দৈর্ঘ্য ধ্রুবক। [C. U. 1881]

18. কোন বহিঃস্থ বিন্দু হইতে একটি বৃত্তের দুইটি স্পর্শক অঙ্কিত করিলে ঐ বিন্দু ও কেন্দ্র-সংযোজক সরলরেখাটি স্পর্শজ্যাকে সমকোণে ছেদ করে।

[E. B. S. B. '51]

19. ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বর্ধিত AB ও DC বাহু পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে, ∠P ও ∠Q-এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণটি সমকোণ। [P. U. '34]

20. কোন ত্রিভুজের শীর্ষকোণের সমদ্বিখণ্ডক এবং ভূমির লম্বসমদ্বিখণ্ডক ত্রিভুজটির পরিবৃত্তের উপর পরস্পর মিলিত হয়।

21. A ও B কেন্দ্রীয় বৃত্ত দুইটি পরস্পর বহিঃস্পর্শ করিয়াছে এবং PQ উহাদের সাধারণ সরলস্পর্শক। প্রমাণ কর যে PQ, AB-কে ব্যাস করিয়া অঙ্কিত বৃত্তটির স্পর্শক।

22. যদি কোন বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় পরস্পর সমকোণে ছেদ করে, তবে ছেদবিন্দু হইতে কোন বাহুর উপর লম্ব বিপরীত বাহুটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

23. বিভিন্ন আয়তনের চারিটি বৃত্তাকার মুদ্রাকে একটি টেবিলের উপর স্থাপন করায় প্রত্যেক মুদ্রা কেবল অন্য দুইটি করিয়া মুদ্রাকে বহিঃস্পর্শ করিল। প্রমাণ কর যে, উহাদের স্পর্শবিন্দু চারিটি একবৃত্তস্থ।

24. দুইটি বৃত্তের সাধারণ জ্যা ও ব্যাসার্ধ দুইটি দেওয়া আছে। বৃত্ত দুইটি অঙ্কিত কর।

25. সমান শীর্ষকোণবিশিষ্ট একই ভূমির উপর অঙ্কিত ত্রিভুজগুলির মধ্যে সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলই বৃহত্তম হইবে। [C. U. '41]

ত্রয়োদশ অধ্যায়

28. কয়েকটি সঞ্চারপথ

উদা. 1. কোন ত্রিভুজের ভূমি ও শীর্ষকোণ নির্দিষ্ট, উহার লম্ববিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় করিতে হইবে।

[চিত্র আঁকিয়া লও] মনে কর, $\triangle ABC$-র ভূমি BC নির্দিষ্ট এবং শীর্ষকোণ A একটি নির্দিষ্ট $\angle X$-এর সমান। B ও C বিন্দু হইতে বিপরীত বাহুর উপর যথাক্রমে BD ও CE লম্ব টান, উহারা যেন O বিন্দুতে ছেদ করিল। এই লম্ব-বিন্দু O-এর সঞ্চারপথ নির্ণয় করিতে হইবে।

$\because$ ADOE চতুর্ভুজের $\angle D$ ও $\angle E$ প্রত্যেকে সমকোণ,

$\therefore$ $\angle DOE + \angle A = 2$ সমকোণ, কিন্তু $\angle A$-র পরিমাণ নির্দিষ্ট বা ধ্রুবক,

$\therefore$ $\angle BOC = \angle DOE =$ ধ্রুবক। অতএব লম্ববিন্দু Oতে BC ভূমির সম্মুখ-কোণ ধ্রুবক হওয়ায় B, O, C দিয়া অঙ্কিত বৃত্তের (অর্থাৎ BCর উপর $\angle BOC$ ধারণক্ষম বৃত্তাংশের) BOC চাপই O বিন্দুর উদ্দিষ্ট সঞ্চারপথ হইল।

উদা. 2. একটি ত্রিভুজের ভূমি ও শীর্ষকোণ নির্দিষ্ট, উহার অন্তঃকেন্দ্রের সঞ্চারপথ নির্ণয় করিতে হইবে। [C. U. '19]

মনে কর, $\triangle ABC$র ভূমি BC নির্দিষ্ট এবং শিরঃকোণ A একটি নির্দিষ্ট X কোণের সমান। $\angle B$ ও $\angle C$-র সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় যেন I-বিন্দুতে ছেদ করিল। এই অন্তঃকেন্দ্র I-এর সঞ্চারপথ নির্ণয় করিতে হইবে।

$\triangle BIC$র $\angle BIC + \angle IBC + \angle ICB = 180°$, অর্থাৎ $\angle BIC + \frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle C = 180°$ ······(1), এবং $\triangle ABC$র $\frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle C = 90°$···(2).

এখন (1) হইতে (2) বিয়োগ করিলে $\angle BIC - \frac{1}{2}\angle A = 90°$,

$\therefore$ $\angle BIC = 90° + \frac{1}{2}\angle A = 90° + \frac{1}{2}\angle X =$ ধ্রুবক। সুতরাং BC নির্দিষ্ট ভূমির উপর I-বিন্দুতে সম্মুখ-কোণ ধ্রুবক হওয়ায় B, I ও C বিন্দুগামী বৃত্তের (বা BCর উপর $\angle BIC$ ধারণক্ষম বৃত্তাংশের) BIC চাপ অন্তঃকেন্দ্র I-এর সঞ্চারপথ হইল।

উদা. 3. ABC ত্রিভুজের BC বাহু ও $\angle A$ নির্দিষ্ট; A বিন্দুর বিপরীত বহিঃকেন্দ্রের সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

A বিন্দুর বিপরীত বহিঃকেন্দ্র I_1 অঙ্কিত করা হইল।

$\because$ $\angle CBP = \angle A + \angle ACB$ এবং $\angle BCQ = \angle A + \angle ABC$,

$\therefore$ $\angle CBP + \angle BCQ = (\angle A + \angle ABC + \angle ACB) + \angle A = 180° + \angle A$,

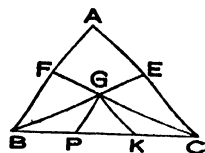
$\therefore$ $\angle I_1BC + \angle I_1CB = \frac{1}{2}(\angle CBP + \angle BCQ) = 90° + \frac{1}{2}\angle A$

$\therefore$ $\angle BI_1C = 90° - \frac{1}{2}\angle A =$ ধ্রুবক ($\because$ $\angle A$ ধ্রুবক)।

এক্ষণে, $\because$ I_1 বিন্দুতে BC-র সম্মুখ-কোণটি ধ্রুবক, $\therefore$ B, C, I_1 দিয়া অঙ্কিত বৃত্তের BI_1C চাপটি বহিঃকেন্দ্র I_1-এর সঞ্চারপথ হইল।

উদা. 4. কোন ত্রিভুজের ভূমি ও শিরঃকোণ নির্দিষ্ট ; উহার ভরকেন্দ্রের সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

△ABCর ভূমি BC ও শিরঃকোণ A নির্দিষ্ট। BE ও CF মধ্যমাদ্বয় G বিন্দুতে ছেদ করিল। G ভরকেন্দ্রের সঞ্চারপথ নির্ণয় করিতে হইবে।

GP ∥ AB এবং GK ∥ AC টান, উহারা BCকে যথাক্রমে P ও K বিন্দুতে ছেদ করিল।

∵ GP ∥ AB, ∴ ∠GPK = ∠ABC.

চিত্র নং 184

∵ GK ∥ AC, ∴ ∠GKP = ∠ACB. ∴ ∠PGK = ∠A = ধ্রুবক।
আবার, ∵ ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় সমত্রিখণ্ডক বিন্দুতে ছেদ করে,

∴ $FG = \frac{1}{3}CF$ এবং $EG = \frac{1}{3}BE$. এক্ষণে, ∵ GP ∥ FB, ∴ $\frac{BP}{BC} = \frac{FG}{FC} = \frac{1}{3}$,

∴ $BP = \frac{1}{3}BC$. অনুরূপে $KC = \frac{1}{3}BC$. ∴ $PK = \frac{1}{3}BC$ (ধ্রুবক).

∵ G বিন্দুতে PK-র সম্মুখকোণ ধ্রুবক,

∴ PGK-বৃত্তের PGK চাপই G বিন্দুর সঞ্চারপথ।

প্রশ্নমালা 28

1. একটি ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্ত অঙ্কিত কর।

2. কোন ত্রিভুজের একটি বহির্বৃত্ত অঙ্কিত কর।

3. একটি বৃত্তে একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সহিত সদৃশকোণী একটি পরিলিখিত ত্রিভুজ অঙ্কিত কর।

4. ত্রিভুজের লম্ববিন্দুতে উহার কোন বাহুর সম্মুখকোণ ঐ বাহুর বিপরীত শিরঃকোণের সম্পূরক।

5. সমবাহু ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্ত ত্রিভুজের বাহুগুলিকে স্পর্শবিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

6. সমবাহু ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র, ভরকেন্দ্র, লম্ববিন্দু ও অন্তঃকেন্দ্র একই বিন্দু।

7. সমবাহু ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ উহার অন্তর্বৃত্তের ব্যাসার্ধের দ্বিগুণ। [C. U. '10]

8. একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে কোন বৃত্তের পরিধি পর্যন্ত অঙ্কিত সরলরেখা-সমূহের মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

* 9. কোন বিন্দু হইতে একটি ত্রিভুজের বাহুগুলির উপর অঙ্কিত লম্বত্রয়ের পাদবিন্দু তিনটি একই সরলরেখায় অবস্থিত হইলে, ঐ বিন্দুটি ত্রিভুজটির পরিবৃত্তের উপর অবস্থিত হইবে।

10. কোন ত্রিভুজের ভূমি নির্দিষ্ট এবং বিপরীত শীর্ষকোণটি 60°; উহার অন্তঃকেন্দ্রের সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। [C. U. '19]

11. $\triangle ABC$র অন্তর্বৃত্তটি উহার বাহুগুলিকে P, Q, R বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে। প্রমাণ কর যে, $\triangle PQR$-এর কোণগুলি যথাক্রমে $90° - \frac{A}{2}$, $90° - \frac{B}{2}$ ও $90° - \frac{C}{2}$ হইবে।

12. সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের লম্ববিন্দু উহার পাদত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র। [C. U. '50]

13. ABC ত্রিভুজের লম্ববিন্দু O হইলে প্রমাণ কর যে, A, B, C, O বিন্দুগুলির প্রত্যেকটি অপর বিন্দু তিনটি যোগ করিয়া উৎপন্ন ত্রিভুজের লম্ববিন্দু হইবে। [W. B. S. F. '53]

14. ABC ত্রিভুজের অন্তর্ব্যাসার্ধ r, প্রমাণ কর যে

$$\triangle ABC = \tfrac{1}{2}(a+b+c)r.$$

15. যদি কোন ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র ও পরিকেন্দ্র একই হয়, তবে ত্রিভুজটি সমবাহু হইবে।

16. একটি বৃত্তের পরিলিখিত সমবাহু ত্রিভুজের একটি বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গ ঐ বৃত্তের অন্তর্লিখিত সমবাহু ত্রিভুজের একটি বাহুর বর্গের চারিগুণ হইবে। [C. U.]

17. ত্রিভুজের ভূমি ও শিরঃকোণ নির্দিষ্ট, উহার মধ্যমাটির মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

18. ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের CD বাহু বৃত্তের ব্যাস। বর্ধিত CA ও DB বাহুর ছেদবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

19. সমবাহু ত্রিভুজে যথাক্রমে অন্তর্বৃত্তের, পরিবৃত্তের এবং বহির্বৃত্তের ব্যাসার্ধগুলির অনুপাত 1 : 2 : 3 হইবে।

20. ত্রিভুজের কৌণিকবিন্দুগুলি হইতে বিপরীত বাহুগুলির উপর লম্বত্রয়ের পাদবিন্দু তিনটি দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

21. ত্রিভুজের শীর্ষ তিনটি হইতে বিপরীত বাহুগুলির উপর অঙ্কিত লম্বত্রয় সমবিন্দু।

22. সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের শীর্ষ তিনটি হইতে বিপরীত বাহুগুলির উপর অঙ্কিত লম্বত্রয় উহার পাদত্রিভুজের কোণগুলিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। [C. U.]

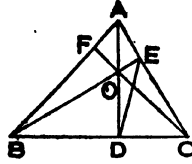
23. কোন ত্রিভুজের পরিবৃত্তের উপর অবস্থিত কোন বিন্দু হইতে ত্রিভুজের বাহু তিনটির উপর অঙ্কিত লম্বত্রয়ের পাদবিন্দুত্রয় একরেখীয়। [C. U. '41, '50 ; G. U. '52]

29. কয়েকটি অতিরিক্ত প্রতিজ্ঞা

প্রতিজ্ঞা 1. ত্রিভুজের শীর্ষ তিনটি হইতে বিপরীত বাহুগুলির উপর অঙ্কিত লম্বত্রয় সমবিন্দু।

[*The altitudes of a triangle are concurrent.*]

[C. U. '37 ; D. B. '50]

মনে কর, ABC ত্রিভুজে AD ও BE যথাক্রমে BC ও AC বাহুর উপর লম্ব এবং উহারা পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। CO যোগ করিয়া বর্ধিত কর, উহা যেন ABকে F বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, CF⊥AB.

প্রমাণ : DE যোগ কর। ∵ ∠BEA ও ∠BDA সমকোণ, ∴ ABDE বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ, ∴ ∠BAD = ∠BED = ∠OED (একই বৃত্তাংশস্থ বলিয়া)।

আবার, ∠OEC ও ∠ODC সমকোণ বলিয়া ODCE বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ,

∴ ∠OED = ∠OCD. ∴ ∠OAF = ∠OED = ∠OCD.

এক্ষণে, ∠COD + ∠OCD = 1 সমকোণ (∵ ∠ODC সমকোণ), এবং ∠COD = ∠AOF, ∴ ∠OAF + ∠AOF = ∠COD + ∠OCD = 1 সমকোণ।

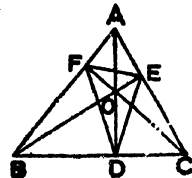
∴ ∠AFO এক সমকোণ। ∴ CF⊥AB. অতএব, ঐ লম্বত্রয় সমবিন্দু।

[**দ্রষ্টব্য :** এই লম্বত্রয় যে বিন্দুতে ছেদ করে তাহাকে ত্রিভুজের লম্ববিন্দু (Ortho-centre) বলে এবং উহাকে সাধারণতঃ O দ্বারা সূচিত করা হয়।]

পাদত্রিভুজ : কোন ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি হইতে বিপরীত বাহুগুলির উপর অঙ্কিত লম্বত্রয়ের পাদবিন্দু তিনটি যোগ করিয়া যে ত্রিভুজ উৎপন্ন হয় তাহাকে **পাদ-ত্রিভুজ** (Pedal-triangle) বলে।

প্রতিজ্ঞা 2. সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের শীর্ষ তিনটি হইতে বিপরীত বাহুগুলির উপর অঙ্কিত লম্বত্রয় উহার পাদ-ত্রিভুজের কোণগুলিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

[C. U. '49]

△ABC-এ AD, BE ও CF লম্বত্রয় O বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে, DEF পাদ-ত্রিভুজের ∠D, ∠E ও ∠F যথাক্রমে AD, BE ও CF দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হইয়াছে।

প্রমাণ : ∵ ∠OFB ও ∠ODB সমকোণ,

∴ BDOF একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ,

∴ ∠ODF = ∠OBF (∵ উহারা একই বৃত্তাংশস্থ)।

আবার, ∴ BCEF বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ (∠CFB ও ∠BEC সমকোণ বলিয়া),
∴ ∠EBF = ∠FCE, অর্থাৎ ∠OBF = ∠OCE. ∴ ∠ODF = ∠OCE.

এক্ষণে, ∵ ODCE বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ (∵ ∠ODC ও ∠OEC সমকোণ),
∴ ∠OCE = ∠ODE (∵ একই বৃত্তাংশস্থ). ∴ ∠ODF = ∠ODE.

∴ ∠FDE, AD দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত। অনুরূপে প্রমাণ করা যায় যে, BE দ্বারা ∠FED এবং CF দ্বারা ∠DFE সমদ্বিখণ্ডিত।

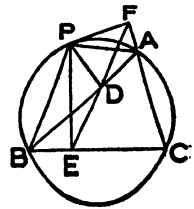
অনুসিদ্ধান্ত 1. পাদ-ত্রিভুজের যে কোন দুইটি সন্নিহিত বাহু মূল ত্রিভুজের যে বাহুর উপর পরস্পর মিলিত হয়, তাহার সহিত সমান কোণে নত থাকে।

অনুসিদ্ধান্ত 2. পাদ-ত্রিভুজের কোন বাহু মূল-ত্রিভুজের কোন বাহুর সহিত যে কোণ উৎপন্ন করে, তাহা মূল-ত্রিভুজের ঐ বাহুর বিপরীত শীর্ষকোণের সমান হয়।

[∵ ABDE বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ, ∴ উহার বহিঃকোণ ∠EDC = বিপরীত অন্তঃকোণ ∠BAE ; ইত্যাদি।]

প্রতিজ্ঞা 8. কোন ত্রিভুজের পরিবৃত্তের উপর অবস্থিত কোন বিন্দু হইতে ত্রিভুজের বাহু তিনটির উপর অঙ্কিত লম্বত্রয়ের পাদবিন্দুত্রয় একরেখীয়।

[C. U. '41, '50 ; G. U. '52]

△ABC-র পরিবৃত্তের পরিধিস্থ যে কোন বিন্দু P হইতে AB, BC ও CA-র উপর যথাক্রমে PD, PE ও PF লম্ব টানা হইল। প্রমাণ করিতে হইবে D, E, F বিন্দুত্রয় এক সরলরেখায় অবস্থিত।

DE, FD, PA ও PB যোগ কর।

প্রমাণ : ∵ ∠PDA ও ∠PFA সমকোণ,

∴ PDAF বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ। ∴ ∠PDF = ∠PAF (∵ একই বৃত্তাংশস্থ)
= ∠PBC (∵ APBC বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ)।

আবার, ∵ ∠PDB ও ∠PEB সমকোণ, ∴ PDEB বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।
∴ ∠PBE + ∠PDE = 2 সমকোণ। কিন্তু, ∠PDF = ∠PBE (প্রমাণিত),
∴ ∠PDE + ∠PDF = 2 সমকোণ। ∴ DE ও DF একই সরলরেখা অর্থাৎ D, E, F বিন্দুত্রয় এক সরলরেখায় অবস্থিত।

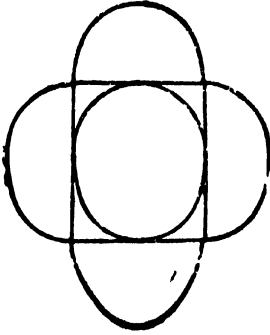
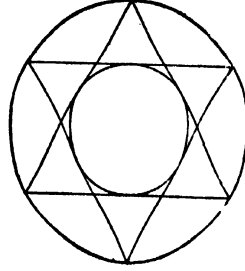
[**দ্রষ্টব্য :** এই লম্বত্রয়ের পাদবিন্দু তিনটি যে সরলরেখায় অবস্থিত তাহাকে **পাদরেখা** (Pedal line বা Simson line) বলে।]

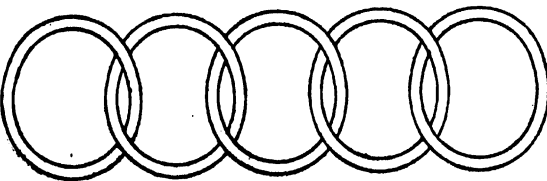
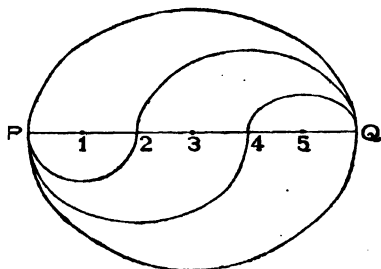
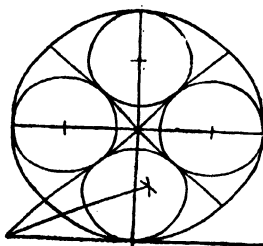
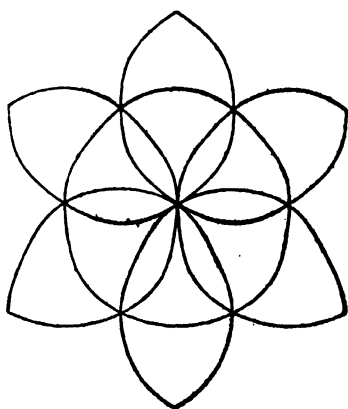
চতুর্দশ অধ্যায়

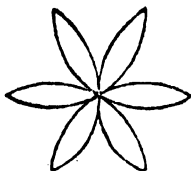
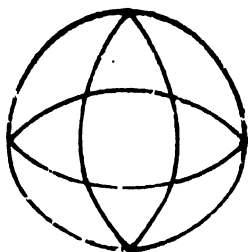
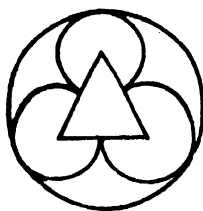
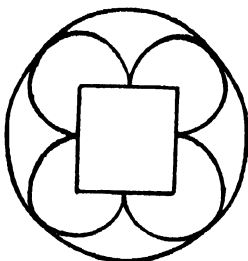
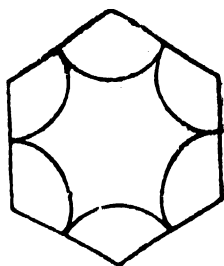
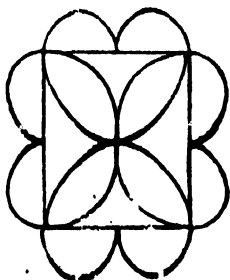
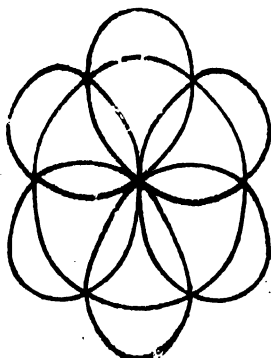
30. জ্যামিতিক চিত্র হইতে নমুনা অঙ্কন

(Construction of Designs with Geometrical Figures)

জ্যামিতিক চিত্রের সাহায্যে নানাবিধ নক্সা (Designs) অঙ্কন করা যায়। নিম্নে কয়েকটি দৃষ্টান্ত দেওয়া হইল :—

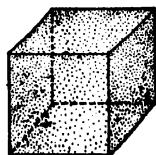
উদা. 1. পার্শ্বে একটি তারকার নমুনা দেখা যাইতেছে। উহা অঙ্কন করার জন্য প্রথমে একটি বৃত্ত আঁক। ঐ বৃত্তের ব্যাসার্ধ লইয়া পরিধিকে ছয়টি সমান অংশে বিভক্ত কর। একান্তর ছেদ বিন্দুগুলি যোগ কর। ইহার পর প্রথম বৃত্তের এককেন্দ্রীয় একটি বৃত্ত আঁক যেন তাহা ত্রিভুজদ্বয়ের বাহুগুলিকে স্পর্শ করে।

উদা. 2. পার্শ্বের নমুনায় একটি বর্গক্ষেত্র আঁকিয়া উহার বাহুগুলিকে ব্যাস করিয়া চারিটি অর্ধবৃত্ত আঁকা হইয়াছে। পরে ঐ বর্গক্ষেত্রের বাহুগুলিকে স্পর্শ করিয়া একটি বৃত্ত আঁকা হইয়াছে।

উদা. 3. একটি সরলরেখার উপর বিভিন্ন বিন্দু লইয়া এক একটি বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এক এক জোড়া এককেন্দ্রীয় বৃত্ত অঙ্কন করিয়া নিম্নের শিকলটি আঁকা হইয়াছে।

উদা. 4. PQ সরলরেখাকে 6টি সমান অংশে বিভক্ত করা হইয়াছে। প্রথম ও পঞ্চম ছেদবিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এক অংশের সমান ব্যাসার্ধ লইয়া পরস্পর বিপরীত পার্শ্বে একটি করিয়া অর্ধবৃত্ত আঁকা হইয়াছে। আবার দ্বিতীয় ও চতুর্থ ছেদবিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া দুইটি অংশের সমান ব্যাসার্ধ লইয়া ঐরূপ PQ-এর উভয় পার্শ্বে দুইটি অর্ধবৃত্ত আঁকিয়া এই নমুনাটি অঙ্কিত করা হইয়াছে।

উদা. 5. পার্শ্বের চিত্রটি বড় করিয়া আঁক।

উদা. 6. পার্শ্বে একটি পদ্মফুলের নমুনা দেখা যাইতেছে। প্রথমে যে-কোন ব্যাসার্ধের একটি বৃত্ত আঁকিয়া পরিধিস্থ কোন বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া একই ব্যাসার্ধ লইয়া বৃত্তচাপ আঁকা হইল। উহা পরিধিকে যে দুই বিন্দুতে ছেদ করিল সেই ছেদবিন্দু দুইটিকে কেন্দ্র করিয়া একই ব্যাসার্ধের বৃত্তচাপ আঁকা হইল। অনুরূপে ঐ নমুনাটি অঙ্কিত হইয়াছে।

প্রশ্নমালা 29

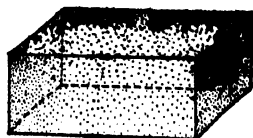
জ্যামিতিক চিত্রের সাহায্যে নিম্নের নমুনাগুলি বড় করিয়া আঁক।

31. ঘনবস্তুর কতিপয় আদর্শের পরিচয়

(Explanation of Models)

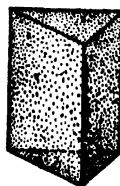
ঘনক : পার্শ্বে একটি ঘনক (cube) দেখিতেছ। উহার ছয়টি তল, প্রত্যেক তলের চারিটি সমান ধার (edge) আছে।

প্রত্যেক তলের ধারগুলির দুই দুইটি করিয়া সমকোণে মিলিত হইয়াছে। ঘনকটির 12টি ধার, ঐ 12টি ধারের তিন তিনটি করিয়া এক বিন্দুতে লম্বভাবে মিলিত হইয়াছে।

ঘনক

ঘনকটির মোট ছয়টি তল, উহারা সমান এবং প্রত্যেক তল একটি বর্গক্ষেত্র। তলগুলি পরস্পর সমকোণে সংযুক্ত।

সমকোণী চৌপল : ঘন সামান্তরিকের তলগুলি যদি আয়তক্ষেত্র হয়, তবে উহাকে আয়তঘন বা সমকোণী চৌপল (Rectangular Parallelopiped) বলে। ঘনকের ন্যায় ইহারও ছয়টি তল, 12টি ধার ও 8টি কোণা। তলগুলি এক একটি আয়তক্ষেত্র এবং কেবল দুই দুইটি বিপরীত তল সমান।

সমকোণী চৌপল

প্রিজ্‌ম্ : কয়েকটি সমতল দ্বারা বেষ্টিত ঘনের যদি প্রান্ততল দুইটি (ends) সমান্তরাল ও সর্বসম হয় এবং পার্শ্বতলসমূহ (side faces) সামান্তরিক হয়, তবে উহাকে প্রিজ্‌ম্ (Prism) বলে।

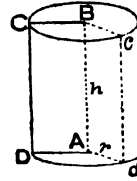
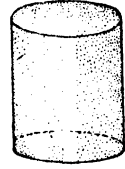
যে প্রিজ্‌মের পার্শ্ব-প্রান্তিকীগুলি দুই প্রান্ততলের উপর লম্ব হয়, তাহাকে **লম্ব** বা **সমকোণী প্রিজ্‌ম্** (Right Prism) বলে।

প্রিজ্‌ম্

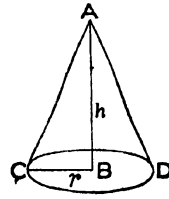
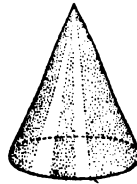
এই সমকোণী প্রিজ্‌মের পার্শ্বতলগুলি আয়তক্ষেত্র। ইহার প্রান্তদ্বয় ত্রিভুজ, চতুর্ভুজ অথবা বহুভুজ হইতে পারে। পার্শ্বের সমকোণী ত্রিকোণ প্রিজ্‌মের প্রান্তদ্বয় সমান্তরাল ও দুইটি সর্বসম ত্রিভুজ।

লম্ব বৃত্তাকার চোঙ বা স্তম্ভক : কোন আয়তক্ষেত্রের একটি বাহুকে অক্ষ (axis) করিয়া আয়তক্ষেত্রটিকে বাহুটির চারিদিকে ঘুরাইলে যে ঘন উৎপন্ন হয়, তাহাকে **লম্ব বৃত্তাকার চোঙ** বা **সমকোণী বৃত্তীয় স্তম্ভক** (Right Circular Cylinder) বলে।

ইহার তিনটি তল, দুইটি প্রান্ততল ও একটি মধ্যতল। মধ্যতলটি একটি বাঁকাতল এবং প্রান্ততল দুইটি সমতল।

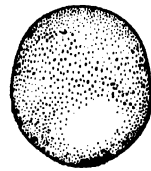
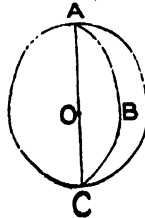
চোঙ

প্রান্ততলদ্বয় দুইটি সমান ও সমান্তরাল বৃত্ত।

শঙ্কু : সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণের সংলগ্ন একটি বাহুকে অক্ষ ধরিয়া ত্রিভুজটিকে ঘুরাইলে যে ঘন উৎপন্ন হয়, তাহাকে **লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু** (Right Circular Cone) বলে।

ABC ত্রিভুজের B সমকোণ। ABকে অক্ষ ধরিয়া ত্রিভুজটিকে ঘোরান হইলে C বিন্দু একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিবে। এই বৃত্ত হইল শঙ্কুটির ভূমি এবং A বিন্দু হইল শঙ্কুর শীর্ষ। চিত্র হইতে বুঝা যায় যে, কোন বৃত্তের বহিঃস্থ ও একতলীয় নহে এরূপ কোন বিন্দুর সহিত বৃত্তটির পরিধিস্থ বিন্দুগুলি যোগ করিলে একটি বৃত্তাকার শঙ্কু উৎপন্ন হয়। আর ঐ শঙ্কুর শীর্ষ হইতে ভূমির উপর অঙ্কিত লম্বটির পাদবিন্দু ভূমির কেন্দ্র হইলে সেই শঙ্কু হইবে লম্ব বৃত্তাকার শঙ্কু।

শঙ্কু

অতএব, শঙ্কুর দুইটি তল, একটি বক্রতল এবং ভূমিটি একটি সমতল।

গোলক : কোন অর্ধবৃত্তের ব্যাসকে অক্ষ করিয়া অর্ধবৃত্তটিকে ঘুরাইলে যে ঘন উৎপন্ন হয় তাহাকে **গোলক** বা **বর্তুল** (Sphere) বলে।

অতএব গোলকের একটি মাত্র তল এবং উহা বক্রতল। ঐ অর্ধবৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধই গোলকের কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ। গোলকের কেন্দ্র হইতে উহার তল পর্যন্ত অঙ্কিত সরল রেখাগুলি সমান হয়।

গোলক

পরিমিতি (Mensuration)

দশম শ্রেণী

সমকোণী চৌপল (Rectangular Parallelopiped)

1. **চৌপল :** যে ঘনের ছয়টি সমতল পৃষ্ঠ বা তল আছে এবং যাহার দুই দুইটি বিপরীত পৃষ্ঠ সমান্তরাল তাহাকে চৌপল (Parallelopiped) বলে।

যে চৌপলের তলগুলি আয়তক্ষেত্র তাহাকে **সমকোণী চৌপল** (Rectangular Parallelopiped) বলে। ইহার দুই দুইটি বিপরীত তল সমান ও সমান্তরাল। সমকোণী চৌপলের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও বেধ সমান হইলে তাহাকে **ঘনক** (cube) বলে।

তোমরা ঘনপরিমাণ অধ্যায়ে এই সম্বন্ধে শিখিয়াছ। তোমরা জান যে, যদি দৈর্ঘ্য $=a$ একক, প্রস্থ $=b$ একক, বেধ বা উচ্চতা $=c$ একক হয়, তবে **সমকোণী চৌপলের ঘনফল** (volume) $=$ **দৈর্ঘ্য $\times$ প্রস্থ $\times$ বেধ**
$=abc$ ঘন একক।

সমকোণী চৌপলের **পৃষ্ঠফল** বা **তলপরিমাণ**
$=2($ দৈর্ঘ্য $\times$ প্রস্থ $+$ দৈর্ঘ্য $\times$ বেধ $+$ প্রস্থ $\times$ বেধ $)$
$=2(ab+ac+bc)$ বর্গ একক।

ঘনকের ঘনফল $=($বাহু$)^3=a^3$ ঘন একক।

ঘনকের তলপরিমাণ $=6\times($বাহু$)^2=6a^2$ বর্গ একক।

সমকোণী চৌপলের কর্ণের দৈর্ঘ্য $=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ দৈর্ঘ্য একক।

ঘনকের কর্ণের দৈর্ঘ্য $=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{a^2+a^2+a^2}$
$=\sqrt{3a^2}=a\sqrt{3}$ দৈর্ঘ্য একক।

উদাহরণ 1. যে সমকোণী চৌপলের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও বেধ যথাক্রমে 18 সে. মি., 12 সে. মি. ও 10 সে. মি., তাহার পৃষ্ঠফল ও ঘনফল নির্ণয় কর।

এখানে দৈর্ঘ্য $a=18$ সে. মি., প্রস্থ $b=12$ সে. মি., বেধ $c=10$ সে. মি.,

$\therefore$ নির্ণেয় পৃষ্ঠফল $=2(18\times12+18\times10+12\times10)$ বর্গ সে. মি.
$=1032$ বর্গ সেন্টিমিটার।

আবার, নির্ণেয় ঘনফল $=abc=18\times12\times10$ ঘন সে. মি.
$=2160$ ঘন সেন্টিমিটার।

উদাহরণ 2. যে ঘনকের ঘনফল 125 ঘন সেন্টিমিটার তাহার প্রত্যেক ধারের মাপ ও কর্ণের দৈর্ঘ্য কত ?

$\because$ ঘনকের ঘনফল $=$ (ধার)^3

$\therefore$ এখানে (ধার)$^3 = 125$ ঘন সে. মি.

$\therefore$ প্রত্যেক ধার $= \sqrt[3]{125}$ সে. মি. $= 5$ সেন্টিমিটার।

আবার, উহার কর্ণের দৈর্ঘ্য $= a\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$ সেন্টিমিটার।

উদাহরণ 3. একটি সমকোণী চৌপলের দৈর্ঘ্য : প্রস্থ : বেধ $= 9 : 5 : 4$; উহার তলপরিমাণ 1818 বর্গ মিটার হইলে, উহার দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও বেধ কত ?

এখানে দৈর্ঘ্য : প্রস্থ : বেধ $= 9 : 5 : 4$;

মনে কর, দৈর্ঘ্য $= 9a$ মি., প্রস্থ $= 5a$ মি., বেধ $= 4a$ মিটার।

$\therefore$ সমগ্র তলপরিমাণ $= 2(9a.5a + 9a.4a + 5a.4a) = 202a^2$.

$\therefore$ এখানে $202a^2 = 1818$, বা $a^2 = 9$, $\therefore$ $a = 3$.

$\therefore$ নির্ণেয় দৈর্ঘ্য $= 9 \times 3$ মি. $= 27$ মি., প্রস্থ $= 5 \times 3$ মি. $= 15$ মি., এবং বেধ $= 4 \times 3$ মি. $= 12$ মিটার।

উদাহরণ 4. যে সমকোণী চৌপলের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও বেধের সমষ্টি 21 সেন্টিমিটার এবং কর্ণের দৈর্ঘ্য 14 সেন্টিমিটার, তাহার মোট তলপরিমাণ কত ?

এখানে $a+b+c = 21$ সে. মি., এবং কর্ণ $= 14$ সে. মি.

অর্থাৎ $\sqrt{a^2+b^2+c^2} = 14$, $\therefore$ $a^2+b^2+c^2 = 196$.

এক্ষণে, $(a+b+c)^2 = (21)^2$

বা, $a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc) = 441$,

বা, $196 + 2(ab+ac+bc) = 441$,

$\therefore$ $2(ab+ac+bc) = 441 - 196 = 245$,

$\therefore$ নির্ণেয় তলপরিমাণ $= 2(ab+ac+bc) = 245$ বর্গ সেন্টি মিটার।

উদাহরণ 5. প্রতি বর্গ সেন্টিমিটার 5 পয়সা হিসাবে একটি ঘনকের ছয়টি তল রং করিতে 19 টাকা 20 পয়সা ব্যয় হইল। ঘনকটির ঘনফল কত ?

19 টা. 20 প. $=$ 1920 প. ; প্রতি বর্গ সেন্টিমিটারে ব্যয় $= 5$ প.

$\therefore$ 6টি তলের ক্ষেত্রফল $= (1920$ প. $\div 5$ প.$)$ বর্গ সে. মি.
$= 384$ বর্গ সে. মি.

$\therefore$ প্রত্যেক তলের ক্ষেত্রফল $= \frac{384}{6}$ বা 64 বর্গ সে. মি.

$\therefore$ ঘনকের প্রত্যেক বাহু $= \sqrt{64}$ সে. মি. $= 8$ সে. মি.।

$\therefore$ উহার নির্ণেয় ঘনফল $= (8)^3$ ঘন সে. মি. $= 512$ ঘন সেন্টিমিটার।

প্রশ্নমালা 1

1. একটি সমকোণী চৌপলের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও বেধ যথাক্রমে 16 মি., 12 মি. ও 4·5 মিটার। উহার পৃষ্ঠফল কত ও ঘনফল কত?

2. 25 মিটার দীর্ঘ ও 12 মিটার প্রশস্ত চৌবাচ্চায় 1200 ঘন মিটার জল ধরে। উহার গভীরতা কত?

3. একটি ঘনকের ধার 4 ডেসি মিটার। উহার সমগ্র তল-পরিমাণ ও ঘনফল নির্ণয় কর।

4. একটি ঘনকের একটি পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল 16 বর্গ মিটার। উহার প্রতি ঘন মিটারের ওজন 15 গ্রাম হইলে, ঘনকটির ওজন কত?

5. একটি সমকোণী চৌপলের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে 24 মি., 8 মি. ও 6 মিটার। উহার ঘনফল ও কর্ণের দৈর্ঘ্য কত?

6. এক ঘন মিটার তামা পিটিয়া 2 মিটার বর্গ একটি পাত প্রস্তুত করা হইল। ঐ পাতের বেধ কত?

7. যে ঘনকের ধার 3 সেন্টিমিটার, তাহার কর্ণের দৈর্ঘ্য কত?

8. একটি সমকোণী চৌপলের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও বেধের অনুপাত 4 : 3 : 2 এবং উহার সমগ্র তল-পরিমাণ 468 বর্গ সেন্টিমিটার হইলে, চৌপলটির মাত্রাগুলি নির্ণয় কর।

9. কোন ঘনকের প্রত্যেক তলের কর্ণ $8\sqrt{2}$ সেন্টিমিটার; ঘনকটির কর্ণের দৈর্ঘ্য ও ঘনফল কত?

10. কোন সমকোণী চৌপলের তলগুলির মোট ক্ষেত্রফল 496 বর্গ সেন্টি-মিটার। উহার দৈর্ঘ্য 16 সে. মি. ও প্রস্থ 8 সে. মি. হইলে উচ্চতা কত?

11. একটি সমকোণী চৌপলের দৈর্ঘ্য 12 মিটার, প্রস্থ 4 মিটার এবং বেধ 3 মিটার। উহার ভিতরে সর্বাধিক কত বড় দণ্ড রাখা যায়?

12. কোন সমকোণী চৌপলের দৈর্ঘ্য প্রস্থের 3 গুণ ও উচ্চতার 5 গুণ। উহার ঘনফল 14400 ঘন সে. মি. হইলে, উহার সমগ্র তল-পরিমাণ কত?

13. 18 মিটার দীর্ঘ ও 5 মিটার উচ্চ কোন সমকোণী চৌপলের তলগুলির মোট ক্ষেত্রফল 732 বর্গ মিটার হইলে, উহার প্রস্থ কত?

14. একটি সমকোণী চৌপলের কর্ণ 12 সে. মি. এবং উহার দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতার সমষ্টি 17 সেন্টিমিটার। উহার সমগ্র তল-পরিমাণ কত?

15. একটি সমকোণী চৌপলের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও বেধের অনুপাত 5 : 4 : 3 এবং উহার কর্ণের দৈর্ঘ্য $10\sqrt{2}$ সে. মিটার। উহার সমগ্র তল-পরিমাণ কত?

16. একটি জলাধারের দৈর্ঘ্য 10 মি., প্রস্থ 8 মিটার এবং উহাতে 20 ঘন মিটার জল আছে। ঐ জলের গভীরতা কত?

17. একটি সমকোণী চৌপলের দৈর্ঘ্য 36 মিটার, উচ্চতা 12 মিটার এবং কর্ণ 42 মিটার। উহার প্রস্থ কত?

18. 16 মি. দীর্ঘ, 12 সে. মি. বিস্তৃত ও 8 মি. উচ্চ একটি প্রাচীর নির্মাণ করিতে 10 সে. মি.×8 সে. মি.×6 সে. মি. মাপের কতগুলি ইট লাগিবে?

19. 15 সে. মিটার ধারবিশিষ্ট একটি ঘনক ধাতুখণ্ডকে গলাইয়া 3 সে. মি. ধারবিশিষ্ট কয়টি ঘনক প্রস্তুত করা যায়?

20. একটি সমকোণী চৌপলের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের অনুপাত 4 : 3 এবং উহার ঘনফল 2304 ঘন সেন্টিমিটার। প্রতি বর্গ সেন্টিমিটার 10 পয়সা হিসাবে উহার ভূমিতলে সীসা লাগাইতে 19 টাকা 20 পয়সা ব্যয় হইল। উহার মাত্রাগুলি নির্ণয় কর।

ত্রিভুজ (Triangle)

2. যে ত্রিভুজের একটি কোণ সমকোণ তাহাকে **সমকোণী** ত্রিভুজ (Right-angled Triangle) বলে। ঐ ত্রিভুজের সমকোণের বিপরীত বাহুকে **অতিভুজ** (Hypotenuse) বলে। অপর দুই বাহুর একটিকে ভূমি এবং অন্যটিকে কোটি বা লম্ব বলা হয়।

ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হইতে ভূমির উপর লম্বকে ত্রিভুজের **উচ্চতা** (Height বা Altitude) বলে।

3. জ্যামিতিতে পীথাগোরাসের উপপাদ্য হইতে **সমকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলির সম্বন্ধ** তোমরা জান।

(অতিভুজ)^2 = (ভূমি)^2 + (লম্ব)^2 [অপর বাহুদ্বয়ের বর্গের সমষ্টি]

∴ (ভূমি)^2 = (অতিভুজ)^2 − (লম্ব)^2

= (অতিভুজ + লম্ব) (অতিভুজ − লম্ব)।

(কোটি)^2 = (অতিভুজ)^2 − (ভূমি)^2

= (অতিভুজ + ভূমি) (অতিভুজ − ভূমি)।

4. জ্যামিতি হইতে পাই **ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}$ ভূমি $\times$ উচ্চতা।**

$\therefore$ ভূমি $=\frac{2\times \text{ক্ষেত্রফল}}{\text{উচ্চতা}}$, উচ্চতা $=\frac{2\times \text{ক্ষেত্রফল}}{\text{ভূমি}}$।

সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}$ ভূমি $\times$ লম্ব (কোটি)

$=\frac{1}{2}\times$ সমকোণ-সংলগ্ন দুই বাহুর গুণফল।

সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ : সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের

(অতিভুজ $)^2=2($ ভূমি $)^2=2($ লম্ব $)^2$,

অতিভুজ $=\sqrt{2}$ ভূমি $=\sqrt{2}$ লম্ব, এবং ভূমি বা লম্ব $=\frac{\text{অতিভুজ}}{\sqrt{2}}$।

5. **সমবাহু ত্রিভুজ : সমবাহু ত্রিভুজের উচ্চতা $=$ বাহু $\times\frac{\sqrt{3}}{2}$.**

সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $=($বাহু$)^2\times\frac{\sqrt{3}}{4}$.

6. **সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ :** সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হইতে ভূমির উপর লম্ব টানিলে উহা ভূমিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

সুতরাং, **সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের উচ্চতা**

$=\sqrt{\text{যে কোন সমান বাহুর বর্গ} - \text{ভূমির অর্ধেকের বর্গ}}$।

7. **বাহুদ্বারা যে কোন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় :**

মনে কর, একটি ত্রিভুজের বাহুগুলি যথাক্রমে a, b ও c একক দীর্ঘ এবং s উহার পরিসীমার অর্ধেক, অর্থাৎ $s=\frac{a+b+c}{2}$.

জ্যামিতির সাহায্যে পাওয়া যায়—

যে কোন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ **বর্গ একক।**

সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান বাহুদ্বয়ের প্রত্যেকটি a একক এবং তৃতীয় বাহুটি b একক দীর্ঘ হইলে, উহার ক্ষেত্রফল $=\frac{b}{4}\sqrt{4a^2-b^2}$ বর্গ একক।

উদাহরণ 1. একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ 15 সেণ্টিমিটার এবং অপর বাহুদ্বয়ের অন্তর 3 সে. মি. ; ঐ বাহু দুইটির দৈর্ঘ্য কত ?

মনে কর, ঐ বাহুদ্বয়ের ছোটটি a সে. মি., সুতরাং অন্যটি $(a+3)$ সে. মি.। এখানে অতিভুজ $=15$ সে. মি.,

$\therefore\ a^2+(a+3)^2=(15)^2$, বা, $a^2+a^2+6a+9=225$,

বা, $2a^2+6a-216=0$, বা, $a^2+3a-108=0$,

বা, $(a+12)(a-9)=0$, $\therefore\ a+12=0$, অথবা $a-9=0$,

$\therefore\ a=-12$ অথবা 9 (বাহুর মাপ ঋণাত্মক হইতে পারে না, সুতরাং এখানে $a=-12$ গ্রাহ্য নহে)।

$\therefore$ একটি বাহুর দৈর্ঘ্য $=9$ সেণ্টি মিটার

এবং অন্য বাহুর দৈর্ঘ্য $=9$ সে. মি. $+3$ সে. মি. $=12$ সেণ্টি মিটার।

উদাহরণ 2. 54 মিটার উচ্চ একটি তালগাছ ঝড়ে ভাঙ্গিয়া যাওয়ায় উহার অগ্রভাগ বৃক্ষমূল হইতে 18 মিটার দূরে ভূমি স্পর্শ করিল। গাছটি কত উচ্চে ভাঙ্গিয়াছিল ?

কখ বৃক্ষটি 54 মি. উচ্চ, **গ** বিন্দুতে উহা ভাঙ্গিয়া **ঘ** বিন্দুতে উহার **খ** অগ্রভাগ ভূমি স্পর্শ করিয়াছে। **কঘ** $=18$ মিটার। **কগ** নির্ণয় করিতে হইবে।

$(\text{কঘ})^2=(\text{গঘ})^2-(\text{কগ})^2$

$=(\text{গঘ}+\text{কগ})(\text{গঘ}-\text{কগ})$

$\therefore\quad (18)^2=54\times(\text{গঘ}-\text{কগ})$

$[\because\ \text{কগ}+\text{গঘ}=\text{কখ}=54]$

বা, $54(\text{গঘ}-\text{কগ})=324$, $\quad\therefore\ \text{গঘ}-\text{কগ}=324\div 54=6$;

এক্ষণে $\text{গঘ}+\text{কগ}=54$

এবং $\text{গঘ}-\text{কগ}=6$

(যোগ) $\therefore\ 2\text{গঘ}=60$, $\therefore\ \text{গঘ}=30$, $\therefore\ \text{কগ}=54-30=24$.

অতএব, বৃক্ষটি 24 মিটার উঁচুতে ভাঙ্গিয়াছিল।

[**অন্য প্রণালী**] মনে কর, **গঘ** $=x$ মি., সুতরাং **কগ** $=(54-x)$ মি.।

এক্ষণে, $x^2-(54-x)^2=18^2$, বা, $x^2-2916+108x-x^2=324$,

বা, $108x=324+2916=3240$, $\quad\therefore\ x=30$.

$\therefore$ নির্ণেয় উচ্চতা $=54$ মি. -30 মি. $=24$ মিটার।

উদাহরণ 3. কোন সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ-সংলগ্ন বাহুদ্বয় 4 সে. মি. ও 3 সে. মিটার। সমকোণ হইতে অতিভুজের উপর লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

মনে কর, সমকোণ হইতে অতিভুজের উপর লম্ব $=l$ সে. মিটার।

এখানে, অতিভুজ $=\sqrt{4^2+3^2}$ সে. মি. $=5$ সে. মিটার।

$\therefore$ ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}\times 5$ সে. মি. $\times$ সমকোণ হইতে অতিভুজের উপর লম্ব

$=\frac{5}{2}l$ বর্গ সেন্টিমিটার।

আবার, সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}\times$ সমকোণধারক বাহুদ্বয়ের গুণফল ;

$\therefore$ এখানে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}\times 4\times 3$ বর্গ সে. মি. $=6$ বর্গ সে. মি.

$\therefore\ \frac{5}{2}l=6$, $\quad\therefore\ l=\frac{6\times 2}{5}$ সে. মি. $=2{\cdot}4$ সেন্টিমিটার।

উদাহরণ 4. একটি বর্গক্ষেত্রের কর্ণ $10\sqrt{3}$ সেন্টিমিটার এবং একটি সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল ঐ বর্গক্ষেত্রের সমান। ত্রিভুজটির কোন বাহুর উপর বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত করিলে তাহার ক্ষেত্রফল কত হইবে ?

এখানে মনে কর, বর্গক্ষেত্রের বাহু $=a$ সেন্টিমিটার

$\therefore$ $2a^2=($ কর্ণ $)^2=(10\sqrt{3})^2$ বর্গ সে. মি.,

বা, $2a^2=300$ বর্গ সে. মি., $\therefore$ $a^2=150$ বর্গ সে. মি.।

অতএব, বর্গক্ষেত্রের কালি $=150$ বর্গ সে. মিটার।

আবার, সমবাহু ত্রিভুজের কালি $=\frac{\sqrt{3}}{4}$ (বাহু)^2

$\therefore$ এখানে $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (বাহু)$^2=150$ বর্গ সে. মি.

বা, (বাহু)$^2=\frac{150\times 4}{\sqrt{3}}=\frac{600}{\sqrt{3}}=\frac{600\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{600\times\sqrt{3}}{3}$

$=200\sqrt{3}$ বর্গ সে. মি.

$\therefore$ ঐ সমবাহু ত্রিভুজের বাহুর উপর বর্গক্ষেত্র আঁকিলে তাহার ক্ষেত্রফল হইবে $200\sqrt{3}$ বর্গ সেন্টিমিটার।

উদাহরণ 5. কোন ত্রিভুজের দুইটি বাহু যথাক্রমে 6 সে. মি. ও 8 সে. মি. এবং উহার পরিসীমা 24 সে. মি. হইলে, উহার ক্ষেত্রফল কত?

এখানে তৃতীয় বাহু $=24$ সে. মি. $-(6$ সে. মি. $+8$ সে. মি.$)=10$ সে. মি.

এবং পরিসীমার অর্ধেক $=\frac{1}{2}\times 24$ সে. মি. $=12$ সে. মিটার,

$\therefore$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

[$s=$ অর্ধ-পরিসীমা এবং a, b, c বাহুত্রয়]

$=\sqrt{12\times(12-6)\times(12-8)\times(12-10)}$ বর্গ সে. মি.

$=\sqrt{12\times 6\times 4\times 2}$ বর্গ সে. মি. $=24$ বর্গ সেন্টিমিটার।

প্রশ্নমালা 2

1. একটি ত্রিভুজের বাহুগুলি যথাক্রমে 5, 6 ও 7 সেন্টিমিটার; উহার ক্ষেত্রফল কত?

2. একটি সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণধারক বাহুদ্বয় যথাক্রমে 15 সে. মি. ও 20 সে. মি.; উহার অতিভুজ ও কালি নির্ণয় কর।

3. 13 মিটার দীর্ঘ একটি মই কোন রাস্তার এক পার্শ্ব হইতে অপর পার্শ্বস্থিত একটি প্রাচীর-গাত্রে 12 মিটার উপরে ঠেকান ছিল। রাস্তাটির পরিসর কত?

4. একটি বেলুন কোন ছাদের একস্থান হইতে 240 মিটার উপরে উঠিল এবং তখন বায়ুচালিত হইয়া সমকোণে 70 মিটার দূরে সরিয়া গেল। তখন ঐ স্থান হইতে বেলুনটির দূরত্ব কত?

5. 6 ফুট উচ্চ এক ব্যক্তি 126 ফুট উচ্চ পর্বতের পাদদেশ হইতে 90 ফুট দূরে সরিয়া গেল। ঐ ব্যক্তির মস্তক হইতে পর্বত-চূড়ার দূরত্ব কত?

6. একটি সমকোণী ত্রিভুজের একটি বাহু 36 সে. মি., এবং অতিভুজ ও অন্য বাহুটির সমষ্টি 54 সে. মি. ; অতিভুজ ও অপর বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

7. একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ 26 সে. মিটার এবং অপর বাহুদ্বয়ের অন্তর 14 সে. মিটার। বাহু দুইটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

8. 32 মিটার উচ্চ একটি তালগাছ ঝড়ে ভাঙ্গিয়া যাওয়ায় উহার অগ্রভাগ আসিয়া গাছের মূল হইতে 8 মিটার দূরে ভূমি স্পর্শ করিল। গাছটি কত উঁচুতে ভাঙ্গিয়াছিল?

9. কোন সমকোণী ত্রিভুজের একটি বাহু 588 সে. মি. এবং অতিভুজ ও অন্য বাহুর সমষ্টি 882 সে. মি. হইলে, অতিভুজ ও ঐ বাহুর দৈর্ঘ্য কত? [ক্ল.ই.]

10. 24 মিটার দীর্ঘ একটি মই কোন প্রাচীর গাত্রে সোজা দাঁড় করান আছে। উহার নিম্ন-প্রান্ত প্রাচীর-গাত্র হইতে কতটা টানিয়া লইলে উহার অপর প্রান্ত পূর্বাপেক্ষা 3 মিটার নামিয়া পড়িবে?

11. কোন হ্রদে একটি কমলকলিকার অগ্রভাগ জলতল হইতে 1 সে. মি. উপরে ছিল এবং বায়ুচালিত হইয়া উহা ক্রমশঃ সরিয়া গিয়া জলতলের পূর্বস্থান হইতে 4 সেন্টিমিটার দূরে জলের সঙ্গে মিশিল। জলের গভীরতা নির্ণয় কর।

12. একটি গম্বুজ হইতে 160 মিটার দূরে কোন বিন্দুতে গম্বুজটির যে সম্মুখকোণ ছিল, গম্বুজের দিকে সমরেখায় আরও 100 মিটার অগ্রবর্তী বিন্দুতে গম্বুজের সম্মুখকোণ তাহার দ্বিগুণ হইল। গম্বুজটির উচ্চতা কত?

13. একটি সমকোণী ত্রিভুজের পরিসীমা 60 সে. মি. এবং অতিভুজটি 26 সে. মি. হইলে, অপর বাহু দুইটির দৈর্ঘ্য কত?

14. একটি দীর্ঘ সরল তৃণশ্রেণী হইতে 8 মিটার দূরে 17 মিটার দীর্ঘ দড়ি দিয়া একটি গরু বাঁধা আছে। গরুটি ঐ তৃণশ্রেণীর কতটা দৈর্ঘ্য পর্যন্ত ঘাস খাইতে পারিবে?

15. একটি সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের পরিসীমা $\sqrt{2}+1$ সেন্টিমিটার হইলে, উহার অতিভুজের দৈর্ঘ্য কত?

16. একটি সমবাহু ত্রিভুজের প্রত্যেক বাহু 8 সেন্টিমিটার হইলে, উহার উচ্চতা কত?

17. একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি 12 সে. মি. এবং সমান বাহুদ্বয়ের প্রত্যেকটি 10 সে. মি. হইলে উহার উচ্চতা কত?

•18. ঘণ্টায় 18 মাইল বেগে সাইকেল চালাইয়া এক ব্যক্তি 10 মিনিটে একটি সমবাহু ত্রিভুজাকার মাঠের পরিসীমা ঘুরিয়া আসিল। ঐ মাঠের এক কোণ হইতে বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দুতে সোজা যাইতে তাহার কত সময় লাগিবে?

19. একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ 3 সে. মি. 9 মিলি মি. এবং একটি বাহু 1 সে. মি. 5 মিলি মিটার হইলে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল কত ?

20. একটি সমবাহু ত্রিভুজের প্রত্যেক বাহু 8 সেন্টিমিটার হইলে, উহার ক্ষেত্রফল কত ?

21. একটি সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল 25 বর্গ ইঞ্চি ; উহার পরিসীমা নির্ণয় কর। [এ. প্র.]

22. কোন সমবাহু ত্রিভুজের উচ্চতা 18 সে. মি. ; উহার ক্ষেত্রফল কত ?

23. একটি ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের একটি বাহু 150 মি. এবং উহার উপর বিপরীত কৌণিক বিন্দু হইতে লম্বের দৈর্ঘ্য 80 মিটার। ক্ষেত্রটির কালি কত ?

24. একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ যথাক্রমে 40 মিটার ও 30 মিটার। উহার একটি কর্ণ ক্ষেত্রটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করিল। প্রত্যেক খণ্ডের ক্ষেত্রফল ও কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

25. একটি বর্গক্ষেত্রের কর্ণ 120 মিটার। উহার সহিত সমান আয়তন-বিশিষ্ট সমবাহু ত্রিভুজের প্রত্যেক বাহুর পরিমাণ কত ? [ক. ই.]

26. কোন সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণধারক বাহুদ্বয় যথাক্রমে 9 সে. মি. ও 12 সে. মিটার। সমকোণ হইতে অতিভুজের উপর লম্বের দৈর্ঘ্য কত হইবে ?

27. ত্রিভুজের দুইটি বাহু যথাক্রমে 85 মিটার ও 154 মিটার এবং পরিসীমা 324 মিটার হইলে, উহার ক্ষেত্রফল কত ?

28. একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি 16 সে. মি. এবং অপর দুই বাহুর প্রত্যেকটি 17 সেন্টিমিটার। উহার ক্ষেত্রফল কত ?

29. একটি ত্রিভুজের বাহুগুলি যথাক্রমে 13 মি., 14 মি. ও 15 মিটার ; দ্বিতীয় বাহুটির উপর বিপরীত কৌণিক বিন্দু হইতে লম্বের দৈর্ঘ্য কত ?

30. কোন সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের পরিসীমা 544 সেন্টিমিটার এবং প্রত্যেক সমান বাহু ভূমির $\frac{5}{8}$; ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল কত ?

31. একটি ত্রিভুজাকার প্রাঙ্গণ পাকা করিবার খরচ 100 পাউণ্ড। প্রতি বর্গফুটের খরচ 1 শি. 3 পে. এবং একটি বাহু 24 গজ হইলে, অপর দুই সমান বাহুর দৈর্ঘ্য কত ? [ক. সা.]

32. কোন ত্রিভুজের বাহু তিনটির অনুপাত 3 : 4 : 5 এবং পরিসীমা 432 মিটার ; ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

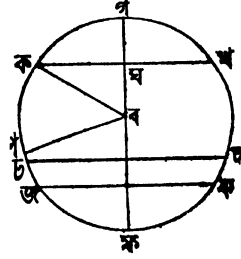
33. কোন সমবাহু ত্রিভুজের অন্তঃস্থ কোন বিন্দু হইতে বাহুগুলির উপর লম্ব টানা হইল। লম্বত্রয়ের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 8, 10 ও 12 সেন্টিমিটার হইলে, উহার বাহুর দৈর্ঘ্য ও ক্ষেত্রফল কত ?

বৃত্ত (Circle)

8. জ্যামিতিতে তোমরা বৃত্ত, কেন্দ্র, ব্যাস, ব্যাসার্ধ, পরিধি, চাপ (Arc), জ্যা (Chord) প্রভৃতি কাহাকে বলে তাহা পড়িয়াছ।

কোন চাপের দুই প্রান্তবিন্দুর সংযোজক সরল রেখাকে ঐ চাপের জ্যা (Chord of the arc) বলে।

কোন চাপের একটি প্রান্তবিন্দুর সহিত ঐ চাপের মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরল রেখাকে অর্ধচাপের জ্যা (Chord of half an arc) বলা হয়।

চিত্রে **কগখ** চাপের মধ্যবিন্দু **গ** এবং **কখ** ঐ চাপের জ্যা। **গঘ⊥কখ** হইলে, **গঘ**-কে ঐ **কগখ চাপের উচ্চতা** বলে। আর **কগ** সরল রেখা উহার অর্ধচাপের জ্যা হইবে।

[**দ্রষ্টব্য :** জ্যামিতি হইতে জানা যায় যে, **কগখ** চাপের মধ্যবিন্দু **গ** হইতে **কখ** জ্যা-এর উপর **গঘ** লম্ব বলিয়া **কখকে গঘ** সমদ্বিখণ্ডিত করে এবং **গঘ**-কে পরিধি পর্যন্ত বর্ধিত করিলে **গফ** ঐ বৃত্তের ব্যাস (Diameter) হইবে।]

দুইটি সমান্তরাল জ্যা ও তাহাদের মধ্যবর্তী দুই পার্শ্বের চাপদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে Zone of the circle বলে। উপরের চিত্রে **চছঝজচ** একটি Zone.

9. বৃত্তের পরিধি (Circumference)

যে কোন বৃত্তের পরিধি ও ব্যাসকে মাপিলে দেখা যাইবে যে পরিধিটি ব্যাসের প্রায় $\frac{22}{7}$ গুণ।

$\frac{\text{পরিধি}}{\text{ব্যাস}}=\pi$, এখানে π একটি গ্রীক অক্ষর পাই (Pi), উহার মান সাধারণতঃ $\frac{22}{7}$ ধরা হয়। $\pi=\frac{22}{7}$ অথবা $\pi=3{\cdot}1415926\cdots$

যে-কোন বৃত্তের পরিধি $=\pi\times$ ব্যাস $=2\pi\times$ ব্যাসার্ধ,

অর্থাৎ $C=2\pi r$ (এখানে C বৃত্তের পরিধি এবং r ব্যাসার্ধ)।

উদাহরণ 1. একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ 1 ডেসি মি. 4 সে. মিটার হইলে উহার পরিধি কত হইবে? [$\pi=\frac{22}{7}$]

এখানে ব্যাসার্ধ = 1 ডেসিমি. 4 সে. মি. = 14 সে. মিটার,

∴ পরিধি $=2\pi r=2\times\frac{22}{7}\times14$ সে.মি. $=88$ সে.মি. $=8$ ডেসিমি. 8 সে.মি.।

উদাহরণ 2. একটি চক্রের পরিধি 6 ডেকা মি. 6 মিটার হইলে উহার ব্যাস কত? $[\pi=\frac{22}{7}]$

এখানে পরিধি $=$ 6 ডে. মি. 6 মি. $=$ 66 মিটার।

$\therefore$ নির্ণেয় ব্যাস $=\frac{\text{পরিধি}}{\pi}=\frac{66}{\frac{22}{7}}$ মি. $=\frac{66\times 7}{22}$ মি. $=$ 21 মিটার।

উদাহরণ 3. একটি বৃত্তাকার পার্কের ব্যাসার্ধ 21 মিটার; প্রতি মিটারে 25 পয়সা হিসাবে উহাকে বেড়া দিয়া ঘিরিতে কত ব্যয় হইবে? $[\pi=\frac{22}{7}]$

পার্কের পরিধি $=2\pi r=2\times\frac{22}{7}\times 21$ মি. $=$ 132 মিটার,

$\therefore$ নির্ণেয় খরচ $=$ 25 প. $\times$ 132 $=$ 33 টাকা।

উদাহরণ 4. একটি চক্রের পরিধি ও ব্যাসের অন্তর 45 ডেসি মিটার হইলে উহার ব্যাসার্ধ কত? $[\pi=\frac{22}{7}]$

পরিধি $=\pi\times$ ব্যাস, সুতরাং এখানে $\pi\times$ ব্যাস $-$ ব্যাস $=$ 45 ডেসিমি.,

বা, ব্যাস $(\pi-1)=$ 45 ডেসিমি., বা, ব্যাস $\times(\frac{22}{7}-1)=$ 45 ডেসিমি.,

বা, ব্যাস $\times\frac{15}{7}=$ 45 ডেসিমি.,

$\therefore$ ব্যাস $=\frac{45\times 7}{15}$ ডেসিমি. $=$ 21 ডেসিমি.।

$\therefore$ নির্ণেয় ব্যাসার্ধ $=10\frac{1}{2}$ ডেসি মিটার।

উদাহরণ 5. একটি বৃত্তাকার উদ্যানকে ঘিরিয়া একটি পথ আছে। ঐ পথটির বাহিরের পরিধি 912 মিটার এবং ভিতরের পরিধি 868 মিটার হইলে পথটির পরিসর কত? $[\pi=\frac{22}{7}]$

মনে কর, বৃত্তাকার পথটির বাহিরের দিকের বৃত্তের পরিধি C ও ব্যাসার্ধ R এবং ভিতরের দিকের বৃত্তের পরিধি c ও ব্যাসার্ধ r; সুতরাং পথের পরিসর $R-r$ হইবে। এক্ষণে, $C=2\pi R$, এবং $c=2\pi r$.

$\therefore$ $2\pi R-2\pi r=C-c=$ 912 মি. $-$ 868 মি. $=$ 44 মি.

বা, $2\pi(R-r)=$ 44 মি.; বা, $2\times\frac{22}{7}(R-r)=$ 44 মি.

$\therefore$ $R-r=\frac{44\times 7}{2\times 22}$ মি. $=$ 7 মি.

অতএব, পথটির নির্ণেয় পরিসর $=$ 7 মিটার।

উদাহরণ 6. কোন ঘড়ির কাঁটা দুইটির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 4 সে. মি. ও 3 সে. মিটার। 1 দিন 6 ঘণ্টায় একটি কাঁটার প্রান্তবিন্দু অন্যটির প্রান্তবিন্দু অপেক্ষা কত অধিক দূরত্ব ঘুরিবে?

ঘড়ির মিনিটের কাঁটার প্রান্তভাগ 1 ঘণ্টায় 4 সে. মি. ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের পরিধির সমান দূরত্ব ঘুরিবে।

$\therefore$ 1 ঘণ্টায় মিনিটের কাঁটা ঘুরিবে $2\pi\times 4$ সে. মি.

$\therefore$ 1 দিন 6 ঘ. বা 30 ঘণ্টায় উহা ঘুরিবে $2\times\frac{22}{7}\times 4\times 30$ সে. মি.।

আবার, 12 ঘণ্টায় ঘণ্টার কাঁটার প্রান্তবিন্দু 3 সে. মি. ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের পরিধির সমান দূরত্ব অর্থাৎ $2\pi \times 3$ সে. মি. ঘুরিবে ;

$\therefore$ উহা 30 ঘণ্টায় ঘুরিবে $\frac{2\pi \times 3 \times 30}{12}$ সে. মি. বা $\frac{15 \times 22}{7}$ সে. মি.।

$\therefore$ উভয় দূরত্বের অন্তর $= (\frac{240 \times 22}{7} - \frac{15 \times 22}{7})$ সে. মি.

$= \frac{22}{7}(240 - 15)$ সে. মি. $= \frac{22}{7} \times 225$ সে. মি.

$= \frac{4950}{7}$ সে. মি. $= 7$ মি. $7\frac{1}{7}$ সে. মিটার।

প্রশ্নমালা 3

[$\pi = \frac{22}{7}$ ধরিয়া নিম্নের প্রশ্নগুলির সমাধান করিবে]

1. নিম্নে বৃত্তের ব্যাস দেওয়া আছে, মুখে মুখে পরিধি নির্ণয় কর :

(1) 7 সে. মি. ; (2) 1 ফুট 9 ইঞ্চি ; (3) 4 ফুট 8 ইঞ্চি ; (4) 7 মিটার।

2. নিম্নে বৃত্তের ব্যাসার্ধ দেওয়া আছে, মুখে মুখে পরিধি নির্ণয় কর :

(1) 14 ডেসি মি. ; (2) 2 মি. 1 ডেসি মি. (3) 2 ফুট 4 ইঞ্চি ; (4) 3 ফুট 6 ইঞ্চি।

3. নিম্নে বৃত্তের পরিধি দেওয়া আছে, ব্যাস নির্ণয় কর :—

(1) 88 মিটার, (2) 7 গ. 1 ফু. (3) 7 ফু. 4 ই., (4) 6 মি. 6 ডেসিমি.।

4. একটি চাকার ব্যাস 5 ফুট 3 ইঞ্চি, উহা 120 বার ঘুরিলে কতদূর যাইবে ?

5. যে চক্রের ব্যাসার্ধ 21 ফুট, তাহা $4\frac{1}{2}$ মাইল পথ যাইতে কতবার ঘুরিবে ?

6. যে চাকা 7 কি. মি. 40মি. যাইতে 320 বার ঘোরে, তাহার ব্যাস কত ?

7. 21 মি. 12 সে. মি. যাইতে একটি চাকা 32 বার এবং আর একটি চাকা 48 বার ঘুরিল, উভয় চাকার ব্যাসার্ধের অন্তর কত ?

8. একটি বৃত্তাকার প্রাঙ্গণের ব্যাস 10 ফুট 6 ইঞ্চি, উহাকে প্রতি গজ 1 শিলিং 6 পেন্স হিসাবে লৌহ-তার দিয়া ঘিরিতে কত ব্যয় হইবে ?

9. একটি গোলাকার তৃণভূমিকে বেড়া দিতে 16 টাকা 50 পয়সা খরচ হইল। প্রতি মিটারে $\frac{3}{4}$ টাকা খরচ হইলে ঐ ভূমির ব্যাসার্ধ কত ?

10. দুইটি বৃত্তের পরিধির অন্তর 22 মিটার এবং উহাদের ব্যাসার্ধ দুইটির সমষ্টি 10 মিটার 5 ডেসি মিটার। উহাদের পরিধি নির্ণয় কর।

11. দুইটি বৃত্তের ব্যাসার্ধদ্বয়ের অন্তর 4 সে. মিটার এবং উহাদের পরিধি দুইটির সমষ্টি 1 মি. 76 সে. মিটার। উহাদের ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

12. একটি বৃত্তের পরিধি অপর বৃত্তের পরিধির দেড়গুণ এবং উহাদের ব্যাসার্ধদ্বয়ের অন্তর 21 সেন্টিমিটার হইলে, ব্যাসার্ধ দুইটি কত হইবে ?

13. একটি গাড়ীর চাকার ব্যাস 2 ফুট 11 ইঞ্চি ; উহা প্রতি মিনিটে 96 বার ঘুরিলে, ঘণ্টায় উহার গতিবেগ কত ?

14. একটি গাড়ীর চাকা 10 মিনিটে 500 বার ঘোরে ; গাড়ীর গতিবেগ ঘণ্টায় 6 কি. মি. 6 হে. মিটার হইলে, উহার চাকার ব্যাস কত ?

15. একটি বৃত্তের ব্যাস ও পরিধির সমষ্টি 8 ডেসি মি. 7 সে. মি. হইলে উহার ব্যাসার্ধ ও পরিধি কত ?

16. কোন বৃত্তের পরিধি ও ব্যাসার্ধের অন্তর 74 সেন্টিমিটার ; উহার ব্যাস ও পরিধি নির্ণয় কর।

17. পরিধি ও ব্যাসের অন্তর 60 ফুট, বৃত্তটির ব্যাসার্ধ কত ? [মা. টে.]

18. একটি বৃত্তাকার তৃণক্ষেত্র বেষ্টন করিয়া যে পথ আছে তাহার বাহিরের প্রান্তের পরিধি 500 মিটার ও ভিতরের প্রান্তের পরিধি 478 মিটার। পথটির পরিসর কত ?

19. প্রতি মিনিটে 66 মিটার বেগে $1\frac{1}{2}$ মিনিটে একটি ঘোড়া কোন বৃত্তাকার মাঠ ঘুরিয়া আসিল। ঐ মাঠের ব্যাসার্ধ কত ?

20. এক ব্যক্তি দেখিল যে কোন বৃত্তাকার মাঠ প্রদক্ষিণ করিতে তাহার যে সময় লাগে, মাঠটিকে সোজাসুজি মধ্যস্থল দিয়া পার হইতে তাহা অপেক্ষা 45 সেকেণ্ড কম সময় লাগে। তাহার গতি মিনিটে 80 গজ হইলে, ঐ মাঠের ব্যাস কত ? [ক. প্র.]

*21. একটি গোলাকার পথকে বাহিরের প্রান্ত দিয়া এবং ভিতর দিকের প্রান্ত দিয়া পরিভ্রমণ করিতে যথাক্রমে 46 ও 44 সেকেণ্ড সময় লাগে। পথটির পরিসর 7 মিটার 5 ডেসি মিটার হইলে, উহার ভিতরের প্রান্ত দ্বারা গঠিত বৃত্তের ব্যাস কত ?

22. একটি তারকে বৃত্তাকারে পরিণত করিলে তাহার ব্যাস 5 ডেসি মি. 6 সেন্টিমিটার হয়। উহাকে বর্গাকারে পরিণত করিলে সেই বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য কত হইবে ?

23. একটি ঘড়ির কাঁটা দুইটি যথাক্রমে 5 ও 4 সেন্টিমিটার দীর্ঘ। 2 দিন 6 ঘণ্টায় একটি কাঁটার অগ্রভাগ অপর কাঁটার অগ্রভাগ অপেক্ষা কত বেশী দূরত্ব ঘুরিবে ?

24. শ্রীরামচন্দ্রের অর্ধবৃত্তাকার ধনুর ও তাহার ছিলার দৈর্ঘ্যের সমষ্টি ছিল 108 ইঞ্চি। ছিলাটির দৈর্ঘ্য কত ছিল ?

বৃত্তের ক্ষেত্রফল

10. **বৃত্তের ক্ষেত্রফল** $= \pi \times$ (ব্যাসার্ধ)$^2 = \pi r^2$ (r বৃত্তের ব্যাসার্ধ)।

যে বৃত্তাকার সমতল ক্ষেত্র দুইটি এককেন্দ্রীয় বৃত্তদ্বারা সীমাবদ্ধ তাহার ক্ষেত্রফল $= \pi(R^2 - r^2) = \pi(R+r)(R-r)$, R ও r যথাক্রমে বৃত্ত দুইটির ব্যাসার্ধ।

উদাহরণ 1. একটি বৃত্তের ব্যাস 14 সে. মি., উহার ক্ষেত্রফল কত? [$\pi = \frac{22}{7}$]

ব্যাস = 14 সে. মিটার, ∴ ব্যাসার্ধ = 7 সে. মিটার।

∴ বৃত্তটির ক্ষেত্রফল $= \pi r^2 = \frac{22}{7} \times 7^2$ বর্গ সে. মি. = 154 বর্গ সে. মি.।

উদাহরণ 2. একটি বৃত্তের ক্ষেত্রফল 4 বর্গফুট 40 বর্গ ইঞ্চি, উহার ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। [$\pi = \frac{22}{7}$]

4 বর্গফুট 40 বর্গ ইঞ্চি $= \frac{77}{18}$ বর্গফুট,

∴ নির্ণেয় ব্যাসার্ধ $= \sqrt{\frac{\text{ক্ষেত্রফল}}{\pi}} = \sqrt{\frac{77}{18} \div \frac{22}{7}}$ ফুট $= \sqrt{\frac{77}{18} \times \frac{7}{22}}$ ফুট

$= \sqrt{\frac{49}{36}}$ ফু $= \frac{7}{6}$ ফুট = 1 ফুট 2 ইঞ্চি।

উদাহরণ 3. একটি বৃত্তের ক্ষেত্রফল 1 বর্গ মিটার 54 বর্গ ডেসি মিটার; উহার পরিধি নির্ণয় কর। [$\pi = \frac{22}{7}$]

বৃত্তটির ক্ষেত্রফল = 1 বর্গ মি. 54 বর্গ ডেসি মি. = 154 বর্গ ডেসি মি.;

∴ বৃত্তের ব্যাসার্ধ $= \sqrt{\frac{\text{ক্ষেত্রফল}}{\pi}} = \sqrt{\frac{154 \times 7}{22}}$ ডেসি মি. = 7 ডেসি মি.

∴ বৃত্তটির পরিধি $= 2\pi \times$ ব্যাসার্ধ $= 2 \times \frac{22}{7} \times 7$ ডেসিমি. = 44 ডেসি মি.।

উদাহরণ 4. 35 সে. মি. ও 21 সে. মি. ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট দুইটি সমকেন্দ্রীয় বৃত্তের পরিধি দ্বারা সীমাবদ্ধ বৃত্তাকার ক্ষেত্রের কালি কত? [$\pi = \frac{22}{7}$]

ঐ ক্ষেত্রের কালি $= \pi(R+r)(R-r)$, [R ও r দুই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

$= \frac{22}{7}$ (35 সে. মি. + 21 সে. মি.)(35 সে. মি. − 21 সে. মি.)

$= \frac{22}{7} \times 56 \times 14$ বর্গ সে. মি. = 2464 বর্গ সে. মি.

= 24 বর্গ ডেসি মি. 64 বর্গ সে. মি.।

উদাহরণ 5. একটি গরুকে কত মিটার দীর্ঘ রজ্জুদ্বারা কোন তৃণক্ষেত্রে বাঁধিয়া রাখিলে সে 616 বর্গমিটার পরিমাণ স্থানের তৃণ ভক্ষণ করিতে পারিবে? [$\pi = \frac{22}{7}$]

এখানে গরুটি বৃত্তাকারে পরিভ্রমণ করিতে পারিবে এবং সেই বৃত্তের ব্যাসার্ধ হইবে রজ্জুটির দৈর্ঘ্য।

বৃত্তের প্রদত্ত ক্ষেত্রফল $= 616$ বর্গ মিটার

$\therefore$ $\pi \times$ (ব্যাসার্ধ)$^2 = 616$ বর্গমিটার,

$\therefore$ (ব্যাসার্ধ)$^2 = \frac{616 \times 7}{22}$ বর্গ মি. $= 28 \times 7$ বর্গ মিটার,

$\therefore$ ব্যাসার্ধ $= \sqrt{28 \times 7}$ মি. $= 14$ মিটার।

অতএব, নির্ণেয় রজ্জুর দৈর্ঘ্য $= 14$ মিটার।

প্রশ্নমালা 4

[$\pi = \frac{22}{7}$ ধরিবে]

1. নিম্নে বৃত্তের ব্যাসার্ধ দেওয়া আছে, ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর :—

(1) 14 সে. মি. ; (2) 2 ফু. 11 ই. ; (3) 4·2 মি. ; (4) 1গ. 6ই.।

2. নিম্নে বৃত্তের ব্যাস দেওয়া আছে, ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর :—

(1) 7 মি. ; (2) 3গ. 2ফু. 8ই. ; (3) 12·6 মি. ; (4) 2 মি. 8 ডেসিমি.।

3. নিম্নে বৃত্তের ক্ষেত্রফল দেওয়া আছে, ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর :—

(1) 616 বর্গমিটার ; (2) 2 বর্গগজ 8 ব. ফু. 106 ব. ই.

(3) 1232 বর্গমিটার ; (4) 221·76 বর্গ সেন্টিমিটার।

4. বৃত্তের ক্ষেত্রফল 1386 বর্গফুট হইলে, উহার পরিধি কত? [এ. প.]

5. একটি বৃত্তের ক্ষেত্রফল 385 একর, উহার পরিধি কত? [পা. প্র.]

6. অর্ধ একর আয়তনের একটি বৃত্তাকার পুষ্করিণী খনন করিতে হইবে। কত বড় রজ্জু দ্বারা উহার পরিধি চিহ্নিত করা যাইবে? [রু. আ. সা.]

7. 8 সে. মি. ও 6 সে. মি. ব্যাসার্ধবিশিষ্ট দুইটি সমকেন্দ্রীয় বৃত্ত দ্বারা সীমাবদ্ধ বলয়ের কালি কত?

8. 2 ডেসি মি. 4 সে. মিটার এবং 1 ডেসিমিটার ব্যাসার্ধের দুইটি এক-কেন্দ্রীয় বৃত্ত আঁকিলে, উহাদের পরিধিদ্বয়ের মধ্যবর্তী অংশের ক্ষেত্রফল কত হইবে?

9. একটি বলয়াকার ক্ষেত্রের বহির্বৃত্তের ব্যাসার্ধ 342 ফুট এবং অন্তর্বৃত্তের ব্যাসার্ধ উহার অর্ধেক হইলে, ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল কত? [পা. প্র.]

10. একটি বৃত্তাকার বলয়ের ক্ষেত্রফল 352 বর্গ সেন্টিমিটার এবং উহার বহির্বৃত্তের ব্যাসার্ধ 16 সে. মি. হইলে, উহার অন্তর্বৃত্তের ব্যাসার্ধ কত হইবে?

11. একটি গোলাকার তৃণক্ষেত্রকে বেষ্টন করিয়া যে পথ আছে তাহার বাহিরের সীমারেখা ও ভিতরের সীমারেখা যথাক্রমে 500 ও 300 গজ হইলে, পথটির ক্ষেত্রফল কত হইবে? [পা. প্র.]

12. যে বৃত্তাকার প্রাঙ্গণের ব্যাস 56 মিটার, তাহা প্রতি বর্গ মিটারে 25 পয়সা হিসাবে পাকা করিতে কত ব্যয় হইবে ?

13. একটি বৃত্তাকার পার্কের ব্যাস 26 মিটার, উহাকে বেষ্টন করিয়া 2 মিটার প্রশস্ত একটি পথ আছে। পথটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

14. একটি বৃত্তাকার তাম্রপাতের মূল্য 2 টাকা 75 পয়সা এবং উহার প্রতি বর্গ ডেসি মিটারের মূল্য 3·5 পয়সা হইলে, পাতটির ব্যাসার্ধ কত ?

15. 40 মিটার ব্যাসার্ধের একটি বৃত্তাকার তৃণক্ষেত্রকে বেষ্টন করিয়া একটি পথ আছে। ক্ষেত্রের ও পথের ক্ষেত্রফল সমান হইলে, পথটির পরিসর কত হইবে ?

16. একটি বৃত্তাকার মাঠকে বেষ্টন করিয়া একটি পথ আছে। পথটির বাহিরের সীমারেখা ভিতরের সীমারেখা অপেক্ষা 44 গজ অধিক হইলে, উহার পরিসর কত ? [ক্র আ. সা.]

17. যে বৃত্তের ব্যাসার্ধ 5 ডেসি মিটার 6 সে. মি. তাহার সম-আয়তনের বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য কত ?

18 একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ যথাক্রমে 6 মি. 3 ডেসিমি. ও 2 মি. 2 ডেসিমিটার। উহার সমান আয়তনের বৃত্তের ব্যাসার্ধ কত হইবে ?

19. একটি তৃণক্ষেত্রের 38 বর্গ ডে. মি. 50 বর্গ মিটার পরিমাণ স্থানের ঘাস খাইতে পারে এরূপভাবে একটি গরু দড়ি দিয়া বাঁধা আছে। ঐ দড়িটির দৈর্ঘ্য কত ?

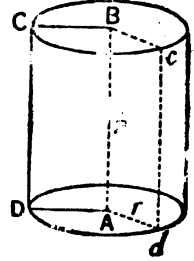
20 একটি বৃত্তাকার গৃহের ব্যাস 68 ফুট 10 ইঞ্চি এবং উহার দেওয়াল 22 ইঞ্চি পুরু। দেওয়ালটি কত বর্গফুট ভূমির উপর অবস্থিত ? [ক্র. আ. সা]

***21.** একটি গোলাকার তৃণক্ষেত্রের ব্যাস 40 মিটার এবং উহার শেষপ্রান্ত হইতে 1 মি. দূরে উহার ভিতর 1 মিটার বিস্তৃত একটি বৃত্তাকার পথ আছে। প্রতি বর্গমিটারে 22 পয়সা হিসাবে ঐ পথে ঘাস লাগাইতে কত ব্যয় হইবে ?

বৃত্তাকার চোঙ (Circular cylinder)

11. কোন আয়তক্ষেত্রের একটি বাহুকে অক্ষ (axis) করিয়া আয়তক্ষেত্রটিকে ঘুরাইলে যে ঘন উৎপন্ন হয় তাহাকে **লম্ব বৃত্তাকার চোঙ** (Right circular cylinder) বলে।

ইহার উদাহরণস্বরূপ বার্লির কৌটা, ড্রাম, গোটা পেন্সিল, উপর্যুপরি স্থাপিত পয়সার স্তূপ প্রভৃতি ধরা যাইতে পারে।

ABCD আয়তক্ষেত্রটির AB বাহুকে স্থির রাখিয়া বা অক্ষ ধরিয়া উহাকে ঘুরাইলে CD ঘুরিয়া আসিয়া একটি বক্রতল-বিশিষ্ট লম্ব বৃত্তাকার চোঙ উৎপন্ন করিবে। এইজন্য CDকে উৎপাদক রেখা (generating line) এবং ABকে অক্ষ বলা হয়। C এবং D যথাক্রমে B এবং A হইতে সর্বদাই সমদূরবর্তী থাকিবে। অতএব, ইহারা দুইটি সমান্তরাল বৃত্ত অঙ্কিত করিবে। এই দুই বৃত্তকে প্রান্ততল বা ভূমি (ends) বলে। সুতরাং লম্ব বৃত্তাকার চোঙের প্রান্ততল দুইটি বৃত্ত। AB এই দুই তলের উপর লম্ব। AB রেখাকে ইহার উচ্চতা বলে। চোঙটি যে তলের উপর দণ্ডায়মান থাকে তাহাকে চোঙটির ভূমি বলে।

চিত্র ।

12. লম্ব বৃত্তাকার চোঙের বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল

একটি ফাঁপা চোঙের বক্রপৃষ্ঠের গায়ে খাড়াভাবে সরলরেখা টানিয়া চোঙটিকে ঐ রেখা বরাবর কাটিয়া উহাকে ছড়াইয়া দিলে উহার বক্রপৃষ্ঠতলটি একটি সমতলে পরিণত হইবে। ঐ সমতল অবশ্যই একটি আয়তক্ষেত্র হইবে এবং চোঙটির পরিধি ও উচ্চতা ঐ আয়তক্ষেত্রের দুইটি বাহু অর্থাৎ দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ হইবে। অতএব বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল = ভূমির পরিধি × উচ্চতা।

কোন লম্ব বৃত্তাকার-চোঙের উচ্চতা h এবং ইহার ব্যাসার্ধ r হইলে

(ক) চোঙের বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল = ভূমির পরিধি × উচ্চতা
$= 2\pi rh$ বর্গ একক।

(খ) সমগ্র পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল = বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল + প্রান্ত দুইটির ক্ষেত্রফল
$= (2\pi rh + 2\pi r^2)$ বর্গ একক (∵ বৃত্তের কালি $= \pi r^2$)
$= 2\pi r(h+r)$ বর্গ একক।

(গ) চোঙের ঘনফল = ভূমির ক্ষেত্রফল × উচ্চতা $= \pi r^2 h$ ঘন একক।

উদাহরণমালা

উদা. 1. একটি লম্ব চোঙের উচ্চতা 1 মি. 4 ডেসিমি. এবং ভূমির ব্যাস 5 মিটার। উহার বক্রতলের ক্ষেত্রফল কত? [$\pi = \frac{22}{7}$]

বক্রতলের ক্ষেত্রফল $= 2\pi rh$;

এখানে r = ব্যাসার্ধ = $\frac{1}{2}$ ব্যাস = $\frac{5}{2}$ মি., h (উচ্চতা) = 1 মি. 4 ডেসিমি. = $\frac{7}{5}$ মি.

∴ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{5}{2}$ মি. $\times \frac{7}{5}$ মি. = 22 বর্গমিটার।

উদা. 2. একটি চোঙাকার প্রস্তরের উচ্চতা 9 মিটার এবং ভূমির ব্যাসার্ধ 1·75 মিটার। উহার সমগ্রতলের পরিমাণ কত? [$\pi=\frac{22}{7}$]

এখানে ব্যাসার্ধ $=1·75$ মি. $=\frac{7}{4}$ মি.; উচ্চতা 9 মি.।

∴ প্রস্তরটির বক্রতলের ক্ষেত্রফল $=2\pi rh$

$=2\times\frac{22}{7}\times\frac{7}{4}$ মি. $\times 9$ মি. $=99$ বর্গ মিটার।

আবার, ∵ বৃত্তের কালি $=\pi r^2$,

∴ ইহার বৃত্তাকার প্রান্ততল দুইটির ক্ষেত্রফল $=2\pi r^2$

$=2\times\frac{22}{7}\times(\frac{7}{4})^2$ ব. মি. $=19\frac{1}{4}$ বর্গ মিটার,

∴ সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল $=(99+19\frac{1}{4})$ ব. মি. $=118\frac{1}{4}$ বর্গ মি.

$=118$ বর্গ মি. 25 বর্গ ডেসি মিটার।

উদা. 3. কোন চোঙাকার স্তম্ভের উচ্চতা 8 মিটার এবং বক্রতলের ক্ষেত্রফল 2464 বর্গমিটার হইলে উহার ভূমির ব্যাসার্ধ কত? [$\pi=\frac{22}{7}$]

চোঙের বক্রতলের ক্ষেত্রফল $=2\pi rh$.

এখানে প্রদত্ত ক্ষেত্রফল $=2464$ বর্গ মি. এবং উচ্চতা $h=8$ মিটার।

∴ $2\pi rh=2464$ বর্গ মি. ($r=$ ব্যাসার্ধ)

বা, $2\times\frac{22}{7}\times 8$ মি. $\times r=2464$ বর্গ মি.

∴ $r=\frac{2464\times 7}{2\times 22\times 8}$ মি. $=49$ মি., ∴ নির্ণেয় ব্যাসার্ধ $=49$ মিটার।

উদা. 4. একটি লম্ব বৃত্তাকার-চোঙের উচ্চতা 16 মিটার এবং ভূমির ব্যাসার্ধ 3 মিটার 5 ডেসি মিটার হইলে উহার ঘনফল কত? [$\pi=\frac{22}{7}$]

চোঙটির ঘনফল $=$ ভূমির ক্ষেত্রফল $\times$ উচ্চতা $=\pi r^2h$.

এখানে $r=3\frac{1}{2}$ মিটার, $h=16$ মি.

∴ নির্ণেয় ঘনফল $=\frac{22}{7}\times(\frac{7}{2})^2\times 16$ ঘন মি. $=616$ ঘন মিটার।

উদা. 5. একটি চোঙাকার স্তম্ভের ভূমির ব্যাস 7 মিটার এবং উচ্চতা 12 মিটার। প্রতি ঘনমিটারে $2\frac{1}{3}$ টাকা হিসাবে উহার নির্মাণখরচ কত হইয়াছিল? [$\pi=\frac{22}{7}$]

এখানে $r=\frac{7}{2}$ মিটার, $h=12$ মিটার।

স্তম্ভের ঘনফল $=\pi r^2h=\frac{22}{7}\times(\frac{7}{2})^2\times 12$ ঘন মি. $=22\times 7\times 3$ ঘন মি.

প্রতি ঘনমিটারের খরচ $=2\frac{1}{3}$ টা. $=\frac{7}{3}$ টা.

∴ নির্ণেয় নির্মাণখরচ $=\frac{22\times 7\times 3\times 7}{3}$ টা. $=1078$ টাকা।

উদা. 6. একটি লৌহ নলের ভিতরের ব্যাস 3 ইঞ্চি, দৈর্ঘ্য 20 ফুট এবং লৌহপাতটি $\frac{1}{2}$ ইঞ্চি পুরু। এক ঘনইঞ্চি পাতের ওজন 4·526 আউন্স হইলে ঐ নলটির ওজন কত? [$\pi=\frac{22}{7}$] [রু. আ. সা.]

নলটির দৈর্ঘ্য 20 ফুট $=240$ ইঞ্চি।

নলটির ভিতরের ব্যাসার্ধ $\frac{3}{2}$ ইঞ্চি, লৌহপাতটি $\frac{1}{2}$ ইঞ্চি পুরু বলিয়া নলটির বাহির পর্যন্ত ব্যাসার্ধ হইবে $(\frac{3}{2}+\frac{1}{2})$ বা 2 ইঞ্চি।

∴ নলটি নিরেট হইলে উহার গোলাকার প্রান্তের ক্ষেত্রফল হইত

$\frac{22}{7}\times 2^2$ বর্গ ই. $=\frac{88}{7}$ বর্গ ই.

এবং উহার ফাঁপা ভিতরের গোলাকার প্রান্তের ক্ষেত্রফল

$=\frac{22}{7}\times(\frac{3}{2})^2$ বর্গ ই. $=\frac{99}{14}$ বর্গ ই.

∴ লৌহপাতটির ঘনফল $=(\frac{88}{7}-\frac{99}{14})$ ব. ই. × দৈর্ঘ্য

$=\frac{11}{2}$ বর্গ ই. × 240 ই. = 1320 ঘনইঞ্চি।

এক ঘনইঞ্চি লৌহপাতের ওজন = 4·526 আউন্স

∴ নির্ণেয় ওজন = 4·526 × 1320 আউন্স $=\frac{4{\cdot}526\times 1320}{16}$ পা.

= 373·395 পাউণ্ড।

উদা. 7. একটি চোঙের বক্রতল 1000 বর্গ সেণ্টিমিটার এবং ভূমির ব্যাস 20 সেণ্টিমিটার। উহার আয়তন কত? আসন্ন মিলিমিটারে উহার উচ্চতা নির্ণয় কর। [C. U. 1934]

চোঙটির ভূমির পরিধি $=2\pi r=20\pi$ সে.মি. [∵ $2r$ (ব্যাস) = 20 সে. মি]

∴ নির্ণেয় চোঙের উচ্চতা $=(1000\div 20\pi)$ সে. মি. $=\frac{50}{\pi}$ সে. মি.

$=\frac{50}{3{\cdot}1416}$ সে. মি. ($\pi=3{\cdot}1416$ ধরিয়া)

= 159 মিলি মিটার (আসন্ন)।

আবার, চোঙটির ঘনফল $=\pi r^2 h=\pi\times(10)^2\times\frac{50}{\pi}=5000$ ঘন সে. মি.।

প্রশ্নমালা 5

[$\pi=\frac{22}{7}$ ধরিবে]

1. একটি ফাঁপা চোঙের দৈর্ঘ্য 10 মিটার এবং ভূমির ব্যাস 7 মিটার হইলে উহার বক্রতলের ক্ষেত্রফল কত?

2. একটি চোঙাকার স্তম্ভের ভূমির পরিধি 4 ফুট 7 ইঞ্চি এবং উচ্চতা 12 গজ। উহার বক্রতলের ক্ষেত্রফল কত?

3. একটি লম্ব চোঙের প্রান্তীয় ব্যাস 2 মি. 8 ডেসি মি. এবং দৈর্ঘ্য 16 ডেসি মিটার। উহার প্রান্তদ্বয়ের ক্ষেত্রফল কত?

4. একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙের উচ্চতা 12 সেণ্টিমিটার এবং ভূমির ব্যাস 7 সে. মি., উহার সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

5. একটি চোঙাকার স্তম্ভের উচ্চতা 14 মিটার এবং উহার বক্রতলের ক্ষেত্রফল 264 বর্গমিটার ; উহার ভূমির ব্যাসার্ধ কত ?

6. একটি লম্ব বৃত্তাকার চিমনির উচ্চতা 30 ফুট এবং ভূমির ব্যাসার্ধ 1 ফুট 2 ইঞ্চি। প্রতি বর্গফুটে 2 আনা হিসাবে বক্রতলটি রং করিতে কত ব্যয় হইবে ?

7. একটি 15 মিটার উচ্চ স্তম্ভের বক্রতলটি রং করিতে 41 টা. 25 পয়সা ব্যয় হইল। প্রতি বর্গমিটারে 25 পয়সা ব্যয় হইলে উহার ভূমির ব্যাসার্ধ কত ?

8. 14 মিটার উচ্চ একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙের ব্যাস 6 মিটার ; উহার ঘনফল কত ?

9. 1 ডেকা মি. 4 মিটার উচ্চ একটি চোঙাকার স্তম্ভের ঘনফল 539 ঘন মিটার হইলে, উহার ভূমির ব্যাস কত ?

10. একটি চোঙাকার স্তম্ভের ভূমির ব্যাস 4 মিটার এবং স্তম্ভের উচ্চতা 21 মিটার। প্রতি ঘনমিটারে 1·6 টাকা হিসাবে উহা নির্মাণ করিতে কত ব্যয় হইবে ?

11. কোন ফাঁপা লম্ব বৃত্তাকার চোঙের ভূমির বাহিরের ও ভিতরের ব্যাসার্ধ যথাক্রমে 14 সে. মি. ও 7 সে. মি., উহার একটি প্রান্তের ক্ষেত্রফল কত ?

*12. এক ইঞ্চি পুরু লৌহপাতে নির্মিত কোন ফাঁপা নলের দৈর্ঘ্য 9 ফুট এবং ভিতরের ব্যাস 3 ইঞ্চি। এক ঘন ইঞ্চি পাতের ওজন $\frac{1}{4}$ পাউণ্ড হইলে ঐ নলের ওজন কত ? [রু. আ. সা]

13. 11 ঘন সেণ্টিমিটার লৌহকে পিটিয়া 56 সে. মিটার লম্বা একটি তার নির্মাণ করা হইল। ঐ তারের প্রান্তীয় ব্যাসার্ধ কত ?

*14. 9 ইঞ্চি দীর্ঘ একটি ফাঁপা নলের বাহির দিক পর্যন্ত ব্যাসার্ধ 10 ইঞ্চি। উহা 2 ইঞ্চি পুরু লৌহ দ্বারা নির্মাণ করিতে কত ঘন ইঞ্চি লৌহ লাগিয়াছিল ? [রু. আ. সা.]

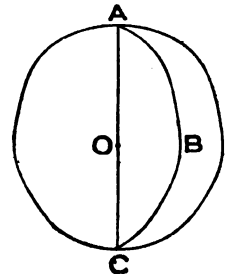
গোলক (Sphere)

13. কোন অর্ধবৃত্তের ব্যাসকে অক্ষ করিয়া অর্ধবৃত্তটিকে ঘুরাইলে যে ঘন উৎপন্ন হয়, তাহাকে গোলক (Sphere) বলে।

এই অর্ধবৃত্তের ব্যাসার্ধই গোলকের ব্যাসার্ধ হয়।

গোলাকার মার্বেল, খেলিবার বল প্রভৃতি গোলকের দৃষ্টান্ত।

চিত্র 2

কোন গোলকের ব্যাসার্ধ r হইলে

(ক) গোলকের বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল$=\pi\times$(ব্যাস)$^2=4\pi r^2$ বর্গ একক

অথবা, বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল=উৎপাদক বৃত্তের পরিধি$\times$ব্যাস

$=2\pi r\times 2r$ বর্গ একক

(খ) গোলকের ঘনফল$=\frac{4}{3}\pi r^3$ ঘন একক।

উদাহরণমালা

উদা. 1. একটি গোলকের ব্যাস 14 মিটার ; উহার বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল এবং ঘনফল নির্ণয় কর। [$\pi=\frac{22}{7}$],

এখানে r (ব্যাসার্ধ) = 7 মি., $\therefore$ নির্ণেয় বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল$=4\pi r^2$

$=4\times\frac{22}{7}\times(7)^2$ বর্গ মি.$=616$ বর্গ মিটার।

এবং নির্ণেয় ঘনফল$=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times(7)^3$ ঘন মি.$=1437\frac{1}{3}$ ঘন মি.।

উদা. 2. একটি গোলকের পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল 9856 বর্গ সে. মি.। উহার ব্যাস নির্ণয় কর [$\pi=\frac{22}{7}$]।

$\because$ পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল$=4\pi r^2$, $\therefore$ এখানে $4\times\frac{22}{7}\times r^2=9856$.

$\therefore$ $r^2=\frac{9856\times 7}{4\times 22}=784$, $\therefore$ $r=\sqrt{784}$ সে. মি.$=28$ সে. মি.

$\therefore$ নির্ণেয় ব্যাস$=2r=56$ সেন্টিমিটার।

উদা. 3. একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙের উচ্চতা ও ব্যাস 10 মিটার। যে গোলকের পৃষ্ঠতল চোঙটির বক্রতলের সমান তাহার ব্যাসার্ধ কত ?

চোঙটির ব্যাসার্ধ=5 মিটার।

উহার বক্রতল$=2\pi rh=2\pi\times 5\times 10=100\pi$;

আবার, গোলকের পৃষ্ঠতল$=4\pi r^2$ (r-কে গোলকের ব্যাসার্ধ ধরিয়া)

$\therefore$ $4\pi r^2=100\pi$, বা, $r^2=25$, $\therefore$ $r=5$.

$\therefore$ নির্ণেয় ব্যাসার্ধ=5 মিটার।

উদা. 4. এক ইঞ্চি ব্যাসের একটি লৌহ গোলককে পিটিয়া $\frac{1}{100}$ ইঞ্চি পুরু একটি বৃত্তাকার লৌহপাত প্রস্তুত করা হইল। ঐ পাতের ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। [র. মি. এ.]

গোলকের ব্যাসার্ধ$=\frac{1}{2}$ ইঞ্চি।

$\therefore$ গোলকের ঘনফল$=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi\times(\frac{1}{2})^3=\frac{1}{6}\pi$.

মনে কর, লৌহপাতের ব্যাসার্ধ r ইঞ্চি,

∴ উহার ক্ষেত্রফল $=\pi r^2$, এবং উহা $\frac{1}{100}$ ইঞ্চি পুরু বলিয়া উহার ঘনফল $=\pi r^2 \times \frac{1}{100}=\frac{\pi r^2}{100}$.

$$\therefore \frac{\pi r^2}{100}=\frac{\pi}{6}, \quad \therefore \quad r^2=\frac{100}{6}=\frac{50}{3}, \quad \therefore \quad r=\sqrt{\frac{50}{3}}=4·0825.$$

∴ নির্ণেয় ব্যাসার্ধ $=4·0825$ ইঞ্চি (প্রায়)।

উদা. 5. 11 মি. × 10 মি. × 5 মি. পরিমাণ আয়তাকার সীসাখণ্ড হইতে 5 ডেসিমিটার ব্যাসের কতগুলি গোলক প্রস্তুত করা যায়? [$\pi=\frac{22}{7}$]

সীসাখণ্ডের ঘনফল = 11 মি. × 10 মি. × 5 মি. = 550 ঘন মিটার।

∴ গোলকগুলির মোট ঘনফল = 550 ঘন মি.

একটি গোলকের ব্যাসার্ধ $=\frac{5}{2}$ ডেসিমি. $=\frac{1}{4}$ মিটার,

∴ একটি গোলকের ঘনফল $=\frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times(\frac{1}{4})^3$ বা $\frac{11}{7\times 24}$ ঘন মি.;

∴ নির্ণেয় গোলক সংখ্যা $=(550$ ঘন মি. $\div \frac{11}{7\times 24}$ ঘন মি.$)=8400$.

উদা. 6. একটি লৌহগোলকের বাহির দিকের ব্যাস এক ফুট এবং উহা 2 ইঞ্চি পুরু লৌহপাতে প্রস্তুত। এক ঘনফুট লৌহের ওজন 450 পাউণ্ড হইলে ঐ গোলকটির ওজন কত? [$\pi=\frac{22}{7}$] [শি. এ.]

গোলকের বাহিরের ব্যাসার্ধ 6 ইঞ্চি।

উহার ভিতরের ব্যাসার্ধ = 6 ইঞ্চি − 2 ইঞ্চি = 4 ইঞ্চি।

∴ গোলকটির ঘনফল $=\frac{4}{3}\pi(6^3-4^3)=\frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times 152$ ঘন ই.

$$=\frac{4\times 22\times 152}{3\times 7\times (12)^3} \text{ ঘনফুট।}$$

∵ এক ঘনফুট লৌহের ওজন = 450 পাউণ্ড,

$$\therefore \text{ নির্ণেয় ওজন}=\frac{4\times 22\times 152\times 450}{3\times 7\times (12)^3}\text{পা.}=\frac{10450}{63}\text{পা.}$$

$=165·87$ পাউণ্ড (আসন্ন)।

উদা. 7. যথাক্রমে 1 সে. মি., 6 সে. মি. ও 8 সে. মি. ব্যাসার্ধের তিনটি ভরাট স্বর্ণগোলক একত্র গলাইয়া একটি মাত্র নিরেট গোলক প্রস্তুত করা হইল। এই গোলকটির ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। [C. U. '56]

মনে করা যাক R নূতন গোলকের ব্যাসার্ধ।

∴ নূতন গোলকের ঘনফল $=\frac{4}{3}\pi R^3$.

এখন, প্রথম গোলকের ঘনফল $=\frac{4}{3}\pi.1^3$, দ্বিতীয় গোলকের ঘনফল $=\frac{4}{3}\pi.6^3$ এবং তৃতীয় গোলকের ঘনফল $=\frac{4}{3}\pi.8^3$.

∴ ঐ তিনটির মোট ঘনফল $=\frac{4}{3}\pi(1^3+6^3+8^3)$ ঘন সে. মি.

$=\frac{4}{3}\pi(1+216+512)$ ঘন সে. মি.

$=\frac{4}{3}\pi\times729$ ঘন সে. মি.

∴ $\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi.729$, ∴ $R^3=729=9\times9\times9$, ∴ $R=9$.

∴ নির্ণেয় ব্যাসার্ধ = 9 সেন্টিমিটার।

প্রশ্নমালা 6

[$\pi=\frac{22}{7}$ ধরিবে]

1. যে গোলকের ব্যাস 5 ডেসি মি. 6 সে. মিটার তাহার পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল কত ?

2. একটি গোলকের ব্যাসার্ধ $3\frac{1}{2}$ ডেসি মিটার ; উহার পৃষ্ঠতলের পরিমাণ কত ?

3. 1 ডেসি মি. 4 সে. মিটার ব্যাসের একটি গোলকের ঘনফল কত ?

4. একটি গোলকের পৃষ্ঠতল 154 বর্গ সে. মি. হইলে উহার ব্যাসার্ধ কত ?

5. একটি গ্লোবের পৃষ্ঠতলের পরিমাণ $\frac{11}{28}$ বর্গমিটার ; উহার ব্যাস কত ?

6. একটি গোলকের ঘনফল $1437\frac{1}{3}$ ঘন মিটার হইলে উহার ব্যাসার্ধ কত ?

7. একটি গোলকের ব্যাস 36 ইঞ্চি। উহার ঘনফল ঘনফুটে নির্ণয় কর। [P. U.]

8. একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙের ব্যাস ও উচ্চতা 6 মিটার। যে গোলকের পৃষ্ঠতল চোঙটির বক্রতলের সমান তাহার ব্যাসার্ধ কত ?

9. 6 ডেসি মিটার ব্যাসের একটি লৌহপিণ্ড হইতে 1 ডেসি মিটার ব্যাসের কয়টি গুলী প্রস্তুত করা যায় ?

10. একটি আয়তাকার লৌহফলক হইতে $\frac{1}{2}$ সে. মি. ব্যাসার্ধের কতগুলি গুলী প্রস্তুত করা যাইবে ? ফলকটির দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও বেধ যথাক্রমে 10 সে. মি., 8 সে. মি. ও $5\frac{1}{2}$ সে. মিটার।

11. একটি গোলার বাহিরের ও ভিতরের দিকের ব্যাস যথাক্রমে $15\frac{1}{2}$ ই. ও $10\frac{3}{4}$ ইঞ্চি ; গোলাটির ঘনফল কত ? [রু. আ. স্যা.]

12. 4 সে. মি. ব্যাসের একটি লৌহগোলককে পিটিয়া $\frac{2}{3}$ সে. মি. পুরু একটি বৃত্তাকার লৌহপাত প্রস্তুত করা হইল। ঐ পাতের ব্যাসার্ধ কত ?

13. দুইটি নিরেট স্বর্ণগোলকের ব্যাসার্ধ যথাক্রমে r_1 ও r_2 ; উহাদিগকে গলাইয়া একটি নিরেট গোলক প্রস্তুত করা হইল। প্রমাণ কর যে উহার ব্যাসার্ধ $(r_1^3+r_2^3)^{\frac{1}{3}}$এর সমান।

14. একটি ফাঁপা লৌহগোলকের বাহিরের ব্যাস 13 ইঞ্চি এবং লৌহের বেধ 2 ইঞ্চি। ঐ গোলকটির ওজন কত? (এক ঘন ইঞ্চি লৌহের ওজন 4·2 আউন্স)। [রু. ই.]

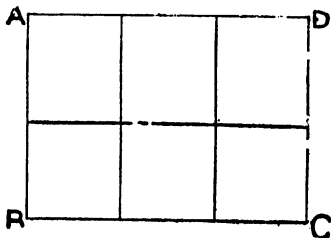
*15. ভরাট গোলাকার একটি মৃত্তিকাপিণ্ডকে 16 ইঞ্চি উচ্চ একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙে পরিণত করা হইল। যদি চোঙটির ভূমির ব্যাসার্ধ গোলকটির ব্যাসার্ধের সমান হয়, তবে ঐ ব্যাসার্ধ কত হইবে? [C. U. '49]

16. 1 সেন্টিমিটার ব্যাসার্ধের একটি গোলকের বক্রতল-পরিমাণ নির্ণয় কর।

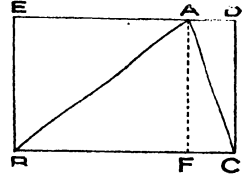
Experiments (পরীক্ষা)

পরিমিতিতে আমরা আয়তক্ষেত্র, ত্রিভুজ ও বৃত্তের ক্ষেত্রফল প্রভৃতি বিষয়ে আলোচনা করিয়াছি। ঐগুলি সম্বন্ধে কয়েকটি পরীক্ষা নিম্নে বর্ণনা করা হইতেছে। ঐরূপ বিভিন্নভাবে পরীক্ষা করা যাইতে পারে।

14. **আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় :** তোমরা শিখিয়াছ আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ। পরীক্ষা দ্বারা এই ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা যায়।

একটি কাগজে 3 ইঞ্চি দৈর্ঘ্য ও 2 ইঞ্চি প্রস্থবিশিষ্ট ABCD একটি আয়তক্ষেত্র আঁকিয়া উহাকে একটি বোর্ডের উপর আঁটিয়া দাও। এক্ষণে এক ইঞ্চি দীর্ঘ ও এক ইঞ্চি প্রশস্ত কতকগুলি বর্গাকার কাগজের টুকরা কাটিয়া লও। প্রত্যেক টুকরার আয়তন হইল এক বর্গ ইঞ্চি। এক্ষণে ঐ আয়তক্ষেত্রটির উপর ঐ টুকরাগুলি গায়ে গায়ে বসাইয়া (যেমন ডাক টিকিট আঁটা হয়) আয়তক্ষেত্রটি ঠিক ঢাকিয়া ফেল। এইবার গুনিয়া দেখ যে 6টি টুকরা দ্বারা আয়তক্ষেত্রটি ঠিক ঢাকা গিয়াছে। অতএব বুঝা গেল যে, আয়তক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল 6 বর্গ ইঞ্চি অর্থাৎ 3 × 2 বর্গ ইঞ্চি অর্থাৎ ঐ আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য × প্রস্থ।

চিত্র 3

15. ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল : আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের পরীক্ষা তোমরা শিখিয়াছ। এখন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের পরীক্ষা সহজ হইবে।

মনে কর, একটি কাগজে যে কোন একটি ত্রিভুজ ABC আঁকা হইল। এখন একটি ত্রিকোণীর (setsquare) সাহায্যে B ও C বিন্দুদ্বয় হইতে BC-র উপর দুইটি লম্ব টান এবং A বিন্দু দিয়া BC-র সমান্তরাল EAD সরলরেখা টান। এখন BCDE একটি আয়তক্ষেত্র পাইলে। এক্ষণে, কাঁচি দিয়া EAB ও ACD ত্রিভুজ দুইটি কাটিয়া লইয়া উহাদিগকে ABC ত্রিভুজের উপর স্থাপন করিলে (AEকে BC বরাবর ও B বিন্দুকে A বিন্দুর উপর এবং ADকে CB বরাবর ও C বিন্দুকে A বিন্দুর উপর ফেলিয়া) উহারা ABC ত্রিভুজের সহিত ঠিক মিলিয়া যাইবে। অতএব, বুঝা গেল যে ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল BCDE ক্ষেত্রফলটির ঠিক অর্ধেক। পূর্বে পরীক্ষা দ্বারা জানা গিয়াছে যে আয়তক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল উহার দৈর্ঘ্য × প্রস্থ-এর সমান। অতএব, উহা হইতে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল পাওয়া যাইবে। চিত্রে দেখিতেছ যে, আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য = ত্রিভুজের ভূমি BC এবং প্রস্থ = BE অর্থাৎ ত্রিভুজটির উচ্চতা।

চিত্র 4

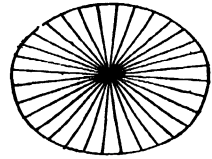
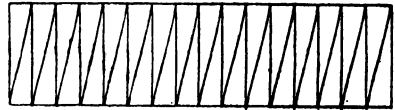
অতএব, ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}$ ভূমি × উচ্চতা।

[**দ্রষ্টব্য :** উপরের প্রদর্শিত প্রণালীতে বর্গক্ষেত্র ও সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল সম্বন্ধেও পরীক্ষা করা যায়।]

16. বৃত্তের পরিধি নির্ণয়ের পরীক্ষা : কাগজের উপর একটি বৃত্ত আঁকিয়া উহাকে পিচ্‌বোর্ডের উপর আঁটিয়া দাও। তারপর উহার পরিধি বরাবর কতিপয় পিন আঁট। এক্ষণে একটি সরু সূতা ঠিক ঐ পরিধির চারিদিকে ঘুরাইয়া স্থাপন কর। ঐ সূতা-খণ্ডের দৈর্ঘ্যই পরিধির মাপ হইবে।

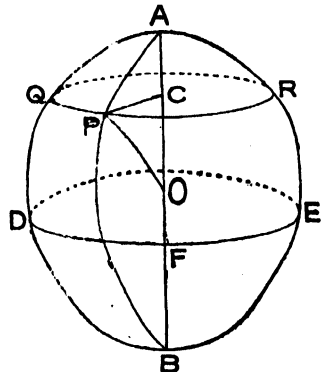
তোমরা পূর্বে শিখিয়াছ, বৃত্তের পরিধি $= 2\pi r = \frac{22}{7} \times$ ব্যাস। উহার পরীক্ষার জন্য 7 ইঞ্চি, $3\frac{1}{2}$ ইঞ্চি মাপের ব্যাস লইয়া দুইটি বৃত্ত আঁক এবং উপরের বর্ণিত প্রণালীতে বৃত্তদ্বয়ের পরিধি দুইটির দৈর্ঘ্য মাপিয়া লও। উহাদের ব্যাস জানা আছে। এখন দেখিবে যে বৃত্ত দুইটির $\frac{\text{পরিধি}}{\text{ব্যাস}}$ উভয় ক্ষেত্রেই সমান এবং প্রায় $\frac{22}{7}$ হইতেছে। অতএব, যে কোন বৃত্তের $\frac{\text{পরিধি}}{\text{ব্যাস}} = \frac{22}{7}$ (বা π).

$\therefore$ বৃত্তের পরিধির দৈর্ঘ্য $= \frac{22}{7} \times$ ব্যাস।

17. **বৃত্তের ক্ষেত্রফল বিষয়ক পরীক্ষা:** এক ইঞ্চি ব্যাসার্ধ লইয়া কাগজের উপর একটি বৃত্ত আঁক। ঐ বৃত্তের দুইটি পরস্পর লম্ব ব্যাস টান। ইহাতে বৃত্তটি চারিটি সমান বৃত্তকলায় পরিণত হইবে এবং প্রত্যেক বৃত্তকলা কোণ 90° হইবে। এইবার কেন্দ্রস্থ প্রত্যেক কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত কর। ইহাতে বৃত্তটি 8টি বৃত্তকলায় বিভক্ত হইল এবং প্রত্যেক বৃত্তকলা-কোণ 45° হইল। এইভাবে বৃত্তকলা কোণগুলিকে আরও দুইবার সমদ্বিখণ্ডিত কর। ইহাতে বৃত্তটি 32টি বৃত্তকলায় বিভক্ত হইল এবং প্রত্যেক বৃত্তকলাকোণ $(11\frac{1}{4})^\circ$ হইল। এখন, ঐ 32টি বৃত্তকলা কাঁচি দিয়া কাটিয়া লইয়া দুইদিকে 16টি করিয়া বৃত্তকলা গায়ে গায়ে নিম্নের চিত্রে যেরূপ দেখান হইয়াছে ঐভাবে আঁটিয়া দাও। এইবার দেখিবে যে চিত্রটিতে প্রায় একটি আয়তক্ষেত্র উৎপন্ন হইয়াছে। বৃত্তটিকে আরও অধিক সংখ্যক বৃত্তকলায় বিভক্ত করিলে উহাদের চাপগুলি প্রায় ক্রমশঃ সরলরেখায় পরিণত হইত। উৎপন্ন আয়তক্ষেত্রটির প্রস্থ বৃত্তের ব্যাসার্ধ এক ইঞ্চির সমান। উহার দৈর্ঘ্যটি Scale দ্বারা মাপিয়া লইয়া আয়তক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল (দৈর্ঘ্য × প্রস্থ) নির্ণয় কর। উহাই বৃত্তটিরও ক্ষেত্রফল। এক্ষণে দেখ যে, বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \pi \times$ (ব্যাসার্ধ $)^2$ সূত্র হইতেও প্রায় ঐ ক্ষেত্রফলই পাওয়া যায়।

চিত্র 5

চিত্র 6

গোলক বিষয়ক জ্যামিতি (Geometry of the Sphere)

গোলক কাহাকে বলে তাহা পূর্বে বলা হইয়াছে। পার্শ্বের চিত্রে AB ব্যাসকে অক্ষ করিয়া অর্ধবৃত্ত APB-কে ঘুরাইয়া গোলকটি উৎপন্ন করা হইয়াছে।

ঐ অর্ধবৃত্তের অর্ধপরিধিটি AB-র চারিধারে ঘুরিয়া যে-তল উৎপন্ন করিয়াছে তাহাই ঐ গোলকের **বক্রতল** বা **বক্রপৃষ্ঠ**। ঐ অর্ধপরিধিটির উপরিস্থিত প্রত্যেক বিন্দুই কেন্দ্র O হইতে সমদূরবর্তী (ঐ দূরত্ব $= r$ ব্যাসার্ধ)।

চিত্র 7

অতএব আমরা বলিতে পারি, কোন নির্দিষ্ট স্থির বিন্দু হইতে সতত সমদূরবর্তী গতিশীল বিন্দুর শূন্যে যে সঞ্চারপথ তাহাই গোলকের বক্রপৃষ্ঠ (surface)। ঐ স্থিরবিন্দু (চিত্রে O) গোলকের কেন্দ্র এবং ঐ ধ্রুবক দূরত্বটি (চিত্রে OP) গোলকটির ব্যাসার্ধ (r)।

18. গোলক সম্বন্ধীয় কতিপয় জ্যামিতিক তথ্য

(1) গোলকের বক্রতলে অবস্থিত যে কোন বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া বিভিন্ন ব্যাসার্ধ লইয়া গোলক-পৃষ্ঠে কতকগুলি বৃত্ত আঁকিলে তাহাদের পরিধিগুলি সমান্তরাল হইবে। কারণ, যে কোন দুইটি পরিধির মধ্যে ব্যবধান নিয়ত সমান থাকিবে।

(2) কোন গোলককে ব্যাস বরাবর ছেদ করিয়া সমান দুই খণ্ডে বিভক্ত করিলে দুইটি সর্বসম **অর্ধ গোলক** (Hemisphere) উৎপন্ন হইবে। অতএব, গোলক একটি **পূর্ণ প্রতিসম** (Perfectly symmertrical) ঘনবস্তু। অর্ধ গোলকের দুইটি তল—একটি সমতল এবং একটি বক্রতল।

(3) একটি গোলককে কোন সমতল যে-কোনরূপে ছেদ করিলে ছেদক তলটি একটি বৃত্ত হইবেই।

প্রমাণ: চিত্রে মনে কর, PQR তলটি O কেন্দ্র ও OP ব্যাসার্ধবিশিষ্ট গোলকটিকে ছেদ করিয়াছে। O হইতে ছেদক তলটির উপর OC লম্ব টানিয়া OP ও CP যোগ করা হইল। এখন, ∵ OC ছেদক তলের উপর লম্ব এবং CP ঐ তলস্থিত সরলরেখা, ∴ $\angle OCP$ এক সমকোণ।

∴ $OP^2 = OC^2 + PC^2$, বা, $PC^2 = OP^2 - OC^2$,

∴ $PC = \sqrt{OP^2 - OC^2}$ = ধ্রুবক (কারণ, OP ব্যাসার্ধ ও লম্ব CC দুইটি ধ্রুবক)। অতএব, যেহেতু ছেদ-রেখার উপর P যে-কোন বিন্দু এবং C বিন্দু হইতে উহা সতত সমদূরবর্তী, সেইজন্য PQR বক্ররেখাটি বৃত্তের পরিধি হইবেই।

[**দ্রষ্টব্য:** প্রদত্ত চিত্রে গোলকের কেন্দ্র O হইতে ছেদক তলের উপর OC লম্বটি দুইদিকে বর্ধিত করায় গোলকটিকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। ঐ বিন্দুদ্বয়কে ছেদক বৃত্তের **মেরু** বিন্দু (Poles) এবং ACOB লম্বটিকে ছেদক বৃত্তটির **অক্ষ** (Axis) বলে।]

(4) গোলকের তলে অবস্থিত যে-কোন দুইটি বিন্দুকে কেন্দ্রের সহিত যোগ করিলে কেন্দ্রে যে সম্মুখ কোণ উৎপন্ন হয়, তাহাকে ঐ বিন্দু দুইটির **কৌণিক দূরত্ব** (Angular Distance) বলে।

[**দ্রষ্টব্য ঃ** গোলকের তল একটি বক্রতল বলিয়া উহার উপর অবস্থিত দুইটি বিন্দুর দূরত্ব বা ব্যবধান রৈখিক এককে প্রকাশ না করিয়া উহা কৌণিক একক ডিগ্রী, মিনিট ও সেকেণ্ডে প্রকাশ করা হইয়া থাকে।]

(5) প্রদত্ত চিত্রে DEF বৃত্তটি একটি ছেদক বৃত্ত। উহার কেন্দ্রটি গোলকের কেন্দ্রে অবস্থিত। আর PQR ছেদক বৃত্তটির কেন্দ্র গোলকের কেন্দ্রে অবস্থিত নহে।

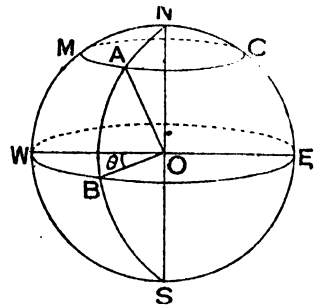
এখানে লক্ষ্য কর যে, DEF বৃত্তটি PQR বৃত্ত অপেক্ষা বৃহত্তর; কারণ, প্রথমটির ব্যাসার্ধ দ্বিতীয় বৃত্তের (বা অনুরূপ যে বৃত্তের কেন্দ্র গোলকের কেন্দ্রে অবস্থিত নহে তাহার) ব্যাসার্ধ অপেক্ষা বৃহত্তর হওয়ায় উহা বৃহত্তর বৃত্ত।

(6) গোলকের ব্যাসের প্রান্তবিন্দুতে ব্যাসের উপর লম্ব সমতলটি গোলককে ঐ বিন্দুতে স্পর্শ করে। উহাকে গোলকটির **স্পর্শক তল** (Tangent plane) বলা হয়।

(7) গোলকের তলের উপর অবস্থিত কোন বিন্দুতে একটিমাত্র স্পর্শক তল অঙ্কন করা যায়।

19. অক্ষাংশ ও দ্রাঘিমা (Latitude and Longitude)

তোমরা ভূগোলে অক্ষাংশ ও দ্রাঘিমা সম্বন্ধে আলোচনা দেখিয়াছ। পৃথিবী গোলাকার, সুতরাং ইহাকে প্রায় একটি গোলক ধরা যায়। অবশ্য গোলকের সকল ব্যাসই সমান, কিন্তু পৃথিবীর উত্তর দক্ষিণ মেরু একটু চাপা বলিয়া ঐ বিন্দুদ্বয় সংযোজক ব্যাস উহার অন্য ব্যাসগুলি অপেক্ষা কিঞ্চিৎ কম। পৃথিবীর আয়তনের তুলনায় ঐ ব্যাসের সামান্য পার্থক্য কিছুই নহে এবং সেইজন্য উহাকে গোলক বলিয়া গণ্য করা হয়।

N
M
A
C
W
θ
O
E
B
S

চিত্র 8

অক্ষাংশ ঃ গোলকের ন্যায় পৃথিবীর কেন্দ্র দিয়া উত্তর ও দক্ষিণ দিকে পৃথিবী-পৃষ্ঠ পর্যন্ত বিস্তৃত ব্যাসকে পৃথিবীর **অক্ষ** বা **মেরুরেখা** (Axis বলে)। পার্শ্বের চিত্রে NS পৃথিবীর অক্ষ। এই অক্ষ ও পৃথিবী-পৃষ্ঠের ছেদবিন্দু দুইটিকে **মেরুবিন্দু** (Poles) বলে। উত্তর দিকের

মেরু বিন্দুকে **সুমেরু** বা **উত্তর মেরু** (North Pole) এবং দক্ষিণ দিকের মেরু বিন্দুকে **কুমেরু** বা **দক্ষিণ মেরু** (South Pole) বলা হয়। চিত্রে N সুমেরু এবং S কুমেরু।

এখানে মনে রাখিও যে, প্রকৃতপক্ষে পৃথিবীর মধ্য দিয়া NS-এর মত কোন রেখা বা কোন বৃত্ত (বা পরে যেসব রেখা ও বৃত্তের কথা বলা হইবে) অঙ্কিত করা নাই ; এইগুলি যেন আছে এরূপ কল্পনা করিয়া লওয়া হয়। সেজন্য এগুলি কাল্পনিক রেখা বা কাল্পনিক বৃত্ত বলিয়া বুঝিবে।

এক্ষণে, যদি কল্পনা করা যায় যে, এই মেরুবিন্দু দুইটিকে কেন্দ্র করিয়া ও বিভিন্ন ব্যাসার্ধ লইয়া **পৃথিবী-পৃষ্ঠের উপর বিভিন্ন বৃত্ত** অঙ্কন করা হইয়াছে, তবে ঐ কাল্পনিক বৃত্তগুলিকে **অক্ষরেখা** (Latitude) বলে। গোলক সম্বন্ধীয় আলোচনা হইতে তোমরা জান যে ঐ বৃত্তগুলির পরিধিসমূহ সমান্তরাল। ঐ বৃত্তগুলি অন্যভাবেও কল্পনা করা যায়। চিত্র (8)-এর NS ব্যাস গোলকের (পৃথিবীর) অক্ষ, উহার উপর একটি বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া বৃত্ত আঁকিলেও পৃথিবী-পৃষ্ঠে ঐরূপ বৃত্ত পাওয়া যায় এবং তাহাদের পরিধিগুলি সমান্তরাল হয়। এই বৃত্তগুলিকে **সমাক্ষরেখা** (Parallels of Latitude) বলে। উত্তর ও দক্ষিণ মেরু হইতে সমদূরবর্তী অক্ষ রেখাটিকে অর্থাৎ O-কে কেন্দ্র করিয়া অঙ্কিত কাল্পনিক বৃহত্তম বৃত্তকে **বিষুবরেখা** (Equator) বলা হয়।

বিষুবরেখাটিকে ছেদ করিয়া উভয় মেরু (N ও S) পর্যন্ত বিস্তৃত কাল্পনিক অর্ধবৃত্তের পরিধিগুলিকে **দ্রাঘিমারেখা** বা **মধ্যরেখা** (Meridian বা Longitude) বলে।

অতএব বুঝা যাইতেছে যে ভূমণ্ডলের অসংখ্য সমাক্ষরেখা ও দ্রাঘিমারেখা হইতে পারে। তোমরা ভূগোলে পড়িয়াছ যে, গ্রিনউইচ (Greenwich) দিয়া যে দ্রাঘিমা রেখাটি গিয়াছে তাহাকে **মূল দ্রাঘিমারেখা** (Prime Meridian) বলা হয়।

এই সকল রেখা কল্পনা করিবার অবশ্যই কোন উদ্দেশ্য আছে। তোমরা বীজগণিতে লেখ অঙ্কনের সময় দেখিয়াছ যে পরস্পর লম্বভাবে ছেদ করিয়াছে এইরূপ দুইটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে মূলরেখা ও তাহাদের ছেদবিন্দুকে মূল বিন্দু ধরা হইয়া থাকে এবং ঐ দুই রেখা (Axis দুইটি) হইতে কোন বিন্দুর দূরত্ব জানা থাকিলে লেখ কাগজে সে বিন্দুটির অবস্থান নির্ণয় করা যায়।

ঐ দূরত্বদ্বয়কে বিন্দুটির স্থানাঙ্ক বলে। আবার, লেখ কাগজে কোন বিন্দুর অবস্থান দেওয়া থাকিলে তাহার স্থানাঙ্কও নির্ণয় করা যায়।

অনুরূপে, পৃথিবী-পৃষ্ঠের উপর কোন স্থান বা দেশ বিশেষের অবস্থান নির্ণয়ের জন্য উপরে বর্ণিত কাল্পনিক রেখাগুলির মধ্যে দুইটি মূল রেখা ধরা হইয়া থাকে। বিষুবরেখা ও মূল দ্রাঘিমা রেখাটি হইল সেই দুইটি মূল রেখা।

বিষুবরেখা হইতে কোন স্থানের কৌণিক দূরত্বকে ঐ স্থানের **অক্ষাংশ** (Latitude) বলে। আর, কোন স্থানগামী দ্রাঘিমা রেখা মূল মধ্যরেখার সহিত মেরু বিন্দুতে যে কোণ উৎপন্ন করে তাহাকে ঐ স্থানটির **দ্রাঘিমা** (Longitude) বলা হয়।

অতএব, কোন স্থানের অক্ষাংশ ও দ্রাঘিমা জানা থাকিলে ভূপৃষ্ঠে ঐ স্থানটির অবস্থান ঠিক কোথায় তাহা নির্ণয় করা যায়। আবার, ভূপৃষ্ঠে কোন স্থান দেখিয়া তাহার অক্ষাংশ ও দ্রাঘিমা নির্ণয় করা যায়।

এস্থলে জ্ঞাতব্য এই যে, বিষুবরেখা ও মূল দ্রাঘিমা রেখার ছেদবিন্দুর অক্ষাংশ ও দ্রাঘিমা দুইটিই 0 ডিগ্রী। বিষুবরেখার উপর অবস্থিত স্থানগুলির অক্ষাংশ অবশ্যই 0 ডিগ্রী। তদ্রূপ মূল দ্রাঘিমারেখার উপর অবস্থিত স্থানগুলির দ্রাঘিমা 0 ডিগ্রী। অতএব, বুঝা যাইতেছে যে মেরুদ্বয়ের দ্রাঘিমা 0 ডিগ্রী, কারণ তাহারা মূল দ্রাঘিমা রেখার উপর অবস্থিত।

লেখ অঙ্কনের সময় তোমরা শিখিয়াছ যে, X-অক্ষের উপরের দিকে অবস্থিত বিন্দুর কোটি (বা Y-স্থানাঙ্ক) ধনাত্মক (+) এবং উহার নীচের দিকে অবস্থিত বিন্দুর কোটি ঋণাত্মক (−) ধরা হয়। আবার, Y-অক্ষের ডান দিকে ও বাম দিকে অবস্থিত বিন্দুর ভুজ (X-স্থানাঙ্ক) যথাক্রমে ধনাত্মক ও ঋণাত্মক ধরা হয়।

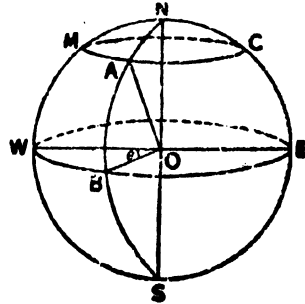
অনুরূপে, বিষুবরেখার উপরের দিকে (উত্তরে) অবস্থিত স্থানগুলির অক্ষাংশকে 'অক্ষাংশ উত্তর' বলে এবং উহার নীচের দিকে (দক্ষিণে) অবস্থিত স্থানগুলির অক্ষাংশকে 'অক্ষাংশ দক্ষিণ' বলে। সেইরূপ, মূল দ্রাঘিমারেখার ডানদিকে (পূর্বে) ও বামদিকে (পশ্চিমে) অবস্থিত স্থানগুলির দ্রাঘিমাকে যথাক্রমে 'দ্রাঘিমা পূর্ব' ও 'দ্রাঘিমা পশ্চিম' বলা হয়। অতএব, বিষুবরেখা হইতে 10° উত্তরে অবস্থিত অক্ষরেখার উপরিস্থিত যে কোন স্থানের অক্ষাংশ 10° উত্তর হইবে এবং বিষুবরেখার 10° দক্ষিণে অবস্থিত অক্ষরেখার উপর অবস্থিত যে কোন স্থানের অক্ষাংশ 10° দক্ষিণ হইবে।

অনুরূপে মূল দ্রাঘিমারেখার 15° পূর্বে ও 15° পশ্চিমে অবস্থিত মধ্যরেখার উপরিস্থিত স্থানগুলির দ্রাঘিমাকে যথাক্রমে 15° পূর্ব ও 15° পশ্চিম বলা হয়।

বিষুবরেখার অক্ষাংশ 0° এবং মূল মধ্যরেখার দ্রাঘিমা 0° ধরা হইয়া থাকে। বিষুবরেখার অক্ষাংশ 0° ধরিয়া উত্তরমেরু পর্যন্ত 90° ও দক্ষিণমেরু পর্যন্ত 90° অক্ষাংশ ধরা হয়। কারণ, বৃত্তের পরিধির এক-চতুর্থাংশ (এখানে বিষুবরেখা হইতে কোন মেরু পর্যন্ত) বৃত্তের কেন্দ্রে এক সমকোণ (চারি সমকোণের এক-চতুর্থাংশ) উৎপন্ন করে। অতএব, উত্তরমেরুর অক্ষাংশ হইল 90° উত্তর। ঐরূপ, বিষুবরেখা হইতে দক্ষিণমেরু পর্যন্ত 90° অক্ষাংশ ধরা হয়, সুতরাং দক্ষিণ মেরুর অক্ষাংশ হইল 90° দক্ষিণ।

অনুরূপে মূল মধ্যরেখার দ্রাঘিমা 0° ধরিয়া উহার পূর্ব ও পশ্চিম উভয় দিকে 180° পর্যন্ত দ্রাঘিমা ধরা হয়।

মনে কর, চিত্র 8 (ক) একটি গোলক, উহার বিষুবরেখা WBE, CAM যে-কোন একটি সমাক্ষরেখা এবং ঐ সমাক্ষরেখার উপর অবস্থিত A একটি বিন্দু। মনে কর, A বিন্দু দিয়া যে দ্রাঘিমারেখা গিয়াছে তাহা বিষুবরেখাকে B বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে এবং AB চাপ কেন্দ্রে ∠AOB উৎপন্ন করিয়াছে।

20. অক্ষাংশ নির্ণয়: এখন দেখ AN চাপকে N হইতে A বিন্দুর দূরত্ব ধরা হয়। CAM সমাক্ষরেখার উপর A বিন্দুর যে কোন অবস্থানে AN চাপ সমান বলিয়া ∠AONএর মান সমান থাকিবে। আবার, WBE তলের উপর ON লম্ব বলিয়া ∠NOB এক-সমকোণ, সুতরাং ∠AOB = ∠NOB − ∠AON = ধ্রুবক, ∴ চাপ AB = ধ্রুবক। বিষুবরেখা হইতে A বিন্দুর দূরত্ব হইল AB চাপ এবং উহাই A বিন্দুর অক্ষাংশ। অতএব, বিষুবরেখা হইতে কোন স্থানের কৌণিক-দূরত্ব ঐ স্থানের অক্ষাংশ। উহাকে অন্যভাবে প্রকাশ করা যায়। A বিন্দু দিয়া যে NAS দ্রাঘিমারেখা গিয়াছে তাহা বিষুবরেখাকে B বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। ঐ B বিন্দু হইতে BN দ্রাঘিমারেখা বরাবর যে দূরত্ব BA চাপ তাহাই A বিন্দুর অক্ষাংশ।

চিত্র 8(ক)

21. দ্রাঘিমা নির্ণয়ঃ কোন স্থানের দ্রাঘিমা নির্ণয় করিবার নিয়ম বলা হইতেছে। ঐ স্থানটি যে মধ্য-রেখায় অবস্থিত তাহার তলটি মূল দ্রাঘিমা-রেখার তলের সহিত যে কোণ উৎপন্ন করে তাহাকে ঐ স্থানটির দ্রাঘিমা বলে। 8 (ক) চিত্রে মূল দ্রাঘিমারেখা NWSএর তল এবং A বিন্দুগামী NAS মধ্যরেখার তল দুইটির মধ্যবর্তী কোণ WOB বা কোণ θ; ঐ কোণের পরিমাণই A বিন্দুর দ্রাঘিমা।

পূর্বেই বলা হইয়াছে যে, বীজগণিতের বিন্দুর স্থানাঙ্কের ন্যায় ভূপৃষ্ঠের উপরিস্থিত কোন বিন্দুর বা স্থানের অক্ষাংশ ও দ্রাঘিমা জানা থাকিলে ঐ বিন্দু বা স্থানের অবস্থান নির্ণয় করা যায়।

মনে কর, কোন স্থানের অক্ষাংশ 20°30′ উত্তর এবং দ্রাঘিমা 60°12′ পশ্চিম। উহার অবস্থান নির্ণয়ের জন্য প্রথমে মূল দ্রাঘিমারেখা হইতে বিষুবরেখা ধরিয়া পশ্চিম দিকে (বাম দিকে) 60°12′ গিয়া তথা হইতে দ্রাঘিমারেখা ধরিয়া 20°30′ উত্তর দিকে (উপর দিকে) গেলে ঐ স্থানটির অবস্থান পাওয়া যাইবে।

উত্তরমালা

জ্যামিতি

প্রশ্নমালা 13

1. 9 মিটার **2.** 10 কি. মিটার **3.** 44 মিটার

4. 8 $\sqrt{2}$ ডেসি মি. **5.** 15 সে. মিটার

6. 10·39 ই., 62·24 বর্গ ইঞ্চি **24.** 13 ই. (আসন্ন)।

পরিমিতি

প্রশ্নমালা 1

1. 636 বর্গ মি., 864 ঘন মি. **2.** 4 মিটার

3. 96 বর্গ ডেসি মি., 64 ঘন ডেসি মি. **4.** 960 গ্রা.

5. 1152 ঘন মি. ; 26 মি. **6.** $\frac{1}{4}$ মি. **7.** 5·196 সে. মি.

8. 12, 9, 6 সে. মি. (দৈর্ঘ্য 12 সে. মি., প্রস্থ 9 সে. মি., বেধ 6 সে.মি.)।

9. 8 $\sqrt{3}$ সে. মি., 512 ঘন সে. মি. **10.** 5 সে. মি. **11.** 13 মি.

12. 4320 বর্গ সে. মি. **13.** 12 মি. **14.** 145 বর্গ সে.মি.

15. 376 বর্গ সে. মি. **16.** 25 সে. মি. **17.** 18 মি. **18.** 32000

19. 125 **20.** দৈর্ঘ্য 16 সে. মি , প্রস্থ=বেধ=12 সে. মিটার।

প্রশ্নমালা 2

1. 6 $\sqrt{6}$ বর্গ সে. মি. **2.** 25 সে. মি., 150 বর্গ সে. মি. **3.** 5 মি.

4. 250 মিটার **5.** 150 ফুট **6.** 39 সে. মি., 15 সে. মি.

7. 24 সে. মি., 10 সে. মি. **8.** 15 মিটার

9. 637 সে. মি., 245 সে. মি. **10.** 11·6 মি. (আসন্ন)

11. $7\frac{1}{2}$ সে. মি. **12.** 80 মি. **13.** 24 সে. মি., 10 সে. মি.

14. 30 মি. **15.** 1 সে. মি. **16.** 4 $\sqrt{3}$ সে. মি.

17. 8 সে. মি. **18.** 2·89 মি. (আসন্ন)

19. 2 বর্গ সে. মি. 70 বর্গ মিলি মি. **20.** 16 $\sqrt{3}$ বর্গ সে. মিটার

21. 22·8 ই. (আসন্ন) **22.** 108 $\sqrt{3}$ বর্গ সে. মি. **23.** 6000 বর্গ মি.

24. 600 বর্গ মি., 50 মি. **25.** 128·9 মি.

26. 7·2 সে. মি. **27.** 2772 বর্গ মি. **28.** 120 বর্গ সে. মি.

29. 12 মি. **30.** 13872 বর্গ সে. মি. **31.** 57·19 ফু. (প্রায়)

32. 7776 বর্গ মি. **33.** 34·64 সে. মি., 519·6 বর্গ সে. মি. (প্রায়)।

প্রশ্নমালা 3

1. (1) 22 সে. মি. (2) $5\frac{1}{2}$ ফু. (3) 14 ফু. 8 ই, (4) 22 মি.

2. (1) 88 ডেসি মি (2) 132 ডেসি মি. (3) 14 ফু. 8ই. (4) 22 ফু

3. (1) 28 মি. (2) 7 ফু. (3) 2 ফু. 4ই. (4) 2 মি. 1 ডেসি মি.

4. 660 গ. **5.** 180 বার **6.** 7 মি.

7. $3\frac{1}{3}$ সে. মি, **8.** 16 শি. 6 পেন্স **9.** 7 মি.

10. 44 মি., 22 মি.
11. 16 সে. মি., 12 সে. মি.
12. 63 সে. মি. ও 42 সে. মি.
13. ঘণ্টায় 10 মা.
14. 7 ডেসি মি.
15. $10\frac{1}{2}$ সে. মি.. 66 সে. মি.
16. 28 সে. মি., 88 সে. মি.
17. 14 ফুট
18. $3\frac{1}{2}$ মি.
19. 15 মি. 75 সে. মি.
20. 28 গজ
21. 33 ডেকা মি.
22. 4 ডেসি মি. 4 সে. মি.
23. 15 মি. 8 ডেসি মি. 4 সে. মি.
24. 3 ফু. 6 ইঞ্চি।

প্রশ্নমালা 4

1. (1) 616 বর্গ সে. মি. (2) 3850 বর্গ ই.
   (3) 55 বর্গ মি. 44 বর্গ ডেসি মি. (4) 5544 বর্গ ই.
2. (1) $38\frac{1}{2}$ বর্গ মি. (2) 11 বর্গ গ. 7 ব. ফু. 136 ব. ই.
   (3) 124·74 বর্গ মি. (4) 6 বর্গ মি. 16 বর্গ ডেসি মি.
3. (1) 14 মি, (2) 2 ফু. 11 ই.
   (3) $14\sqrt{2}$ মি. (4) 8·4 সে. মি.
4. 132 ফু.
5. 4840 গ.
6. 27·74 গ.
7. 88 বর্গ সে. মি.
8. 14 বর্গ ডেসি মিটার 96 বর্গ সে. মিটার
9. 30633 বর্গ গ. $3\frac{6}{7}$ ব. ফু.
10. 12 সে. মি.
11. $12727\frac{3}{11}$ বর্গ গ.
12. 616 টা.
13. 176 বর্গ মি.
14. 5 ডেসি মি.
15. 16·56 মি.
16. 7 গজ
17. 9 ডেসি মি. 9·2 সে. মি. (প্রায়)
18. 2 মি. 1 ডেসি মি.
19. $3\frac{1}{2}$ ডেকা মি.
20. $407\frac{1}{33}$ বর্গ ফু.
21. 32 টা. 56 প.।

প্রশ্নমালা 5

1. 220 বর্গ মি.
2. 165 বর্গ ফু.
3. 1232 বর্গ ডেসি মি.
4. 341 বর্গ সে. মি.
5. 3 মিটার
6. 27 টাকা 8 আনা
7. $1\frac{3}{4}$ মিটার
8. 396 ঘন মি.
9. 7 মিটার
10. 440 টা.
11. 462 বর্গ সে. মি.
12. $339\frac{3}{7}$ পা.
13. $\frac{1}{4}$ সে. মি.
14. $1018\frac{2}{7}$ ঘন ইঞ্চি।

প্রশ্নমালা 6

1. 98 বর্গ ডেসি মি. 56 বর্গ সে. মি.
2. 154 বর্গ ডেসি মি.
3. $1437\frac{1}{3}$ ঘন সে. মি.
4. $3\frac{1}{2}$ সে. মি.
5. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ মি.
6. 7 মি.
7. $14\frac{1}{7}$ ঘন ফু.
8. 3 মি.
9. 216
10. 840
11. 1299·87 ঘন ই.
12. 4 সে. মি.
14. 201 পা. $13\frac{3}{8}$ আউন্স
15. 12 ই.
16. 1257·14 বর্গ সে. মিটার (প্রায়)।

West Bengal School Final Examination, 1965

[NEW SYLLABUS]

MATHEMATICS (Compulsory)

1. (*a*) সরল কর :

$$\frac{2\text{ টা. }20\text{ প.}}{1\text{ টা. }4\text{ প.}}-\frac{\frac{2}{5}\div\frac{2}{5}\text{ এর }\frac{2}{5}}{\frac{2}{5}\div\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}}\times\frac{2}{5}+\left(\frac{\frac{14}{15}}{1\frac{11}{15}}+7\frac{6}{13}-6\frac{56}{91}\right).$$ [উ: 1]

অথবা, (*a*) যদি 1 গজ = 0·914 মিটার হয়, তবে 1 ঘনফুট কত ঘন সেণ্টিমিটারের সমান হইবে তাহা ছুই দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধ রূপে নির্ণয় কর। [উ: 28279·70 সে. মি.]

(*b*) কোন ব্যক্তির বাৎসরিক আয় 1,915 টা. 50 প.। তিনি কোন বৎসরের প্রথম 20 সপ্তাহ, প্রতি সপ্তাহে 45 টা. 15 প. হিসাবে খরচ করিলেন। ইহার পর সারা বৎসর ধরিয়া তিনি দৈনিক কত করিয়া খরচ করিলে বৎসরের শেষে তাঁহার কোন দেনা হইবে না ? [ধর যে বৎসরটির দিন সংখ্যা = 365] [উ: 4 টা. 50 প.]

2. কোন ভদ্রলোকের মাসিক বেতন 625 টাকা ; মোট বার্ষিক আয়ের প্রথম 3,000 টাকার উপর তাহাকে কোন আয়কর (income tax) দিতে হয় না। পরবর্তী 2,000 টাকার উপর আয়করের হার টাকা প্রতি 7 প. এবং তদূর্ধ্বে প্রতি টাকায় 9 প. হিসাবে আয়কর দিতে হয়। তাহাকে এক বৎসরে আয়কর বাবদ মোট কত টাকা দিতে হয় ? [উ: 365 টা.]

অথবা, কোন স্কুলে তিনটি শ্রেণীর মোট ছাত্র সংখ্যা 333 ; প্রথম ও দ্বিতীয় শ্রেণীর ছাত্রসংখ্যার অনুপাত 3 : 5 এবং দ্বিতীয় ও তৃতীয় শ্রেণীর ছাত্রসংখ্যার অনুপাত 7 : 11 ; প্রত্যেক শ্রেণীর ছাত্রসংখ্যা নির্ণয় কর। [উ: 63, 105, 165]

3. বার্ষিক 5% হার সুদে 2,000 টাকার 3 বৎসরের চক্রবৃদ্ধি ও সরল সুদের অন্তর কত হইবে নির্ণয় কর। [ধর যে চক্রবৃদ্ধি সুদে প্রতি বৎসরান্তে সুদ আসলে গণ্য হয়।] [উ: 15 টা. 25 প.]

অথবা, নিম্নলিখিত তালিকায় 34 জন ছাত্র কোন এক বিষয়ে পরীক্ষায় যে নম্বর পাইয়াছে তাহা দেওয়া হইল। ঐ নম্বরের Mean নির্ণয় কর :

ছাত্র-সংখ্যা	4	2	3	5	7	5	4	3	1
নম্বর	50	55	62	68	73	75	81	85	91

[উ: 70·35]

4. (a) এবং (b) **অথবা** (c) এবং (d) উত্তর কর :

(a) উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

(i) $x(x-4)-y(y-4)$; (ii) $12x^2-7x-10$.

[উঃ (i) $(x-y)(x+y-4)$; (ii) $(3x+2)(4x-5)$]

(b) নিম্নলিখিত রাশিগুলির ল. সা. গু. নির্ণয় কর :

$2x^2-9x+9$, $6x^2-x-12$ এবং $3x^2-2x-8$

[উঃ $(x-2)(x-3)(2x-3)(3x+4)$]

(c) নিম্নলিখিত রাশি দুইটির গ. সা. গু. নির্ণয় কর :

$6x^3-8x^2-40x+30$ এবং $2x^2-x-15$. [উঃ $x-3$]

(d) $a+b+c=0$ হইলে, প্রমাণ কর

$$\frac{1}{(a+b)(a+c)}+\frac{1}{(b+c)(b+a)}+\frac{1}{(c+a)(c+b)}=0.$$

5. (a) সমীকরণের সমাধান কর :

(i) $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-4}=\frac{2}{x-3}$. [উঃ $x=7$]

(ii) $\left.\begin{array}{l}2x+y=8\\3x-2y=5\end{array}\right\}$ [উঃ $x=3, y=2$]

অথবা, (a) একটি দুই অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যার দশকাঙ্ক এককাঙ্কের দ্বিগুণ ; ঐ সংখ্যাটি হইতে 18 বিয়োগ করিলে অঙ্ক দুইটি উল্টাইয়া যায়। সংখ্যাটি নির্ণয় কর। [উঃ 42]

6. একই অক্ষরেখা (axes of co-ordinates) এবং একই একক লইয়া নিম্নলিখিত সমীকরণ দুইটির লেখচিত্র (graph) অঙ্কিত কর :

$$x+2y=6$$
$$x+y+1=0.$$

(প্রত্যেক লেখচিত্রের জন্য অন্ততঃ তিনটি বিন্দু লইতে হইবে।) লেখচিত্র হইতে লেখচিত্রদ্বয়ের ছেদবিন্দুর ভুজ ও কোটি বাহির কর। [উঃ $(-8, 7)$]

7. (a) এবং (b) **অথবা** (c) এবং (d) উত্তর কর :

(a) প্রমাণ কর যে কোন চতুর্ভুজের দুইটি বিপরীত বাহু পরস্পর সমান ও সমান্তরাল হইলে, চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক হইবে।

(b) ABCD একটি সামান্তরিক ; AB এবং ADকে যথাক্রমে P ও Q পর্যন্ত বর্ধিত করা হইল, যাহাতে BP=AB এবং DQ=AD হইল। প্রমাণ কর P, C এবং Q একই সরলরেখায় অবস্থিত।

(*c*) প্রমাণ কর যে একই ভূমির উপর এবং দুই নির্দিষ্ট সমান্তরাল সরলরেখার মধ্যে অবস্থিত সকল সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল পরস্পর সমান।

(*d*) ABCD একটি আয়তক্ষেত্র; ইহার বাহুগুলির মধ্যবিন্দু যথাক্রমে যোগ করিয়া PQRS-ক্ষেত্র পাওয়া গেল, প্রমাণ কর যে PQRS একটি রম্বস।

8. (*a*) এবং (*b*) **অথবা** (*c*) এবং (*d*) উত্তর কর :

(*a*) প্রমাণ কর যে একটি বৃত্তের একই বৃত্তাংশস্থিত যাবতীয় কোণ পরস্পর সমান।

(*b*) ABCD কোন বৃত্তে অন্তর্লিখিত একটি চতুর্ভুজ; O ঐ বৃত্তের কেন্দ্র। যদি চতুর্ভুজের AC এবং BD কর্ণদ্বয় E বিন্দুতে ছেদ করে, তবে প্রমাণ কর যে

$$\angle AOB + \angle COD = 2\angle AEB.$$

(*c*) প্রমাণ কর যে দুইটি বৃত্ত পরস্পর স্পর্শ করিলে, তাহাদের কেন্দ্রদ্বয় ও স্পর্শবিন্দু একই সরলরেখার উপর অবস্থিত হইবে।

(*d*) একটি সমকোণী চৌপলের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতার অনুপাত 6 : 5 : 4 এবং উহার সমগ্র তল পরিমাণ 33,300 বর্গ সেন্টিমিটার। চৌপলটির দৈর্ঘ্য, প্রস্থ এবং উচ্চতা নির্ণয় কর। [উঃ যথাক্রমে 90, 75, 60 সে. মি.]

9. (*a*) হইতে (*f*) পর্যন্ত প্রশ্নগুলির মধ্যে যে কোন দুইটি উত্তর কর :

(*a*) 50 এবং 100-র মধ্যে কোন্ কোন্ দুইটি সংখ্যার গ. সা. গু. 16, তাহা নির্ণয় কর। [উঃ 64 ও 80 এবং 80 ও 96]

(*b*) যদি 1 টাকা = 1 শি. $3\frac{5}{8}$ পেন্স হয়, তবে লণ্ডনের কোন ব্যাঙ্কের উপর 1,030 পা. 7 শি. 6 পে.-এর একটি Bank Draft কিনিতে কত খরচ লাগিবে? [উঃ 15826 টা. 56 প.]

(*c*) $2s = a+b+c+d$ হইলে, প্রমাণ কর

$$4(bc+ad)^2 - (b^2+c^2-a^2-d^2)^2 = 16(s-a)(s-b)(s-c)(s-d).$$

(*d*) উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$.

[উঃ $-(a-b)(b-c)(c-a)$]

(*e*) P, Q, R কোন ত্রিভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দু এবং X উহার এক কৌণিক বিন্দু হইতে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দু। প্রমাণ কর যে, P, Q, R, X বিন্দু চারিটি সমবৃত্ত।

(*f*) এমন একটি ত্রিভুজ ABC অঙ্কিত কর যাহার BC, CA, AB বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 7 সে. মি., 5 সে. মি. এবং 6 সে. মি.। A হইতে BC-বাহুর উপর AD লম্ব টান এবং AD-র দৈর্ঘ্য মাপিয়া বাহির কর; তাহা হইতে ABC ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

[উঃ AD = 4·19 সে. মি., ক্ষেত্রফল = 14·69 বর্গ সে. মি.]

W. B. S. F. Examination, 1966

1. (*a*) সরল কর :

$$\frac{\frac{2}{3} \div \frac{5}{6} \text{ এর } \frac{3}{4}}{\frac{2}{3} \div \frac{3}{4} \times \frac{5}{6}} - \frac{7{\cdot}7 \times 0{\cdot}12}{2{\cdot}1} + \frac{5 \text{ টা. } 84 \text{ প.}}{2 \text{ টা. } 19 \text{ প.}}$$

[উঃ $3\frac{2}{3}$]

অথবা, (*a*) যদি 39 ইঞ্চি=99 সেন্টিমিটার হয়, তবে 13 মাইলকে কিলোমিটার, মিটার ও সেন্টিমিটারে প্রকাশ কর।

[উঃ 20 কি. মি. 908 মি. 80 সে. মি.]

(*b*) একখানি ট্রেন 5 সেকেণ্ডে একটি টেলিগ্রাফের খুঁটি এবং 15 সেকেণ্ডে 450 মিটার দীর্ঘ একটি সেতু অতিক্রম করে। ট্রেনখানির দৈর্ঘ্য ও গতিবেগ নির্ণয় কর। [উঃ দৈর্ঘ্য=225 মি., বেগ=সেকেণ্ডে 45 মি.]

2. এক ফলবিক্রেতা টাকায় 15টি হিসাবে কতকগুলি আম ক্রয় করিল; তারপর আবার ততগুলি আম টাকায় 12টি হিসাবে ক্রয় করিল। সমস্ত আমগুলি মিশাইয়া সে টাকায় 13টি করিয়া বিক্রয় করিল। ইহাতে তাহার শতকরা কত লাভ বা ক্ষতি হইল? [উঃ $2\frac{22}{39}\%$ লাভ]

অথবা, একজন ঠিকাদার 350 দিনে 12 মাইল দীর্ঘ একটি খাল কাটাইয়া দিবার চুক্তি করিয়া ঐ কাজের জন্য 45 জন লোক নিযুক্ত করিল; 200 দিন পরে সে দেখিল যে $4\frac{1}{2}$ মাইল মাত্র কাটা হইয়াছে। আর কতজন লোক নিযুক্ত করিলে চুক্তিমত নির্দিষ্ট সময়ের মধ্যে ঐ কাজটি শেষ হইবে?

[উঃ অতিরিক্ত 55 জন]

3. বৎসরান্তে দেয় 5% চক্রবৃদ্ধি হারে A 5000 টাকা ধার দিল, B ঐ পরিমাণ টাকা $5\frac{1}{4}\%$ হারে সরল সুদে ধার দিল। 3 বৎসর পরে তাহারা সুদের টাকা আদায় করিল। তাহাদের মধ্যে কে অধিক লাভবান হইল এবং কি পরিমাণে বেশী পাইল? [উঃ A, 625 টাকা]

অথবা, নিম্নলিখিত তালিকায় কোন স্কুলের 52 জন ছাত্রের উচ্চতা দেওয়া হইল, ঐ উচ্চতার Mean নির্ণয় কর :—

ছাত্র-সংখ্যা	4	7	10	15	8	5	3
উচ্চতা (ইঞ্চিতে)	30	33	35	40	43	45	48

[উঃ 38·73 ই. (দুই দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধ)]

4. (a) এবং (b) **অথবা** (c) এবং (d) উত্তর কর :

(a) উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

(i) $8a^4+2a^2-45$, (ii) $x^2-y^2-6xa+2ya+8a^2$.

[উ: (i) $(2a^2+5)(2a+3)(2a-3)$; (ii) $(x+y-4a)(x-y-2a)$]

(b) নিম্নলিখিত রাশিগুলির ল. সা. গু. নির্ণয় কর :

$6x^2-13xa+6a^2$, $6x^2+11xa-10a^2$ এবং $6x^2+2xa-4a^2$.

[উ: $2(2x-3a)(3x-2a)(2x+5a)(x+a)$]

(c) নিম্নলিখিত রাশি দুইটির গ. সা. গু. নির্ণয় কর :

$3x^3+17x^2-62x+14$ এবং $21x^3+156x^2-138x+24$.

[উ: (x^2+8x-2)]

(d) যদি $3(a^2+b^2+c^2)=(a+b+c)^2$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে

$$a=b=c.$$

5. (a) সমীকরণের সমাধান কর :

(i) $\dfrac{3x+2}{x-1}+\dfrac{2x-4}{x+2}=5$ [উ: $x=6$]

(ii) $\left.\begin{array}{r}2(x-y)=3\\ 5x+8y=14\end{array}\right\}$ [উ: $x=2,\ y=\frac{1}{2}$]

অথবা, (a) একজন কৃষক সমান সংখ্যায় দুই জাতীয় ভেড়া কিনিল, প্রথম জাতীয় প্রত্যেকটির মূল্য 6 টাকা ও অপর জাতীয় প্রত্যেকটির মূল্য 8 টাকা। যদি সে সমান পরিমাণ টাকায় ঐ দুই জাতীয় ভেড়া কিনিত, তাহা হইলে সে ঐ টাকায় আরও তিনটি ভেড়া বেশী পাইত। সে প্রত্যেক জাতীয় ভেড়া কয়টি করিয়া কিনিয়াছিল ? [উ: প্রত্যেক রকমের 72টি]

6. একই অক্ষরেখা (axes of co-ordinates) এবং একই একক লইয়া নিম্নলিখিত সমীকরণ দুইটির লেখচিত্র (graph) অঙ্কিত কর :

$$y-x=2,\ 3x-2y=5\ ;$$

(প্রত্যেক লেখচিত্রের জন্য অন্ততঃ তিনটি বিন্দু লইতে হইবে) লেখচিত্র হইতে লেখচিত্রদ্বয়ের ছেদবিন্দুর ভুজ ও কোটি বাহির কর। [উ: (9, 11)]

7. (a) এবং (b) **অথবা** (c) এবং (d) উত্তর কর :

(a) প্রমাণ কর যে একই ভূমির উপর এবং একই সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত সকল ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল সমান।

(*b*) ABCD একটি ট্রাপিজিয়ম; ইহার AD ও BC বাহু সমান্তরাল। X, DC বাহুর মধ্যবিন্দু হইলে, প্রমাণ কর যে AXB ত্রিভুজটি ট্রাপিজিয়মের অর্ধেক।

(*c*) প্রমাণ কর যে যদি কোন ত্রিভুজের একটি বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র, তাহার অপর দুইটি বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টির সমান হয়, তবে শেষোক্ত বাহু দুইটির অন্তর্ভূত কোণ সমকোণ হইবে।

(*d*) প্রমাণ কর যে, কোন রম্বসের বাহুগুলির উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রগুলির সমষ্টি, উহার কর্ণদ্বয়ের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টির সমান।

8. (*a*) এবং (*b*) **অথবা** (*c*) এবং (*d*) উত্তর কর :

(*a*) প্রমাণ কর যে, কোন বৃত্তে যে সকল জ্যা কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্তী তাহারা পরস্পর সমান।

(*b*) প্রমাণ কর যে, বৃত্তের দুইটি সমান জ্যা, বৃত্তের মধ্যে পরস্পর ছেদ করিলে, একটি জ্যার দুইটি খণ্ড, যথাক্রমে অপরটির দুই খণ্ডের সমান হইবে।

(*c*) প্রমাণ কর যে, কোন বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু হইতে, বৃত্তের দুইটি স্পর্শক টানিলে, তাহারা পরস্পর সমান হইবে এবং বৃত্তের কেন্দ্রে তাহাদের সম্মুখ কোণদ্বয় পরস্পর সমান হইবে।

(*d*) একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙের (right circular cylinder) বক্রতলের ক্ষেত্রফল 1000 বর্গ সেন্টিমিটার এবং ভূমির ব্যাস 20 সেন্টিমিটার; উহার ঘনফল নির্ণয় কর। [উঃ 5000 ঘন সে. মি.]

9. (*a*) হইতে (*f*) পর্যন্ত প্রশ্নগুলির মধ্যে যে কোন **দুইটি** উত্তর কর :

(*a*) $\frac{80025}{937893}$কে লঘিষ্ঠ আকারে পরিবর্তিত কর। [উঃ $\frac{25}{293}$]

(*b*) লণ্ডনে দেয় কোন একটি বিলের টাকার জন্য এক ব্যক্তি ব্যাঙ্কে 51,000 টাকা জমা দিল, যদি বিনিময়ের হার 1 টাকা = 1 শি. $10\frac{1}{2}$ পে. হয় এবং ইংলণ্ডে দেয় টাকার উপর 2% ব্যাঙ্ক চার্জ দিতে হয়, তবে ঐ ব্যক্তির প্রতিনিধি লণ্ডনে কত পাইবে? [উঃ 4687 পা. 10 শি.]

(*c*) $x=\frac{4ab}{a+b}$ হইবে, প্রমাণ কর, $\frac{x+2a}{x-2a}+\frac{x+2b}{x-2b}=2$

(*d*) নিম্নলিখিত রাশিটিকে দুইটি পূর্ণবর্গের অন্তরফলরূপে প্রকাশ কর :
$(x+7)(x+9)(x+11)(x+13)$. [উঃ $(x^2+20x+95)^2-(4)^2$]

(*e*) ABC একটি ত্রিভুজ ইহার AB ও AC বাহুকে যথাক্রমে D ও E পর্যন্ত বর্ধিত করা হইয়াছে। প্রমাণ কর DBC, BCE এবং BAC কোণ তিনটির সমদ্বিখণ্ডক সরলরেখা তিনটি সমবিন্দু।

(*f*) একটি নির্দিষ্ট ভূমির উপর এমন একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত কর, যাহার ক্ষেত্রফল একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের সমান। (অঙ্কনের বর্ণনা ও প্রমাণ দিতে হইবে।)

W. B. S. F. Examination (Compart.)—1966

1. (*a*) সরল কর :—

$\left\{2\frac{3}{4}+\frac{7}{3\frac{4}{5}}\right.$ এর $\left.\frac{5}{2}-\frac{1\frac{2}{3}}{2\frac{1}{2}}\right\}\div 1\frac{77}{228}.$ [উঃ 5]

অথবা, (*a*) যদি 1 মিটার=39·37 ইঞ্চি হয়, তবে 20 মিটার দীর্ঘ এবং 12 মিটার 60 সেন্টিমিটার প্রশস্ত একটি মেঝের ক্ষেত্রফল বর্গগজে প্রকাশ কর। [উঃ 301·39 বর্গ গজ]

(*b*) ছয় অঙ্কদ্বারা লিখিত ক্ষুদ্রতম পূর্ণবর্গ সংখ্যাটি নির্ণয় কর। [উঃ 100489]

2. চাউলের দর $6\frac{1}{4}\%$ কমিয়া যাওয়াতে একজন লোক 704 টাকায় পূর্বাপেক্ষা 2 মণ চাউল বেশী কিনিতে পারিলেন। চাউলের দর কমিয়া প্রতি মণ কত হইল ? [উঃ প্রতি মণ 22 টা.]

অথবা, কোন একটি ঘরের চারিটি দেওয়ালের মোট ক্ষেত্রফল 660 বর্গফুট ; উহার মেঝের ক্ষেত্রফল 270 বর্গফুট এবং ঘরের প্রস্থ 15 ফুট ; ঘরটির উচ্চতা কত ? [উঃ 10 ফুট]

3. বার্ষিক 5% চক্রবৃদ্ধি হারে 400 টাকা ধার দেওয়া হইল। 3 বৎসর পরে ঐ টাকার চক্রবৃদ্ধি সুদ কত হইবে নির্ণয় কর। [উঃ 63 টা. 5 প.]

অথবা, নিম্নলিখিত তালিকায় 45 জন ছাত্র কোন এক বিষয়ের পরীক্ষায় যে নম্বর পাইয়াছে তাহা দেওয়া হইল। ঐ নম্বরের Mean নির্ণয় কর।

ছাত্র-সংখ্যা	4	3	5	7	12	5	4	3	2
নম্বর	45	52	56	65	70	72	74	75	80

[উঃ 65·6]

4. (a) এবং (b) **অথবা** (c) এবং (d) উত্তর কর :—

(a) উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :—

(i) $12x^2+17x+6$; (ii) $x(x-1)(x-2)-3x+3$.

[উঃ (i) $(4x+3)(3x+2)$, (ii) $(x-1)(x+1)(x-3)$]

(b) নিম্নলিখিত রাশিগুলির ল. সা. গু. নির্ণয় কর :—

$3x^2+5x+2$, $9x^2-4$ এবং $3x^2+x-2$. [উঃ $(x+1)(3x+2)(3x-2)$]

(c) নিম্নলিখিত রাশি দুইটির গ. সা. গু. নির্ণয় কর :—

x^3-3x+2 এবং $2x^3-4x^2+6x-4$. [উঃ $(x-1)$]

(d) $\frac{x}{b+c-a}=\frac{y}{c+a-b}=\frac{z}{a+b-c}$ হইলে

$(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z$এর মান নির্ণয় কর। [উঃ 0]

5. (a) সমীকরণের সমাধান কর :—

(i) $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}$. (ii) $\left.\begin{array}{l}4x-y=5\\7x-4y=2\end{array}\right\}$

[উঃ (i) $x=-\frac{3}{2}$; (ii) $x=2, y=3$]

অথবা, (a) কতকগুলি বালকের দুই-তৃতীয়াংশ সংখ্যা প্রত্যেকে 1 শি. 6 পেন্স করিয়া পাইল এবং অবশিষ্ট সকলে প্রত্যেকে 2 শি. 6 পেন্স করিয়া পাইল। ইহাতে মোটের উপর 2 পাঃ 15 শিঃ খরচ হইয়া থাকিলে, বালকের সংখ্যা কতজন ছিল? [উঃ 30 জন]

6. একই অক্ষরেখা (axes of co-ordinates) এবং একই একক লইয়া, নিম্নলিখিত সমীকরণ দুইটির লেখচিত্র (graph) অঙ্কিত কর :

$$x+y=12 \; ; \; y=2x+6$$

(প্রত্যেক লেখচিত্রের জন্য অন্ততঃ তিনটি বিন্দু লইতে হইবে।) লেখচিত্র হইতে লেখচিত্রদ্বয়ের ছেদবিন্দুর ভুজ কোটি বাহির কর।

[উঃ ভুজ=2 একক, কোটি=10 একক]

7. (a) এবং (b) **অথবা** (c) এবং (d) উত্তর কর :—

(a) প্রমাণ কর যে একটি চতুর্ভুজের দুইটি কর্ণ পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করিলে, চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক হইবে।

(খ) ABCD একটি চতুর্ভুজ ; BADQ এবং ADCP দুইটি সামান্তারক অঙ্কিত করা হইল, প্রমাণ কর যে PQ, BCকে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে।

(*c*) প্রমাণ কর যে দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে সমদূরবর্তী বিন্দুগুলির সঞ্চারপথ, ঐ দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দুর সংযোজক সরলরেখার লম্বদ্বিখণ্ডক।

(*d*) এমন একটি বিন্দু নির্ণয় কর, যাহা দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু A এবং B হইতে সমদূরবর্তী এবং অন্য একটি নির্দিষ্ট বিন্দু C হইতে নির্দিষ্ট দূরে অবস্থিত।

8. (*a*) এবং (*b*) **অথবা** (*c*) এবং (*d*) উত্তর কর :—

(*a*) প্রমাণ কর যে, কোন বৃত্তের কেন্দ্র হইতে একটি সরলরেখা অঙ্কন করিলে, ইহা যদি বৃত্তের ব্যাস নহে এরূপ কোন জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে, তবে সেই সরলরেখা ঐ জ্যার উপর লম্ব হইবে।

(*b*) প্রমাণ কর যে, দুইটি বৃত্ত পরস্পর ছেদ করিলে, তাহাদের সাধারণ জ্যা, দুই বৃত্তের কেন্দ্রের সংযোজক সরলরেখা দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হইবে।

(*c*) প্রমাণ কর যে, একটি চতুর্ভুজের কোন দুইটি বিপরীত কোণ পরস্পর সম্পূরক হইলে, চতুর্ভুজের চারিটি কোণবিন্দু সমবৃত্ত হইবে।

(*d*) একটি সমকোণী চৌপলের দৈর্ঘ্য 18 মিটার ও প্রস্থ 12 মিটার; যদি উহার সমগ্র তল-পরিমাণ 732 বর্গ মিটার হয়, তবে উহার উচ্চতা নির্ণয় কর।

[উঃ 5 মি.]

9. (*a*) হইতে (*f*) পর্যন্ত প্রশ্নগুলির মধ্যে যে কোন **দুইটি** উত্তর কর :

(*a*) এমন একটি বৃহত্তম সংখ্যা নির্ণয় কর, যাহা দ্বারা 1740 এবং 58520 কে ভাগ করিলে যথাক্রমে 11 এবং 7 ভাগশেষ থাকিবে। [উঃ 91]

(*b*) 5টা এবং 6টার মধ্যে ঘড়ির ঘণ্টা ও মিনিটের কাঁটা দুইটি কখন পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত থাকিবে, নির্ণয় কর।

[উঃ 5টা $10\frac{10}{11}$ মিনিটে ও 5টা $43\frac{7}{11}$ মিনিটে]

(*c*) নিম্নলিখিত রাশিটিকে একটি পূর্ণবর্গরূপে প্রকাশ কর :

$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1.$ [উঃ $(x^2+5x+5)^2$]

(*d*) যদি $x+(p-1)y=a$, $x+(q-1)y=b$ এবং $x+(r-1)y=c$ হয়, প্রমাণ কর

$$(q-r)a+(r-p)b+(p-q)c=0.$$

(*e*) প্রমাণ কর যে কোন ত্রিভুজের তিন কোণের তিনটি সমদ্বিখণ্ডক সমবিন্দু।

(*f*) এমন একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর যাহা দুইটি সমান্তরাল সরলরেখাকে স্পর্শ করিবে এবং ঐ সরলরেখা দুইটির মধ্যে অবস্থিত একটি নির্দিষ্ট বিন্দুর মধ্য দিয়া যাইবে। (অঙ্কনের বর্ণনা ও প্রমাণ দিতে হইবে।)

W. B. S. F. Examination—1967

1. (*a*) সরল কর :

$$\frac{3\frac{1}{3} \div 1\frac{1}{3} \text{ এর } 2\frac{1}{4}}{4{\cdot}25 - 3{\cdot}5 + 1{\cdot}8} - \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{7}}}$$ [উ: 0]

অথবা, পারদ জলের 13·6 গুণ ভারী। 725 ঘন সে. মি. পারদের ওজন কত পাউণ্ড হইবে তাহা নির্ণয় কর।

(1 কি. গ্রা.=2·2 পাউণ্ড ও এক ঘন সে. মি. জলের ওজন 1 গ্রাম)

[উ: 21·692 পাউণ্ড]

(*b*) একটি গাড়ীর চাকার পরিধি 2 মিটার 5 ডেসিমিটার : গাড়ীটি যদি ঘণ্টায় 15 কিলোমিটার বেগে যায়, তবে চাকাটি প্রতি মিনিটে কতবার ঘুরিবে ? [উ: 100 বার]

2. (*a*) এবং (*b*) অথবা (*c*) এবং (*d*) উত্তর কর :

(*a*) কোন শ্রেণীর 30 জন ছাত্রের বয়সের গড় 14·4 বৎসর। 10 জন নূতন ছাত্র ঐ শ্রেণীতে ভর্তি হওয়ায় তাহাদের বয়সের গড় 13·9 বৎসর হইল। নূতন ছাত্রদের বয়সের গড় নির্ণয় কর। [উ: 12·4 বৎসর]

(*b*) এক ব্যক্তি একটি ঘোড়া 10% ক্ষতিতে বিক্রয় করিল, সে যদি আরও 27 টাকা বেশীতে বিক্রয় করিত, তবে তাহার $12\frac{1}{2}$% লাভ হইত। ঘোড়াটির ক্রয়মূল্য নির্ণয় কর। [উ: 120 টাকা]

(*c*) এক ঠিকাদার 350 দিনে 12 মাইল দীর্ঘ একটা রাস্তা প্রস্তুত করিয়া দিবার চুক্তিতে 45 জন লোক নিযুক্ত করিল। 200 দিন অন্তে $4\frac{1}{2}$ মাইল রাস্তা প্রস্তুত হইল। এখন আরও কতজন লোক নিযুক্ত করিলে নির্দিষ্ট সময়ে কাজটি শেষ হইবে ? [উ: 55 জন লোক]

(*d*) একটি পাত্রে 56 কিলোলিটার জলমিশ্রিত দুধে দুধ ও জলের অনুপাত 5 : 2। উহাতে কি পরিমাণ জল মিশাইলে দুধ ও জলের অনুপাত 4 : 5 হইবে ? [উ: 34 কিলোলিটার জল]

3. কোন মহাজন বার্ষিক 4% হার সরল সুদে 1200 টাকা ধার করিয়া সেই টাকা বার্ষিক 5% হার চক্রবৃদ্ধি সুদে ধার দিল। 3 বৎসর অন্তে তাহার কত লাভ হইল ? (ধর যে চক্রবৃদ্ধি সুদে প্রতি বৎসরান্তে সুদ আসলে গণ্য হয়।)

[উ: 45 টা. 15 প.]

অথবা, নিম্নে 100 জন ছাত্রের ওজনের পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকা দেওয়া হইল ; ঐ ওজনের Mean নির্ণয় কর :—

ছাত্র-সংখ্যা	15	25	40	15	5
ওজন (পাউণ্ডে)	105	116	127	138	149

[উঃ 123 7 পাউণ্ড]

4. (a) এবং (b) অথবা (c) এবং (d) উত্তর কর :

(a) যে কোন দুইটিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

(i) a^4+4b^4. [উঃ $(a^2+2ab+2b^2)(a^2-2ab+2b^2)$]

(ii) $x^2-\left(a+\frac{1}{a}\right)x+1$ [উঃ $(x-a)\left(x-\frac{1}{a}\right)$]

(iii) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ [উঃ $-(a-b)(b-c)(c-a)$]

(b) নিম্নলিখিত রাশি দুইটির গ. সা. গু. নির্ণয় কর :

$3x^3-13x^2+23x-21$ এবং $6x^3+x^2-44x+21$. [উঃ $(3x-7)$]

(c) নিম্নলিখিত রাশিগুলির ল. সা. গু. নির্ণয় কর :

$2x^2-x-6$, $2x^2-7x-15$ এবং $x^2-7x+10$.

[উঃ $(2x+3)(x-5)(x-2)$]

(d) $3s=a+b+c$ হইলে, প্রমাণ কর যে

$(s-a)^3+(s-b)^3+(s-c)^3=3(s-a)(s-b)(s-c)$.

5. (a) যে কোন দুইটি সমীকরণের সমাধান কর :

(i) $\frac{6x+1}{15}-\frac{2x-1}{5}=\frac{2x-4}{7x-16}$ [উঃ $x=-2$]

(ii) $\left.\begin{array}{l}\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=2\\ \frac{5}{x}+\frac{10}{y}=5\frac{5}{6}\end{array}\right\}$ [উঃ $x=2$, $y=3$]

(iii) $10x^2-x-21=0$. [উঃ $x=\frac{3}{2}$ বা $x=-\frac{7}{5}$]

অথবা, (a) দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার একটি অঙ্ক অন্যটি অপেক্ষা 5 বেশী। অঙ্ক দুইটি উল্টাইয়া লিখিলে নূতন সংখ্যাটি প্রদত্ত সংখ্যার $\frac{3}{8}$ হয়। সংখ্যাটি নির্ণয় কর। [উঃ সংখ্যাটি 72]

6. একই একক ও একই অক্ষদ্বয় (Axes of co-ordinates) লইয়া নিম্নলিখিত সমীকরণ দুইটির লেখচিত্র অঙ্কিত কর :

$y = 2x$; $2y = 3x + 2$.

(প্রত্যেক লেখচিত্রের জন্য অন্ততঃ তিনটি বিন্দু লইতে হইবে।)

লেখচিত্র হইতে লেখচিত্রদ্বয়ের ছেদবিন্দুর ভুজ ও কোটি নির্ণয় কর।

[উঃ (2, 4)]

7. (*a*) এবং (*b*) **অথবা** (*c*) এবং (*d*) উত্তর কর :

(*a*) প্রমাণ কর যে সামান্তরিকের বিপরীত বাহুগুলি ও বিপরীত কোণগুলি পরস্পর সমান এবং প্রত্যেক কর্ণ সামান্তরিককে দুইটি সর্বসম ত্রিভুজে বিভক্ত করে।

(*b*) প্রমাণ কর যে সামান্তরিকের বিপরীত কোণগুলির সমদ্বিখণ্ডকগুলি পরস্পর সমান্তরাল।

(*c*) প্রমাণ কর যে যদি দুইটি সমক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ত্রিভুজ একই ভূমির উপর এবং উহ্যার একই পার্শ্বে অবস্থিত হয়, তবে উহারা একই সমান্তরালযুগলের মধ্যে অবস্থিত হইবে।

(*d*) প্রমাণ কর যে কোন চতুর্ভুজ যদি উহার প্রত্যেক কর্ণ দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হয়, তবে উহা একটি সামান্তরিক।

8. (*a*) এবং (*b*) **অথবা** (*c*) এবং (*d*) উত্তর কর :

(*a*) প্রমাণ কর যে একই বৃত্তে সমান জ্যাসমূহ কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্তী।

(*b*) বৃত্তের সমান সমান জ্যাসমূহের মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

(*c*) প্রমাণ কর যে বৃত্তের কোন বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক, স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধের উপর লম্ব।

(*d*) 1 সে. মি., 6 সে. মি., 3 সে. মি. ব্যাসার্ধবিশিষ্ট স্বর্ণনির্মিত তিনটি ঘনগোলককে গলাইয়া একটি ঘনগোলক প্রস্তুত করিলে এই গোলকের ব্যাসার্ধ কত হইবে তাহা নির্ণয় কর। [উঃ 9 সে. মি.]

9. (*a*) হইতে (*f*) প্রশ্নগুলির যে কোন দুইটির উত্তর কর :

(*a*) একটি আয়তাকার মাঠের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের অনুপাত 3 : 2 এবং উহার ক্ষেত্রফল 11094 বর্গ মিটার। প্রতি মিটার 2 টাকা 50 পয়সা হিসাবে উহাকে বেড়া দিতে কত খরচ হইবে নির্ণয় কর। [উঃ 1075 টাকা]

(*b*) রেল লাইনের পার্শ্বে দণ্ডায়মান একটি ছাত্র দেখিল যে, সমান দীর্ঘ দুইখানি বিপরীত দিক্‌গামী ট্রেণ তাহাকে 16 সেকেণ্ডে ও 12 সেকেণ্ডে অতিক্রম করিল। ট্রেণ দুইখানি পরস্পরকে কতক্ষণে অতিক্রম করিবে?

[উঃ $14\frac{2}{7}$ সেকেণ্ডে]

(c) যদি $a+b+c=0$ হয়, তবে দেখাও যে—

$$\frac{1}{b^2+c^2-a^2}+\frac{1}{c^2+a^2-b^2}+\frac{1}{a^2+b^2-c^2}=0.$$

(d) $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$ হইলে, দেখাও যে—

$$(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)=(ab+bc+cd)^2.$$

(e) একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের পরিবৃত্ত অঙ্কিত কর।

(অঙ্কনের বিবরণ ও অঙ্কন চিহ্নগুলি দিতে হইবে। প্রমাণ দিতে হইবে না।)

(f) প্রমাণ কর যে ত্রিভুজের অন্তঃকোণগুলির সমদ্বিখণ্ডকত্রয় সমবিন্দু।

W. B. S. F. Examination (Compart.)—1967

1. (a) সরল কর :—

$$\frac{(3\tfrac{1}{3}-2\tfrac{1}{2})\div\tfrac{5}{6} \text{ এর } \tfrac{3}{4}}{2\tfrac{2}{3}\div(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4})}+\frac{15 \text{ টাকা } 80 \text{ পঃ}}{31 \text{ টাকা } 60 \text{ পঃ}}$$ [উঃ $1\frac{1}{4}$]

অথবা, যদি 1 মিটার $= 39\frac{3}{8}$ ইঞ্চি হয়, তবে 1 ঘনফুট কত লিটারের সমান হইবে তাহা আসন্ন পূর্ণসংখ্যায় নির্ণয় কর। [উঃ 28 লিটার]

(b) এক সৈন্যাধ্যক্ষ তাঁহার 63,510 সৈনিককে পূর্ণবর্গাকারে সাজাইতে গিয়া দেখিলেন যে 6 জন সৈন্য বেশী হয়। বর্গের প্রতি সারিতে কত সৈন্য ছিল? [উঃ 252 জন]

2. (a) এবং (b) অথবা (c) এবং (d) উত্তর কর :

(a) এক ভদ্রলোকের বার্ষিক আয়ের প্রথম 4,000 টাকার উপর কোন আয়কর (income-tax) দিতে হয় না, পরবর্তী 1,000 টাকার উপর প্রতি টাকায় 5 পয়সা হিসাবে, এবং তদূর্ধ্ব আয়ের প্রতি টাকায় 10 পয়সা হিসাবে আয়কর দিতে হয়। তাঁহার মাসিক আয় 825 টাকা হইলে তাঁহাকে এক বৎসরে আয়কর বাবদ মোট কত টাকা দিতে হয়? [উঃ 540 টাকা]

(b) একটি ঘরের দৈর্ঘ্য 43 ডেসিমিটার এবং উচ্চতা 30 ডেসিমিটার। প্রতি বর্গমিটার 3 টাকা হারে উহার চারি দেওয়াল রং করিতে মোট 135 টাকা খরচ হইলে, ঘরের প্রস্থ নির্ণয় কর। [উঃ 32 ডেসিমিটার]

(*c*) 17 জন লোক একত্রে কাজ করিয়া একটি কার্য 72 দিনে সম্পন্ন করিতে পারে। তাহারা 9 দিন একত্রে কাজ করিবার পর আরও 4 জন লোক আসিয়া তাহাদের সহিত যোগ দিল। সম্পূর্ণ কাজটি কতদিনে শেষ হইল ?

[উ: 60 দিন]

(*d*) একজন খুচরাবিক্রেতা প্রতি রেডিওসেট্ 300 টাকায় বিক্রয় করিয়া শতকরা 20 টাকা লাভ করিত। এখন তাহাকে প্রতি সেট্ 10 টাকা বেশীতে ক্রয় করিতে হইতেছে। শতকরা পূর্বেকার হারে লাভ করিতে হইলে তাহাকে এখন প্রতি সেট্ কি দরে বিক্রয় করিতে হইবে ? [উ: 312 টাকা]

3. বার্ষিক 4% হারে 1,100 টাকার 3 বৎসরের চক্রবৃদ্ধি সুদ কত হইবে তাহা আসন্ন পয়সা পর্যন্ত নির্ণয় কর। [ধর যে চক্রবৃদ্ধি-সুদে প্রতিবৎসরান্তে সুদ আসলে গণ্য হয়।] [উ: 137 টাকা 35 পয়সা]

অথবা, নিম্নলিখিত তালিকায় 30 জন ছাত্র কোন এক বিষয়ের পরীক্ষায় যে নম্বর পাইয়াছে তাহা দেওয়া হইল। ঐ নম্বরের Mean নির্ণয় কর।

ছাত্র-সংখ্যা	4	2	3	5	7	5	4
নম্বর	50	55	63	70	71	80	91

[উ: 70·33]

4. (*a*) এবং (*b*) অথবা (*c*) এবং (*d*) উত্তর কর :

(*a*) যে কোন দুইটিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

(i) $10x^2+x-3$. [উ: $(5x+3)(2x-1)$]

(ii) $x(x-4)-y(y-4)$. [উ: $(x+y-4)(x-y)$]

(iii) $bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)$.

[উ: $-(a-b)(b-c)(c-a)$]

(*b*) নিম্নলিখিত রাশি দুইটির গ. সা. গু. নির্ণয় কর :

$2x^3-6x-4$ এবং $3x^3-12x^2+15x-6$. [উ: $(x-2)$]

(*c*) নিম্নলিখিত রাশিগুলির ল. সা. গু. নির্ণয় কর :

$6x^2-x-1$, $3x^3+7x^2+2x$ এবং $2x^2+3x-2$.

[উ: $x(x+2)(2x-1)(3x+1)$]

(*d*) যদি $yz+zx+xy=0$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে

$$\frac{1}{x^2-yz}+\frac{1}{y^2-zx}+\frac{1}{z^2-xy}=0.$$

5. (*a*) যে-কোন দুইটি সমীকরণের সমাধান কর :

(i) $\frac{3}{x-2}+\frac{5}{x-6}=\frac{8}{x+3}$ [উ: $x=3$]

(ii) $\left.\begin{array}{l}4x-3y=16,\\ 6x+5y=62\end{array}\right\}$ [উ: $x=7,\ y=4$]

(iii) $(x+4)(2x-3)=6.$ [উ: $x=2,\ -\frac{9}{2}$]

অথবা, (*a*) এরূপ একটি ভগ্নাংশ নির্ণয় কর যাহার হরের সহিত 1 যোগ করিলে উহার মান $\frac{1}{2}$ এবং যাহার লব হইতে 2 বিয়োগ করিলে উহার মান $\frac{1}{3}$ হয়। [উ: $\frac{5}{9}$]

6. একই অক্ষরেখা (Axes of co-ordinates) এবং একই একক লইয়া নিম্নলিখিত সমীকরণ দুইটির লেখচিত্র (graph) অঙ্কিত কর :

$$3x+2y=17,\ 3y-2x=6\ ;$$

[প্রত্যেক লেখচিত্রের জন্য অন্ততঃ তিনটি বিন্দু লইতে হইবে।]

লেখচিত্র হইতে লেখচিত্রদ্বয়ের ছেদবিন্দুর ভুজ ও কোটি বাহির কর।

[উ: ভুজ $=3$ একক, কোটি $=4$ একক]

7. (*a*) এবং (*b*) অথবা (*c*) এবং (*d*) উত্তর কর :

(*a*) প্রমাণ কর ত্রিভুজের যে-কোন দুই বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল ও অর্ধ।

(*b*) প্রমাণ কর যে কোন চতুর্ভুজের সন্নিহিত বাহুগুলির মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখাগুলি একটি সামান্তরিক উৎপন্ন করে।

(*c*) প্রমাণ কর যে একটি ত্রিভুজ এবং একটি সামান্তরিক একই ভূমি ও একই সমান্তরালযুগলের মধ্যে অবস্থিত হইলে, ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক হইবে।

(*d*) প্রমাণ কর যে ত্রিভুজের যে-কোন মধ্যমা উহাকে দুইটি সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ত্রিভুজে বিভক্ত করে।

8. (*a*) এবং (*b*) অথবা (*c*) এবং (*d*) উত্তর কর :

(*a*) প্রমাণ কর যে বৃত্তের অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয় পরস্পর সম্পূরক।

(*b*) প্রমাণ কর যে বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের যে-কোন কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক এবং বিপরীত কোণের বহির্দ্বিখণ্ডক বৃত্ত-পরিধিতে মিলিত হয়।

(*c*) প্রমাণ কর যে একই বৃত্তাংশস্থ কোণগুলি পরস্পর সমান।

(*d*) একটি আয়তঘনের (Rectangular parallelopiped-এর) দৈর্ঘ্য, প্রস্থ এবং উচ্চতার অনুপাত 5 : 4 : 3 এবং তলগুলির মোট ক্ষেত্রফল 13,536 বর্গ সেণ্টিমিটার হইলে, উহার দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা নির্ণয় কর।

[উঃ দৈর্ঘ্য 60 সে. মি., প্রস্থ 48 সে. মি., উচ্চতা 36 সে. মি.]

9. (*a*) হইতে (*f*) পর্যন্ত প্রশ্নগুলির মধ্যে যে কোন দুইটি উত্তর কর :

(*a*) প্রতি কিলোগ্রাম 12 টাকা মূল্যের চা-এর সহিত প্রতি কিলোগ্রাম 7 টাকা দরের চা কি অনুপাতে মিশাইলে, মিশ্রিত চা 10 টাকা কিলোগ্রাম দরে বিক্রয় করিলে 25% লাভ হইবে ? [উঃ 1 : 4]

(*b*) এক ব্যক্তি কোন স্টেশনের 200 মিটার দীর্ঘ প্ল্যাটফর্মে দাঁড়াইয়া দেখিলেন যে একটি ট্রেন তাঁহাকে 6 সেকেণ্ডে এবং প্ল্যাটফর্মকে 21 সেকেণ্ডে অতিক্রম করিল। ট্রেনটির দৈর্ঘ্য ও উহার গতিবেগ ঘণ্টায় কত কিলোমিটার তাহা নির্ণয় কর।

[উঃ ট্রেনটির দৈর্ঘ্য 80 মিটার ও ট্রেনটির গতি ঘণ্টায় 48 কি. মিটার।]

(*c*) প্রমাণ কর যে $(x+1)(x+2)(x+6\ (x+7)+(x+4)^2$ একটি পূর্ণবর্গ।

(*d*) $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ হইলে প্রমাণ কর যে

$$\frac{x^3}{a^3}+\frac{y^3}{b^3}+\frac{z^3}{c^3}=3\left(\frac{x+y+z}{a+b+c}\right)^3.$$

(*e*) প্রমাণ কর যে ত্রিভুজের তিনটি মধ্যমা সমবিন্দু।

(*f*) একটি নির্দিষ্ট চতুর্ভুজের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত কর। (অঙ্কনের বর্ণনা এবং অঙ্কনের পূর্ণ চিহ্ন দিতে হইবে, প্রমাণ দিতে হইবে না।)

W. B. S. F. Examination, 1968

1. সরল কর : $\dfrac{5{\cdot}75 - \frac{3}{7} \times 15\frac{3}{4} + 2\frac{2}{35} \div 1{\cdot}44}{7\frac{3}{7} \text{এর} \frac{3}{4} - 5{\cdot}6 \div 3{\cdot}2\dot{6}}$ [উ: $\frac{1}{9}$]

অথবা, (a) যদি 1 সের = 933 গ্রাম হয়, তবে 1 কিলোগ্রামকে $1\frac{1}{14}$ সের ধরিলে যে ভুল হইবে তাহা গ্রামে দুই দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধরূপে কত নির্ণয় কর। [উ: ·36 গ্রা.]

(b) কোন ভদ্রলোক তাঁহার বেতনের প্রতি টাকায় গড়ে 8 (আট) পয়সা হিসাবে আয়কর এবং 10 পয়সা হিসাবে প্রভিডেণ্ট ফণ্ডে জমা দিয়া মাসে নগদ 902 টাকা পাইয়া থাকেন। তাঁহার মাসিক বেতন নির্ণয় কর।

[উ: 1100 টা.]

2. (a) এবং (b), অথবা (c) এবং (d) উত্তর কর :

(a) একটি টেনিসকোর্টের দৈর্ঘ্য বিস্তারের দেড় গুণ। প্রতি বর্গমিটার 30 পয়সা হিসাবে ইহাকে সমতল করিবার ব্যয় 2205 টাকা। প্রতি মিটার রেলিংএর মূল্য 6 টাকা হইলে কোর্টের চতুর্দিকে রেলিং দিতে কত ব্যয় হইবে ?

[উ: 2100 টা.]

(b) 9 টা. 60 পয়সা কিলোগ্রাম দরের চা-এর সহিত 13 টা. 44 পয়সা কিলোগ্রাম দরের চা কি অনুপাতে মিশাইয়া মিশ্রিত চা'র প্রতি কিলোগ্রাম 13 টা. 20 পয়সা দরে বিক্রয় করিলে 10% লাভ হইবে ? [উ: 3 : 5]

(c) একজন পুরুষ ও একজন বালক একত্রে 72 দিনে একটি কার্য সম্পন্ন করিতে পারে। শেষ 20 দিন যদি পুরুষটি একাকী কাজ করে তবে কার্যটি 80 (আশি) দিনে শেষ হয়। পুরুষটি একাকী সম্পূর্ণ কার্যটি কত দিনে করিবে ? [উ: 120 দিন]

(d) এক ব্যক্তি দুইটি ঘোড়া বিক্রয় করিল। প্রত্যেকটি 1955 টাকায় বিক্রয় করায় একটিতে 15% লাভ এবং অপরটিতে 15% ক্ষতি হইল। তাহার মোট কত লাভ বা ক্ষতি হইল ? [উ: 90 টা. ক্ষতি]

3. কোন টাকার 4% হারে 2 বৎসরের চক্রবৃদ্ধি সুদ 2448 টাকা। একই হারে ঐ পরিমাণ টাকার 2 বৎসরের সরল সুদ কত হইবে নির্ণয় কর।

(ধর যে চক্রবৃদ্ধি সুদে প্রতি বৎসরান্তে সুদ আসলে গণ্য হয়।)

[উ: 2400 টা.]

অথবা, নিম্নলিখিত সংখ্যাগুলির যৌগিক গড় (Arithmetic mean) ও গড়-পার্থক্য (Mean Deviation) নির্ণয় কর :

77, 73, 75, 70, 72, 76, 75, 71, 74, 78

[উ: A. M. = 74·1 ; M. D = 2·1]

4. (a) এবং (b), অথবা (c) এবং (d) উত্তর কর :

(a) যে কোন দুইটিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

(*i*) $a^2 - b^2 + 6bc - 9c^2$ [উ: $(a+b-3c)(a-b+3c)$]

(*ii*) $6x^2 + xy - 15y^2$ [উ: $(3x+5y)(2x-3y)$]

(*iii*) $(x-1)(x-2)(x+3)(x+4)+4.$

[উ: $(x^2+2x-7)(x^2+2x-4)$]

(b) নিম্নলিখিত রাশি দুইটির গ. সা. গু. নির্ণয় কর :

x^4+6x^2+5 এবং $x^3-3x^2+x-3.$ [উ: x^2+1]

(c) নিম্নলিখিত রাশিগুলির ল. সা. গু. নির্ণয় কর :

$x^2+7x+10$, x^3-x^2-6x এবং $x^4-15x^2+2x^3.$

[উ: $x^2(x+2)(x+5)(x-3)$]

(d) যদি $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{b}{a}+\frac{d}{c}$ হয়, তবে দেখাও যে $\frac{a^3}{b^3}+\frac{c^3}{d^3}=\frac{b^3}{a^3}+\frac{d^3}{c^3}.$

5. (a) যে কোন দুইটি সমীকরণের সমাধান কর :

(*i*) $\frac{5}{5x-4}+\frac{6}{4x-3}=\frac{5}{2x-1}.$ [উ: $x=\frac{7}{9}$]

(*ii*) $\left.\begin{array}{l}\frac{2}{x}+\frac{5}{y}=1, \\ \frac{3}{x}+\frac{2}{y}=\frac{19}{20}\end{array}\right\}$ [উ: $x=4$, $y=10$]

(*iii*) $(x-7)(x-9)=195.$ [উ: $x=22, -6$]

অথবা, (a). 8 (আট) বৎসর পরে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের তিন গুণ হইবে এবং 4 বৎসর পূর্বে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের নয় গুণ ছিল। তাহাদের বর্তমান বয়স নির্ণয় কর। [উ: পিতার 40 ব., পুত্রের 8 ব.]

6. **একই একক ও একই অক্ষদ্বয়** (Axes of Co-ordinates) লইয়া নিম্নলিখিত সমীকরণ দুইটির লেখচিত্র অঙ্কিত কর :

$$3x-y=5 \ ; \ 4x+3y=11 \ ;$$

(প্রত্যেক লেখচিত্রের জন্য অন্ততঃ তিনটি বিন্দু লইতে হইবে।)
লেখচিত্র হইতে লেখচিত্রদ্বয়ের ছেদবিন্দুর ভুজ ও কোটি নির্ণয় কর।

[উঃ (2, 1)]

7. (a) এবং (b), অথবা (c) এবং (d) উত্তর কর :

(a) প্রমাণ কর যে একটি ত্রিভুজের যে কোন বাহুর মধ্যবিন্দু দিয়া অপর একটি বাহুর সমান্তরাল রেখা অঙ্কন করিলে উহা তৃতীয় বাহুকে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে।

(b) একটি ট্রাপিজিয়মের সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য a সেন্টিমিটার ও b সেন্টিমিটার। প্রমাণ কর যে তির্যক বাহু দুইটির মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সহিত সমান্তরাল এবং ইহার দৈর্ঘ্য $\frac{1}{2}(a+b)$ সেন্টিমিটার।

(c) প্রমাণ কর যে একই ভূমির উপর এবং একই সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত সকল ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল সমান।

(d) ABC ত্রিভুজের AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q এবং BC ভূমির উপর X যে কোন একটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে APXQ চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক।

৪. (a) এবং (b), অথবা (c) এবং (d) উত্তর কর :

(a) প্রমাণ কর যে বৃত্তের একই চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ, পরিধিস্থ কোণের দ্বিগুণ হইবে।

(b) কোন বৃত্তের কেন্দ্র O; AB ও CD বৃত্তের দুইটি জ্যা বহিঃস্থভাবে পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর যে

$$\angle AOC - \angle BOD = 2\angle APC.$$

(c) প্রমাণ কর যে বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান।

(d) তৃণাচ্ছাদিত একটি বৃত্তাকার ক্ষেত্রকে বেষ্টন করিয়া 12 ফুট চওড়া একটি রাস্তা আছে। ক্ষেত্রটির পরিধি 528 ফুট হইলে রাস্তাটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। (ধর $\pi = \frac{22}{7}$) [উঃ $6788\frac{4}{7}$ বর্গফুট]

9. (a) হইতে (f) পর্যন্ত প্রশ্নগুলির যে-কোন দুইটি উত্তর কর :

(a) এক ব্যবসায়ী 5ই জুন তারিখে লিখিত তিনমাস পরে দেয় 12,000 টাকার একটি বিল 27শে জুন তারিখে ভাঙ্গাইলেন। সুদের হার $4\frac{3}{4}\%$ হইলে ব্যবসায়ী ব্যাঙ্ক হইতে কত টাকা পাইলেন ? [উঃ 11886 টা.]

(b) 1 কিউবিক সেন্টিমিটার (1 c. c.) স্বর্ণের ওজন=18·5 গ্রাম এবং 1 c.c. রৌপ্যের ওজন=10·5 গ্রাম। রূপা ও সোনা মিশ্রিত 14 c.c. আয়তনবিশিষ্ট একটি ধাতুপিণ্ডের ওজন 219 গ্রাম হইলে, উহাতে কত গ্রাম সোনা ও কত গ্রাম রূপা আছে ? [উঃ সোনা 165·5 গ্রাম, রূপা 52·5 গ্রা.]

(c) যদি $2s=a+b+c$ হয়, প্রমাণ কর যে

$$(s-a)^3+(s-b)^3+3(s-a)(s-b)c=c^3.$$

(d) $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$ হইলে, দেখাও যে

$$a:d=(a^3+b^3+c^3):(b^3+c^3+d^3).$$

(e) একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ দেওয়া আছে এবং অন্য বাহুদ্বয়ের সমষ্টিও দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

(অঙ্কনের পূর্ণ চিহ্নগুলি ও প্রমাণ দিতে হইবে।)

(f) পরস্পর ছেদ করা দুইটি সরল রেখা হইতে সমদূরবর্তী একটি গতিশীল বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

সরলরেখা দুইটি সমান্তরাল হইলে সঞ্চারপথ কি হইবে ?

W. B. S. F. Examination, 1969

1, (a) সরল কর :—

$$\frac{3}{4}\left(\frac{7}{9}+\frac{1}{12}\right) \text{ এর } \frac{2\cdot75}{5\cdot1\dot{6}} \div \frac{2 \text{ টাকা } 90 \text{ পয়সা}}{4 \text{ টাকা } 70 \text{ পয়সা}} \text{ এর } \frac{5\frac{7}{8}}{7\frac{1}{4}}$$ [উঃ $\frac{11}{16}$]

অথবা, (a) যদি 1 সে. মিটার= ·3927 ইঞ্চি ধরা হয়, তবে 5 মাইল ও 8 (আট) কিলোমিটারের পার্থক্য কত গজ হইবে নির্ণয় কর।

[উঃ $51\frac{1}{9}$ গজ]

(b) কোন সমিতিতে যতজন সভ্য ছিল প্রত্যেকে ততটি 10 পয়সা করিয়া চাঁদা দেওয়ায় মোট 62 টাকা 50 পয়সা চাঁদা উঠিল। সমিতির সভ্যসংখ্যা নির্ণয় কর। [উঃ 25 জন]

2. (a) এবং (b), অথবা (c) এবং (d) উত্তর কর :—

(a) একটি চৌবাচ্চা A ও B দুইটি নল দ্বারা যথাক্রমে 6 ও 18 মিনিটে পূর্ণ হয়। চৌবাচ্চাটির খালি অবস্থায় দুইটি নল একসঙ্গে খুলিয়া দিয়া ঠিক কোন্ সময় A নলটি বন্ধ করিলে চৌবাচ্চাটি মোট 6 মিনিটে পূর্ণ হইবে ?

[উঃ নল দুইটি খুলিবার 4 মি. পরে।]

(b) একটি দুর্গ হইতে দুইবার তোপধ্বনি করা হইল। একজন সাইকেল আরোহী ঘণ্টায় 14 মাইল বেগে সোজা দুর্গের দিকে যাইবার সময় 10 মিনিট অন্তর ঐ শব্দ দুইটি শুনিল। শব্দের গতিবেগ সেকেণ্ডে 1120 ফুট হইলে, কতক্ষণ অন্তর তোপধ্বনি করা হইয়াছিল ? [উঃ 10 মি. 11 সে.]

(c) একটি ঘরের উচ্চতা $3\frac{1}{3}$ মিটার এবং দৈর্ঘ্য $6\frac{2}{3}$ মিটার। প্রতি বর্গমিটার 2 টাকা 25 পয়সা হিসাবে উহার চারি দেওয়াল চিত্রিত করিতে 190 টাকা খরচ পড়িল। ঐ ঘরের বিস্তার নির্ণয় কর। [উঃ 6 মিটার]

(d) কোন মহাজন বার্ষিক $4\frac{1}{2}$% হার সরল সুদে 1600 টাকা ধার করিয়া 5% হার চক্রবৃদ্ধি সুদে ধার দিল। তিন বৎসর অন্তে তাহার কত লাভ হইল ? (ধর যে চক্রবৃদ্ধি সুদে প্রতি বৎসরান্তে সুদ আসলে গণ্য হয়।)

[উঃ 36 টা. 20 প.]

3. A, B ও C কোন যৌথ কারবারে 1500 টাকা লাভ করিল। যদি A ও B-এর মূলধনের অনুপাত 2 : 3 এবং B ও C-এর মূলধনের অনুপাত 2 : 5 হয়, তবে লাভের টাকা কে কত পাইবে ?

[উঃ A 240 টা., B 360 টা., C 900 টা.]

অথবা, নিম্নলিখিত তালিকায় 30 জন ছাত্র অঙ্ক পরীক্ষায় যে নম্বর পাইয়াছে তাহা দেওয়া হইল। ঐ নম্বরের যৌগিক গড় (Arithmetic mean) এবং সমক পার্থক্য (Standard deviation) নির্ণয় কর।

নম্বর	64	70	80	90
ছাত্রসংখ্যা	5	10	12	3

[উঃ গড় = 75 নম্বর, সমক পার্থক্য = 7·81 নম্বর]

4. (a) এবং (b) অথবা (c) এবং (d) উত্তর কর :—

(a) যে কোন দুইটি উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :—

(*i*) a^2+2a-b^2+2b [উঃ $(a+b)(a-b+2)$]

(*ii*) $x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)+3xyz$

[উঃ $(x+y+z)(xy+yz+zx)$]

(*iii*) $a^2-b^2-c^2+d^2-2(ad-bc)$

[উঃ $(a-d+b-c)(a-d-b+c)$]

(b) নিম্নলিখিত রাশি দুইটির গ. সা. গু. নির্ণয় কর :—

x^3+4x^2+4x+3 এবং x^3+2x^2-2x+3 [উঃ $(x+3)$]

(c) সরল কর :—

$$\frac{a^2-(b+c)^2}{a^2-ab+ac} \div \frac{ac-bc-c^2}{a^2-(b-c)^2} \times \frac{b}{(a+b)^2-c^2}$$ [উঃ $\frac{b}{ac}$]

(b) যদি $ab+bc+ca=0$ হয়, তবে দেখাও যে

$$\frac{1}{a^2-bc}+\frac{1}{b^2-ca}+\frac{1}{c^2-ab}=0.$$

5. (a) যে কোন দুইটির সমাধান কর :

(*i*) $\frac{x-bc}{b+c}+\frac{x-ca}{c+a}+\frac{x-ab}{a+b}=a+b+c$

[উঃ $x=ab+bc+ca$]

(*ii*) $\left.\begin{array}{l}4x-3y-18=0\\4y-5x+7\ \ =0\end{array}\right\}$ [উঃ $x=51, y=62$]

(*iii*) $\frac{x}{3}+\frac{3}{x}=4\frac{1}{4}$ [উঃ $x=12, \frac{3}{4}$]

অথবা (a) কোন ভগ্নাংশের লবকে দ্বিগুণ ও হরে 1 যোগ করিলে উহার মান $\frac{1}{3}$ হয়, কিন্তু উহার হরটি দ্বিগুণ ও লবে 1 যোগ করিলে উহার মান $\frac{1}{6}$ হয়। ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর। [উঃ $\frac{4}{15}$]

6. $3x+4y=24$ এই সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কিত কর (অন্ততঃ তিনটি বিন্দু লইবে)। দেখাও যে ইহা ও দুই অক্ষরেখা মিলিয়া একটি ত্রিভুজ উৎপন্ন করিয়াছে। এই ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [উঃ 24 বর্গ একক]

7. (a) এবং (b), অথবা (c) এবং (d) উত্তর কর :—

(a) তিন বা ততোধিক সমান্তরাল সরল রেখা, অপর কোন সরল রেখাকে ছেদ করিলে সমান্তরাল রেখাসমূহের মধ্যস্থিত উক্ত রেখার অংশগুলি যদি পরস্পর সমান হয়, তবে প্রমাণ কর যে উহাদের দ্বারা অপর যে কোন সরলরেখার অনুরূপ ছিন্ন অংশগুলিও পরস্পর সমান হইবে।

(b) একটি সরলরেখাকে সমান তিন অংশে কিরূপে ভাগ করা যায় দেখাও।

(c) যদি কোন ত্রিভুজের একটি বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র তাহার অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টির সমান হয়, তবে প্রমাণ কর যে শেষোক্ত বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণটি সমকোণ হইবে।

(d) প্রমাণ কর যে কোন সমকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণদ্বয় হইতে অঙ্কিত মধ্যমাদ্বয়ের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র দুইটির সমষ্টির চারিগুণ উহার অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের পাঁচগুণ হইবে।

8. (a) এবং (b) অথবা (c) এবং (d) উত্তর কর :—

(a) প্রমাণ কর যে, কোন বৃত্তের বহিঃস্থ একটি বিন্দু হইতে দুইটি স্পর্শক টানিলে তাহারা পরস্পর সমান হইবে এবং বৃত্তের কেন্দ্রে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করিবে।

(b) দুইটি বৃত্ত P বিন্দুতে পরস্পর বহিঃস্পর্শ করিয়াছে এবং QR সরল রেখা উহাদিগকে Q ও R বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে। প্রমাণ কর যে $\angle QPR$ সমকোণ।

(c) প্রমাণ কর যে অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এক সমকোণ।

(d) একটি বৃত্তাকার চোঙের (circular cylinder) উচ্চতা 1 ফুট এবং ভূমির ব্যাস 8 (আট) ইঞ্চি। ইহার অর্ধেক জলে পূর্ণ আছে। এক ইঞ্চি ব্যাসের গোলকাকৃতি কতকগুলি মার্বেল ইহার ভিতর নিক্ষেপ করিলে জল চোঙের কাণা পর্যন্ত উঠিবে? [উঃ 576টি মার্বেল]

9. (a) হইতে (f) পর্যন্ত প্রশ্নগুলির যে কোন দুইটির উত্তর কর :—

(a) কলিকাতার কোন ব্যক্তি 99 সুইস্ ফ্রাঙ্ক মূল্যের একটি ঘড়ি ক্রয় করিবেন। বিনিময়ের হার যদি 1 টাকা 25 পয়সা=1 শি. 6 পে. এবং 1 পাউণ্ড=13·2 ফ্রাঙ্ক হয়, তাহা হইলে তাঁহাকে কত টাকা দিতে হইবে ?

[উ: 125 টা.]

(b) একটি গরু 10% লোকসানে বিক্রয় করা হইল। যদি এই বিক্রয় মূল্য অপেক্ষা 37 টাকা 50 পঃ আরও বেশী দামে ইহাকে বিক্রয় করা হইত তাহা হইলে 5% লাভ হইত। গরুটির আসল মূল্য কত ? [উ: 250 টা.]

(c) $(2x+1)(2x+3)(2x+5)(2x+7)+212$কে দুইটি বর্গের সমষ্টিরূপে প্রকাশ কর। [উ: $(4x^2+16x+11)^2+(14)^2$]

(d) যদি $\dfrac{x+y}{3a-b}=\dfrac{y+z}{3b-c}=\dfrac{z+x}{3c-a}$ হয়, তবে দেখাও যে

$$\frac{x+y+z}{a+b+c}=\frac{ax+by+cz}{a^2+b^2+c^2}.$$

(e) প্রমাণ কর যে ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় সমবিন্দু।

(f) একটি নির্দিষ্ট ভূমির উপর এমন একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত কর যাহার ক্ষেত্রফল একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের সমান। (অঙ্কনের পূর্ণ চিহ্নগুলি দিতে হইবে।)

S. F. Examination, 1970

1. (a) সরল কর :

$$\frac{\frac{5}{7}\div\frac{4}{9} \text{ এর } \frac{2}{3}}{\frac{5}{7}\div\frac{2}{3}\times\frac{4}{9}}-\frac{1\cdot0\dot{5}}{1\cdot9}+\frac{\cdot71\times\cdot71-\cdot29\times\cdot29}{\cdot71-\cdot29}-\frac{6 \text{ টাকা } 46 \text{ পয়সা}}{1 \text{ টাকা } 44 \text{ পয়সা}}.$$ [উ: 1]

অথবা, যদি 1 গজ=0·914 মিটার হয়, তবে 15 বর্গ সেন্টিমিটার অপেক্ষা 10 বর্গ ইঞ্চি কতগুণ বড় তাহা দুই দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধরূপে নির্ণয় কর।

[উ: 4·30 গুণ]

(b) কোন শ্রেণীতে 30 জন বালক ছিল, উহাদের বয়সের বড় 15 বৎসর। 20 বৎসর বয়স্ক একজন বালক চলিয়া গেল এবং তাহার পরিবর্তে দুইজন নূতন বালক ঐ শ্রেণীতে আসিল। এই দুইজনের বয়সের অন্তরফল 5 বৎসর। এখন

ঐ শ্রেণীর সমস্ত বালকদের বয়সের গড় যদি পুনরায় 15 বৎসর হয়, তবে ঐ নবাগত বালক দুইটির প্রত্যেকের বয়স কত তাহা নির্ণয় কর।

[উঃ 20 ব. ও 15 ব.]

2. (a) এক ব্যক্তি পদব্রজে কিছুদূর গিয়া সাইকেলে চড়িয়া ফিরিয়া আসিল এবং ইহাতে তাহার মোট 3 ঘণ্টা 45 মিনিট সময় লাগিল। যদি সে সাইকেলে চড়িয়াই যাতায়াত করিত তবে মোট সময় লাগিত 2 ঘণ্টা 30 মিনিট। পদব্রজে এই পথ যাতায়াত করিতে তাহার কত সময় লাগিবে? [উঃ 5 ঘ.]

অথবা, একটি চৌবাচ্চার দৈর্ঘ্য প্রস্থের দ্বিগুণ এবং উচ্চতা 3 মিটার। যদি উহাতে 96000 কিলোগ্রাম জল ধরে এবং 1 লিটার জলের ওজন 1 কিলোগ্রাম হয়, তবে চৌবাচ্চাটির দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থ কত তাহা নির্ণয় কর।

[উঃ দৈর্ঘ্য 8 মি., প্রস্থ 4 মি.]

(b) বার্ষিক $6\frac{1}{2}\%$ হারে সরল সুদের পরিবর্তে বার্ষিক 8% (আট) হার সরল সুদে মূলধন খাটাইয়া এক ব্যক্তি দেখিল যে তাহার বার্ষিক আয় 40 টাকা 50 পয়সা বৃদ্ধি পাইয়াছে। এখন যদি সে তাহার মূলধন বার্ষিক $12\frac{1}{2}\%$ হার সরল সুদে খাটায়, তবে তাহার বার্ষিক আয় কত হইবে?

[উঃ 337 টা. 50 প.]

অথবা, এক ব্যক্তি কোন এক বৎসরে তাঁহার বার্ষিক আয়ের উপর 450 টাকা আয়কর দিলেন। ঐ বৎসরে তাঁহার আয়ের প্রথম 4500 টাকা আয়কর মুক্ত ছিল, কিন্তু পরবর্তী 2500 টাকার উপর আয়কর 4%, তৎপরবর্তী 2500 টাকার উপর আয়কর 6% এবং অবশিষ্ট আয়ের উপর 8% (আট) আয়কর ছিল। ঐ বৎসরে এই ব্যক্তির মোট আয় কত ছিল? [উঃ 12000 টা.]

3. বার্ষিক কত টাকা হার সুদে 5000 টাকার 2 বৎসরের চক্রবৃদ্ধি সুদ 512 টাকা 50 পয়সা হইবে? [ধর যে চক্রবৃদ্ধি-সুদে প্রতি বৎসরান্তে সুদ আসলে গণ্য হয়।] [উঃ 5%]

অথবা, নিম্নলিখিত রাশিগুলির যৌগিক গড় (Arithmetic mean) এবং সমক পার্থক্য (Standard deviation) নির্ণয় কর :—

11, 22, 25, 19, 13. [উঃ গড় = 18, পার্থক্য = 5·29]

4. (*a*) যে কোন দুইটিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :—

(*i*) x^4+4; [উঃ $(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$]

(*ii*) $2x^6-16y^6$; [উঃ $2(x^2-2y^2)(x^4+2x^2y^2+4y^4)$]

(*iii*) $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)-9.$

[উঃ $(x+4)^2(x^2+8x+6)$]

অথবা, নিম্নলিখিত রাশিগুলির ল. সা. গু. নির্ণয় কর :

$6x^2-x-1$, $3x^2+7x+2$ এবং $2x^2+3x-2$.

[উঃ $(x+2)(2x-1)(3x+1)$]

(b) যদি $a^2=by+cz$, $b^2=cz+ax$, $c^2=ax+by$ হয়, তবে দেখাও যে $\frac{x}{a+x}+\frac{y}{b+y}+\frac{z}{c+z}=1$.

অথবা, সরল কর :

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}.$$ [উঃ 1]

5. যে কোন দুইটি সমীকরণের সমাধান কর :

(*i*) $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}=\frac{3}{x-3}$; [উঃ $x=\frac{3}{2}$]

(*ii*) $\left.\begin{array}{l} 2x+\frac{3}{y}=5 \\ 5x-\frac{2}{y}=3 \end{array}\right\}$; [উঃ $x=1$, $y=1$]

(*iii*) $\frac{x}{x+2}+\frac{x+1}{x+4}=1.$ [উঃ $x=2, -3$]

অথবা, তিন অঙ্কবিশিষ্ট কোন সংখ্যার দশকের অঙ্কটি 0 এবং অঙ্ক তিনটির যোগফল 8 (আট)। আবার অঙ্ক তিনটি উল্টাইয়া লইলে যে সংখ্যাটি পাওয়া যায় তাহা আসল সংখ্যাটির চেয়ে 198 বৃহত্তর। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

[উঃ 305]

6. $x+y=6$ এই সমীকরণটির লেখচিত্র অঙ্কন কর (অন্ততঃ তিনটি বিন্দু লইতে হইবে)। দেখাও যে এই লেখচিত্রটি এবং দুই অক্ষরেখা মিলিয়া একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ উৎপন্ন করিয়াছে এবং এই ত্রিভুজের সমান বাহু দুইটির মধ্যবিন্দুদের মধ্যে দূরত্ব নির্ণয় কর।

7. (a) এবং (b), **অথবা** (c) এবং (*d*) উত্তর কর :—

(a) প্রমাণ কর যে একটি চতুর্ভুজের কর্ণ দুইটি পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করিলে, চতুর্ভুজটি সামান্তরিক হইবে।

(b) প্রমাণ কর যে একটি চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলির মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাদ্বয় পরস্পরকে দ্বিখণ্ডিত করে।

(c) প্রমাণ কর যে একটি সমকোণী ত্রিভুজে অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র উহার অপর দুইটি বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের সমষ্টির সহিত সমান হয়।

(d) ABC ত্রিভুজের মধ্যে O যে কোন একটি বিন্দু। এই বিন্দু হইতে BC, CA এবং AB বাহুর উপর যথাক্রমে OX, OY এবং OZ লম্ব টানা হইল। প্রমাণ কর যে

$$AZ^2+BX^2+CY^2=AY^2+CX^2+BZ^2.$$

8. (a) এবং (b), **অথবা** (c) এবং (d) উত্তর কর :

(a) প্রমাণ কর যে কোন বৃত্তের একই চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণটি পরিধিস্থ যে কোন কোণের দ্বিগুণ হইবে।

(b) দুইটি বৃত্ত A ও B বিন্দুতে ছেদ করিল। A বিন্দুর মধ্য দিয়া প্রত্যেক বৃত্তের মধ্যে একটি করিয়া AP ও AQ দুইটি ব্যাস অঙ্কিত করা হইল। প্রমাণ কর যে P, B এবং Q একরেখীয় (collinear) হইবে।

(c) দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে স্পর্শ করিলে প্রমাণ কর যে স্পর্শবিন্দুটি কেন্দ্রদ্বয়ের সংযোজক সরল রেখার উপর অবস্থান করিবে।

(d) একটি বৃত্তাকার চোঙের (circular cylinder) ভূমির ব্যাস 12 সেন্টিমিটার এবং উহার মধ্যে কিছুটা জল আছে। এখন 6 সেন্টিমিটার ব্যাসযুক্ত একটি গোলক ঐ চোঙের ভিতর সম্পূর্ণরূপে জলের মধ্যে ডুবাইয়া দিলে জলের উপরিতল আর কতদূর উপরে উঠিবে তাহা নির্ণয় কর। [উঃ 1 সে.মি.]

9. (a) হইতে (f) পর্যন্ত প্রশ্নগুলির মধ্যে যে কোন **দুইটির** উত্তর কর :

(a) একটি নল একটি চৌবাচ্চাকে 8 (আট) মিনিটে ভর্তি করিতে পারে এবং অপর একটি নল ঐ চৌবাচ্চা হইতে প্রতি মিনিটে 6 গ্যালন জল বাহির করিয়া দিতে পারে। সম্পূর্ণ খালি অবস্থায় চৌবাচ্চাটির সহিত এইরূপ দুইটি নল যুক্ত করিয়া দিলে উহা 20 মিনিটে ভর্তি হইয়া যায়। চৌবাচ্চায় কত গ্যালন জল ধরিতে পারে তাহা নির্ণয় কর। [উঃ 80 গ্যালন]

(b) যদি 6 ডলার = 25·5 মার্ক
10 লিরা = 2·5 ফ্রাঙ্ক
9 মার্ক = 11·25 ফ্রাঙ্ক হয়,
তবে 500 ডলারের বিনিময়ে কত লিরা পাওয়া যাইবে ?

[উঃ 10625 লিরা]

(c) যদি $2s=a+b+c$ হয় তবে প্রমাণ কর যে

$$\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c}+\frac{2s^2}{(s-a)(s-b)(s-c)}+\frac{1}{s}=\frac{(b+c)(c+a)(a+b)}{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

(d) $\frac{ay-bx}{c}=\frac{cx-az}{b}=\frac{bz-cy}{c}$ হইলে,

দেখাও যে $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$.

(e) প্রমাণ কর যে একটি ত্রিভুজে উহার কৌণিক বিন্দুগুলি হইতে বিপরীত বাহুগুলির উপর অঙ্কিত লম্বত্রয় একটি বিন্দুতে মিলিত হয়।

একটি সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে এই বিন্দুটি কোথায় হইবে তাহা নির্দেশ কর।

(f) একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ এবং অন্য বাহু দুইটির সমষ্টি দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন কর। (অঙ্কনের সমস্ত চিহ্নগুলি ও প্রমাণ দিতে হইবে।)

শুদ্ধিপত্র

পাটীগণিত

62 পৃষ্ঠায় 8 ছত্রে 157·625 হইবে।

বীজগণিত

40 পৃষ্ঠায় উদা. 2এর 5 ছত্রে $(y-7)$ স্থানে $(x-7)$ হইবে।

59 ,, 28 নং অঙ্কের প্রথম হরে $3a-2b$ হইবে।

64 ,, 21 নং অঙ্কের শেষ লবটি $a+b-k$ হইবে।

75 ,, প্রথম ছত্রে $(c^2-b^2)^3$ স্থানে $(c^2-a^2)^3$ হইবে।

100 ,, 9 ছত্রে 286 স্থানে 285 হইবে।

150 ,, 33 নং অঙ্কে প্রথম $-$ চিহ্নের স্থানে $+$ চিহ্ন হইবে।

জ্যামিতি

12 পৃষ্ঠায় প্রমাণের 6 ছত্রে প্রথম $\because$ চিহ্নস্থানে $\therefore$ হইবে।

54 ,, 6 ছত্রে $\frac{1}{2}$DX.X স্থানে $\frac{1}{2}$DX.AX হইবে।

56 ,, উপপাদ্য 29এর 9 ছত্রে ABEE স্থানে ABEF হইবে।

157 ,, প্রথম ছত্রে $\therefore$ চিহ্নস্থানে $\because$ হইবে।

প্রশ্নপত্র

12 পৃষ্ঠায় Q 9(b)এ 16 স্থানে 18 হইবে।

21 ,, 3 ছত্রে ·3927 স্থানে ·3937 হইবে।

24 ,, 1(b) প্রশ্নের প্রথম ছত্রে 'বড়' স্থানে 'পড়' হইবে।